Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 5.3.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

A demanda D em função do preço P é dada por $D = \dfrac{32}{5} - \dfrac{3P}{10}$. Resolva a equação para P e encontre a inversa da função.

$$D = \frac{32}{5} - \frac{3P}{10} \tag{1}$$

$$-\frac{32}{5} + D = -\frac{3P}{10} \tag{2}$$

$$\frac{10}{3}(-\frac{32}{5} + D) = -P \tag{3}$$

$$-\frac{64}{3} + \frac{10D}{3} = -P \tag{4}$$

$$-\frac{1}{3}(-64 + 10D) = P \tag{5}$$

$$\frac{1}{3}(64 - 10D) = P \tag{6}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

2. The demand D for sugar in the USA in the period 1915–1929, as a function of the price P, was estimated to be $D = f(P) = \frac{157{,}8}{P^{\frac{3}{10}}}$. Solve the equation for P and so find the inverse of f.

$$D = f(P) = \frac{157,8}{P^{\frac{3}{10}}} \tag{7}$$

$$P^{\frac{3}{10}} \cdot D = 157,8 \tag{8}$$

$$P^{\frac{3}{10}} = \frac{157,8}{D} \tag{9}$$

$$(P^{\frac{3}{10}})^{\frac{10}{3}} = (\frac{157,8}{D})^{\frac{10}{3}} \tag{10}$$

$$P = (\frac{157,8}{D})^{\frac{10}{3}} \tag{11}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Find the domains, ranges, and inverses of the functions given by the following formulas:

a) $y = -3x$

$D = (-\infty; +\infty)$ because $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\ y \in \mathbf{R}$

$R = (-\infty; +\infty)$

$y^{-1} = -\dfrac{x}{3}$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

$D = \{x \in \mathbf{R} | x \neq 0\}$ because for $x = 0$, y is not defined $R = (-\infty; +\infty)$ $y^{-1} = \dfrac{1}{x}$

c) $y = x^3$

$D = (-\infty; +\infty)$ because $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists\ y \in \mathbf{R}$

$R = (-\infty; +\infty)$

$y^{-1} = \sqrt[3]{x}$

d) $y = \sqrt{\sqrt{x} - 2}$

$D = [4; +\infty)$ because $\sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

$R = [0; +\infty)$

$y^{-1} = x^4 + 4x^2 + 4$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Formalize the following statements:

a) Halving and doubling are inverse operations.

$f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(y) = 2y$, são funções inversas.

b) The operation of multiplying a number by 3 and then subtracting 2 is the inverse of the operation of adding 2 to the number and then dividing by 3.

$f(x) = 3x - 2$ e $g(y) = \frac{(y+2)}{3}$, são funções inversas.

c) The operation of subtracting 32 from a number and then multiplying the result by $\frac{5}{9}$ is the inverse of the operation of multiplying a number by $\frac{9}{5}$ and then adding 32. "Fahrenheit to Celsius, and Celsius to Fahrenheit".

$C = (F - 32)\frac{5}{9}$ e $F = \frac{9}{5}C + 32$, são funções inversas.

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

If f is the funcion that tells you how many kilograms of carrots you can buy for a specified amount of money, then what does f^{-1} tell you?

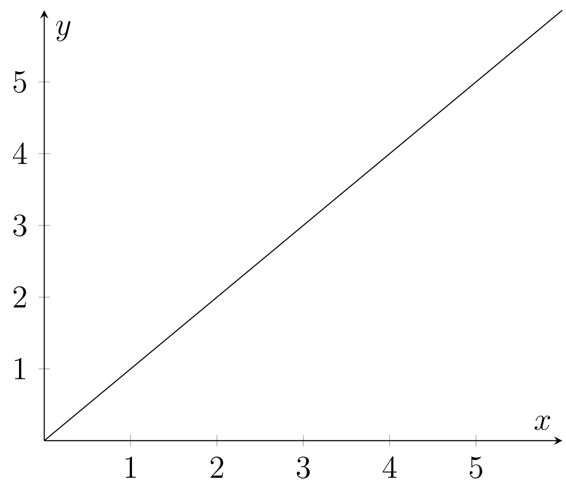
Sendo C a quantidade, em kg, de cenouras e $f(C)$ o custo de tal quantidade:

A função $f^{-1}(C)$ resulta no montante necessário para comprar uma quantidade de C quilogramas de cenouras.

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

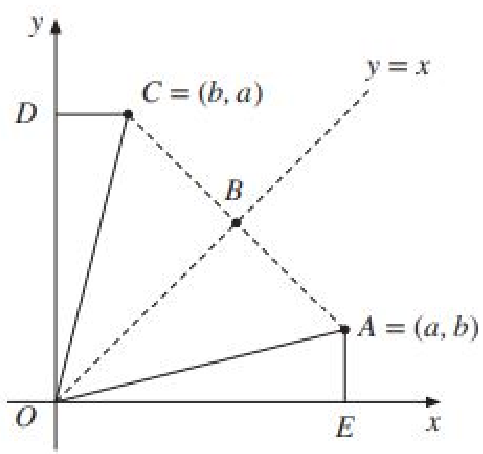
8. On a coordinate system in the plane:
(a) Show that points (3, 1) and (1, 3) are symmetric about the line y = x, and the same for (5, 3) and (3, 5).



