Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 5.5.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Determine the distances between the following pairs of points:

A fórmula da distância (D) entre dois pontos é dada por $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, que chegamos a partir do Teorema de Pitágoras, aplicado aos gráficos das funções.

- a) $(1, 3)$ and $(2, 4)$
  $D = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$
- b) $(-1, 2)$ and $(-3, 3)$
  $D = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- c) $(3/2, -2)$ and $(-5, 1)$
  $D = \sqrt{(-5-3/2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{169/4 + 9} = \sqrt{205/4} = \frac{1}{2}\sqrt{205}$
- d) (x, y) and $(2x, y-3)$
  $D = \sqrt{(2x-x)^2 + (y-3-y)^2} = \sqrt{x^2+9}$
- e) (a, b) and $(-a, b)$
  $D = \sqrt{(-a-a)^2 + (b-b)^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$
- f) $(a, 3)$ and $(2+a, 5)$
  $D = \sqrt{(2+a-a)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

The distance between (2, 4) and (5, y) is $\sqrt{13}$. Find y, and explain geometrically why there must be two values of y.

Temos que: $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

$\sqrt{13} = \sqrt{(y-4)^2 + (5-2)^2}$

$13 = (y-4)^2 + (3)^2$

$13 = y^2 - 8y + 16 + 9$

$y^2 - 8y + 12 = 0$

Aplicando Bhaskara temos:

$Y_1, Y_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{8 \pm 4}{2}$

Logo $Y_1 = \dfrac{8+4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ e $Y_2 = \dfrac{8-4}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Logo, temos que quando y_1 assume os valores de Y_1 e Y_2, a equação é satisfeita. Geometricamente, o sentido disso é que temos que em $\sqrt{13} = (y-4)^2 + (5-2)^2$, o gráfico de um círculo com centro em $(2, 4)$, de modo que o raio do círculo $\sqrt{13}$ intersecciona $x = 5$ nos dois possíveis valores de y_1.

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Encontre as distâncias entre cada par de pontos.

a) $(3.998, 2.114)$ e $(1.130, -2.416)$

Utilizando a fórmula da distância apresentada anteriormente no livro:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1}$$
$$d = \sqrt{(3.998 - 1.130)^2 + (2.114 + 2.416)^2} \tag{2}$$
$$d = \sqrt{8.2254 + 20.5209} \tag{3}$$
$$d = 5.3616 \tag{4}$$

b) $(\pi, 2\pi)$ e $(-\pi, 1)$

Utilizando a mesma fórmula do item a:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{5}$$
$$d = \sqrt{(\pi + \pi)^2 + (2\pi - 1)^2} \tag{6}$$
$$d = \sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi - 1)^2} \tag{7}$$
$$d = \sqrt{39.4784 + 27.912} \tag{8}$$
$$d = 8.2092 \tag{9}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

4. A questão pede para se achar duas equações de círculo: a primeira equação é a de um círculo com centro em (2.3) e raio 4, a segunda com centro em $(2, 5)$ e que passa pelo ponto $(-1, 3)$

Primeira equação:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \tag{10}$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \tag{11}$$

Segunda equação:

$$(-1-2)^2 + (3-5)^2 = r^2 \tag{12}$$
$$(-3)^2 + (-2)^2 = r^2 \tag{13}$$
$$13 = r^2 \tag{14}$$
$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 13 \tag{15}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

To show that the graph of $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 58 = 0$ is a circle, we can argue like this: First rearrange the equation to read $(x^2 - 10x) + (y^2 + 14y) = -58$. Completing the two squares gives: $(x^2 - 10x + 52) + (y^2 + 14y + 72) = -58 + 52 + 72 = 16$. Thus the equation becomes:

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 16 \tag{16}$$

whose graph is a circle with centre $(-5; 7)$ and radius $\sqrt{16} = 4$.

