

Swing-up – Controle por Energia

PTC 3471 – Práticas de Projeto de Sistemas de Controle
2º semestre de 2019

Bruno Angélico / Fuad Kassab Jr. / Diego Colón

Laboratório de Automação e Controle
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Introdução

- O algoritmo de *Swing-up* é aquele que atua o sistema para alterar o ângulo do pêndulo da posição estável ($\theta_1 = \pm\pi$) para próximo de sua posição invertida, que como considerado na modelagem terá valor $\theta_1 = 0$.
- Existem diversas técnicas para realização do algoritmo de *Swing-up*, tais como: atuação por *bang-bang*, PID hierárquico, gradiente de velocidade, método de energia, controle ótimo, entre outros.

Controle por Energia

- As forças de atritos podem ser desprezadas e o pêndulo simples pode ser analisado como um corpo rígido, tal que:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 g \ell_1 \sin(\theta_1) = u m_1 \ell_1 \cos(\theta_1)$$

- Há um ponto de equilíbrio estável ($\theta_1 = \pm\pi, \dot{\theta}_1 = 0$) um instável ($\theta_1 = 0, \dot{\theta}_1 = 0$).
- Deseja-se determinar uma função de Lyapunov V de tal forma que dV/dt sempre seja decrescente, exceto no ponto de equilíbrio desejado. Para tal, considera-se uma energia $E_0=0$ na posição invertida.

Controle por Energia

- A energia do pêndulo com parcelas de energia de rotação e energia potencial, pode ser descrita de forma simplificada como:

$$E = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + m_1 g \ell_1(\cos(\theta_1) - 1)$$

- Vale a pena notar que este cálculo da energia é diferente da utilizada na modelagem, pois, além de considerar só a rotação própria do pêndulo, deseja-se que na posição invertida $E=E_0=0$.

Controle por Energia

- Calculando a derivada de E em relação ao tempo:

$$\frac{dE}{dt} = I_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 g \ell_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) = u m_1 \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)$$

- Assim, determina-se a lei de controle u de tal forma que dE/dt seja sempre negativa, exceto posição invertida.

Controle por Energia

- Define-se uma função candidata de Lyapunov $V=(1/2)(E-E_0)^2$.Com isso:

$$\frac{dV}{dt} = (E - E_0) \dot{E} = (E - E_0) u m_1 \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)$$

- Para $u = \underbrace{-k(E - E_0)}_{T_1} \underbrace{\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)}_{T_2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -(E - E_0) k (E - E_0) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) m_1 \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\ &= -k m_1 \ell_1 \left[(E - E_0) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \right]^2 \end{aligned}$$

Controle por Energia

- Com o sinal de controle:

$$u = \underbrace{-k(E - E_0)}_{T_1} \underbrace{\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)}_{T_2}$$

a derivada de V em relação ao tempo é sempre negativa exceto no ponto de equilíbrio desejado.

- O termo T_1 amplifica o módulo de u quanto maior for a diferença $(E-E_0)$. Próximo ao ponto de equilíbrio, u tenderá a zero.
- O termo T_2 também altera o módulo de u , contudo sua função principal é determinar sinal de u de tal forma que V sempre decaia até atingir o ponto de equilíbrio.

Implementação do Swing-up

- Para facilitar o projeto de u , altera-se T_1 como uma parcela integralmente responsável pelo módulo e T_2 como parcela para ajuste do sinal, obtendo-se:

$$u = \underbrace{-K |\theta_1|^n}_{T_1} \underbrace{\text{sign}(\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1))}_{T_2}$$

Implementação do Swing-up

- Quanto mais afastado da posição invertida (maior $E-E_0$), maior será a intensidade do controle.
- K representa um ajuste fino na intensidade. Assim, T_1 possui módulo elevado para posições próximas à condição inicial e valores baixos conforme aproxima-se do posição invertida.

Implementação do Swing-up

- Para implementação, é importante saturar T_1 para os limites do sinal PWM. O termo T_2 agora atua exclusivamente para a troca correta de sinal.
- Uma das formas de implementação da função sinal em linguagem C é utilizando atribuição condicional:

```
double eps =1e-16;  
  
int sgn(double d)  
{  
    return d<=-eps?-1:d>eps;  
}
```

Implementação do Swing-up

- Sugestões para iniciar os testes:

$$n = 3$$

$$K = 0,03$$