Note que os pontos (3,1) está 2 unidades abaixo da linha reta e duas unidades à direita dessa mesma reta, enquanto que o ponto (1,3) está duas unidades acima da linha reta e duas unidades à esquerda dessa mesma reta, mostrando assim a simetria entre essas duas coordenadas. O mesmo vale para a coordenada (5,3) e a coordenada (3,5), sendo que a primeira coordenada que está 2 unidades abaixo da linha reta y=x e duas unidades à direita da mesma reta e a segunda (3,5) está duas unidades acima da linha reta e duas unidades à esquerda dessa mesma reta, mostrando assim a simetria entre essas duas coordenadas.

(b) Use properties of congruent triangles to prove that points (a, b) and (b, a) in the plane are symmetric about the line y = x. What is the point half-way between them.

Figure 1



Como podemos ver através do gráfico, os triângulos OBC e OAE são congruentes pois possuem três lados iguais.Como podemos ver no gráfico os pontos (b,a) e (b,a) estão na mesma distância da reta que une os dois triângulos y=x. Além isso o ponto B, que é a meia distância entre esse par de pontos é dada por $(\frac{1}{2}(a,b), \frac{1}{2}(b,a))$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Encontre as inversas das seguintes funções, onde x é a variável independente.

a) $f(x) = (x^3 - 1)^{1/3}$

$$f(x) = (x^3 - 1)^{1/3} \tag{12}$$
$$y = (x^3 - 1)^{1/3} \tag{13}$$
$$y^3 = x^3 - 1 \tag{14}$$
$$y^3 + 1 = x^3 \tag{15}$$
$$(y^3 + 1)^{1/3} \tag{16}$$

Portanto, a inversa de $f(x)$ será:

$$f^{-1}(x) = (x^3 + 1)^{1/3}$$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \tag{17}$$
$$y = \frac{x+1}{x-2} \tag{18}$$
$$y(x-2) = x + 1 \tag{19}$$
$$xy - 2y = x + 1 \tag{20}$$
$$-2y - 1 = x - xy \tag{21}$$
$$-2y - 1 = -x(-1 + y) \tag{22}$$
$$\frac{-2y = y - 1}{y - 1} = -x \tag{23}$$
$$\frac{2y+1}{y-1} = x \tag{24}$$

Portanto, a inversa de $f(x)$ será:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

c) $f(x) = (1 - x^3)^{1/5} + 2$

$$f(x) = (1 - x^3)^{1/5} + 2 \tag{25}$$
$$y = (1 - x^3)^{1/5} + 2 \tag{26}$$
$$y - 2 = (1 - x^3)^{1/5} \tag{27}$$
$$(y - 2)^5 = 1 - x^3 \tag{28}$$
$$(y - 2)^5 - 1 = -x^3 \tag{29}$$
$$1 - (y - 2)^5 = x^3 \tag{30}$$
$$(1 - (y - 2)^5)^{1/3} = x \tag{31}$$

Portanto, a inversa de $f(x)$ será:

$$f^{-1}(x) = (1 - (x - 2)^5)^{1/3}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

10. The functions defined by the following formulas are strictly increasing in their domains. Find the domain of each inverse function, and a formula for the corresponding inverse.

a)$y = e^{x+4}$

$$y = e^{x+4} \tag{32}$$
$$\ln y = \ln e^{x+4} \tag{33}$$
$$\ln y = x + 4 \tag{34}$$
$$\ln y - 4 = x \tag{35}$$

Como não é possível logarítimo negativo ou igual a zero, o domínio D da função inversa deve ser $D : y > 0$.

b)$y = \ln x - 4, x > 0$

$$y = \ln x - 4 \tag{36}$$
$$y + 4 = \ln x \tag{37}$$
$$e^{y+4} = x \tag{38}$$

Neste caso não há restrições para o domínio, portanto o domínio é todo o conjunto dos números reais.

c)$y = \ln(2 + e^{x-3})$

$$y = \ln\bigl(2 + e^{x-3}\bigr) \tag{39}$$
$$e^y = 2 + e^{x-3} \tag{40}$$
$$e^y - 2 = e^{x-3} \tag{41}$$
$$\ln(e^y - 2) = \ln e^{x-3} \tag{42}$$
$$\ln(e^y - 2) = x - 3 \tag{43}$$
$$\ln(e^y - 2) + 3 = x \tag{44}$$

O domínio da função inversa tem uma restrição devido ao logarítimo, não podendo ser negativo ou zero, portanto o domínio será:

$$e^y - 2 > 0 \tag{45}$$
$$e^y > 2 \tag{46}$$
$$D : y > \ln 2 \tag{47}$$

■

Resolução (‖ Questão: 5.3.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Find the inverse of $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. (Hint: Solve a quadratic equation in $z = e^x$)

Let $z = e^x$.Thus, the function will assume the following form:

$$y = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \tag{48}$$

We can manipulate the function in order to transform it in a quadratic equation:
$y = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \Leftrightarrow \frac{z}{2} - \frac{1}{2z} - y = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{2z} - \frac{1}{2z} - \frac{2yz}{2z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0$

As a quadratic equation, we may use Bhaskara's formula to solve for z:

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} \Leftrightarrow$
$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$

As we have the value of z in y terms, we just substitute z for e^x :

$$z = y \pm \sqrt{y^2+1} \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = ln[y \pm \sqrt{y^2+1}] \tag{49}$$

As $(y^2 < y^2 + 1)\ \forall y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (y < \sqrt{y^2+1}) \Leftrightarrow (y - \sqrt{y^2+1}) < 0$, then, $z = ln[y - \sqrt{y^2+1}]$ won't satisfy $e^x = z$, because there is no logarithm of a negative number.

So, the inverse function of $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ is :

$$x = ln[y + \sqrt{y^2+1}] \tag{50}$$

■