Use this method to find the centre and the radius of the two circles with equations:

a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$

$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 10x) + (y^2 - 6y) = -30 \Leftrightarrow$

$(x^2 + 10x + 5^2) + (y^2 - 6y + 3^2) = -30 + 5^2 + 3^2 = (x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$

Thus, the equation becomes:

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4 \tag{17}$$

Whose graph is a circle with centre $(5; -3)$ and radius $\sqrt{4} = 2$

b) $3x^2 + 3y^2 + 18x - 24y = -39$

$3x^2 + 3y^2 + 18x - 24y = -39 \Leftrightarrow (3x^2 + 18x) + (3y^2 - 24y) = -39 \Leftrightarrow$

$(3x^2 + 18x + (3\sqrt{3})^2) + (3y^2 - 24y + (4\sqrt{3})^2) = -39 + (3\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$

$(x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2 + (y\sqrt{3} - 4\sqrt{3})^2 = 36$

Thus, the equation becomes:

$$(x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2 + (y\sqrt{3} - 4\sqrt{3})^2 = 36 \tag{18}$$

Whose graph is a circle with centre $(3\sqrt{3}; -4\sqrt{3})$ and radius $\sqrt{36} = 6$

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Prove that if the distance from a point (x, y) to the point $(-2, 0)$ is twice the distance from (x, y) to $(4, 0)$, then (x, y) must lie on the circle with centre $(6, 0)$ and radius 4.

Deseja-se provar que $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2+y^2} \iff (x,y) \in (x-6^2+y^2 = 16))$

Suponha $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ arbitrários. Tem-se que: $(\sqrt{(x+2)^2})^2 = (2\sqrt{(x-4)^2+y^2})^2 \iff (x+2)^2 + y^2 = 4((x-4)^2+y^2) \iff x^2+4x+4+y^2 = 4x-32x+64+4y^2 \iff 3x^2-36x+60+3y^2 = 0 \iff x^2-12x+y^2 = 20 \iff (x^2-12x+36)+y^2 = -20+36 \iff (x-6)^2+y^2 = 16$, tal que a equação representa uma circunferência com centro em (6,0) e raio 4

■

Resolução (‖ Questão: 5.5.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖) In Example 4.7.7 we considered the function $y = (ax+b)/(cx+d)$, and we claimed that for $c \neq 0$ the graph was a hyperbola. See how this accords with the classification (i) to (iii) given after Eq. (5.5.5).

$$\frac{(ax+b)}{cx+d} \leftrightarrow y(cx+d) = (ax+b) \tag{19}$$

$$cyx + dy = ax + b \leftrightarrow cxy - ax + dy - b = 0 \tag{20}$$

Portanto, de acordo com a classificação dada após a Eq 5.5.5 ($Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$):

$$A = C = 0 \tag{21}$$

$$B = c \tag{22}$$

$$4.A.C = 4.0.0 = 0 \tag{23}$$

$$B^2 = c^2 \tag{24}$$

Como $4.A.C < B^2 \rightarrow$ se trata de uma hipérbole ou duas linhas de interseção. ■

Resolução (‖ Questão: 5.5.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Consider the equation $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, where A, B, and C are constants. Show that its graph is a circle if $A^2+B^2 > 4C$. Use the method of Exercise 5 to find its centre and radius. What happens if $A^2+B^2 \leq 4C$?

A equação geral da circunferência é dada por:
$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, fatorando chegamos a $x^2+y^2-2ax-2bx+a^2+b^2-r^2 = 0$
(Considerando: r = raio da circunferência e (a, b) = centro da circunferência)
Assim temos que: $A = -2a$, $B = -2b$ e $C = a^2+b^2-r^2$
$\therefore\ a = -\frac{1}{2}A$, $b = -\frac{1}{2}B$, logo o centro da circunferência é dado em um gráfico por $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$.

Tendo os valores a e b iremos calcular o raio:
$C = (-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - r^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - r^2 \Longrightarrow r^2 = \frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2 - C \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C}$

Para a condição de existência da circunferência precisamos que $r > 0$
$\therefore\ \sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C > 0 \Longrightarrow \frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2 > C$ ou $A^2+B^2 > 4C$

Se $A^2+B^2 = 4C$, logo temos um conjunto no gráfico de um único ponto (não sendo uma circunferência) $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$. Se $A^2+B^2 < 4C$, então é um conjunto vazio. ■