MAT230 – **Construções Geométricas**

2/2019
Lic. Diurno – T42
Profa. Ana Paula Jahn

Introdução às **Construções Geométricas**

- **Resolução gráfica** de problemas de Geometria Plana
- Discutir a **solubilidade** de construções geométricas com instrumentos
- **Fixar regras**: quais os **instrumentos** permitidos e quais **operações gráficas** podem ser feitas com estes instrumentos

Regras

- Únicos instrumentos permitidos:

✓ **régua não graduada**

✓ **compasso**

Regras

- Operações gráficas permitidas
- ✓ **Traçar uma reta** arbitrária passando por um ponto conhecido
- ✓ **Traçar a reta** passando por 2 pontos conhecidos
- ✓ **Traçar uma circunferência** de centro e raio, ambos arbitrários ou um deles conhecido e outro arbitrário
- ✓ **Traçar a circunferência** de centro conhecido e passando por um ponto conhecido
- ✓ **Traçar a circunferência** de centro e raio conhecidos

Regras

- Operações gráficas permitidas
- ✓ **Traçar uma reta** arbitrária passando por um ponto conhecido
- ✓ **Traçar a reta** passando por 2 pontos conhecidos
- ✓ **Traçar uma circunferência** de centro e raio, ambos arbitrários ou um deles conhecido e outro arbitrário
- ✓ **Traçar a circ** conheci conhec
- ✓ **Traçar a** conhecidos

Admitindo-se o **Postulado 4** de Euclides: *pode-se traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.*

Operações gráficas

- Estas operações geram **restrições quanto ao uso dos instrumentos**, fazendo com que existam construções que não possam ser realizadas com os mesmos
- Três problemas clássicos da Antiguidade:
  - ✓ ***Duplicação do cubo***: construir a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro de um dado cubo
  - ✓ ***Trisecção de um ângulo***: dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais
  - ✓ ***Quadratura do círculo***: construir o lado de um quadrado cuja área seja igual a de um círculo dado

O que significa ***resolver graficamente*** um problema de Geometria Plana?

Utilizando-se de um número finito de operações permitidas, a **resolução** se divide em três etapas:

1. A **construção gráfica**, isto é, mostra-se como se faz (descrevendo-se os passos da construção)
2. A **justificativa da construção**, isto é, demonstra-se porque a construção dada realmente resolve o problema
3. A **discussão da solução** dada, ou seja, se o problema admite zero, uma ou mais soluções e quanto os dados do problema interferem nesta resolução

Proposição 1 do **Livro 1** - ***Os Elementos*** de **Euclides**

A partir de um segmento de reta tomado como lado, construir um **triângulo equilátero**.

- Apresente a referida construção em suas 3 etapas
  - descrever os passos da construção, justificar e discutir o número de soluções.

Continuidade da Circunferência

- Seja uma circunferência de centro em *A* e raio *r*. Todo ponto *P* que satisfaz *AP* < *r* é dito "***estar dentro***" da circunferência (ou ***ponto no interior*** da circunferência)
- E se *AP* > *r*, então *P* é dito "***estar fora***" da circunferência (ou ***ponto no exterior*** da circunferência)

Continuidade da Circunferência

- Teorema (***Princípio da continuidade elementar***). Um segmento de reta que liga um ponto dentro e ponto fora da circunferência intercepta esse circunferência em um único ponto.

Continuidade da Circunferência

- ***Teorema das duas circunferências***. São dadas duas circunferências de raios *a* e *b* e seja c a distância entre os centros. Se cada um dos números *a*, *b* e c é menor que a soma dos outros dois, então as circunferências se interceptam em dois pontos em lados opostos da reta que passa pelos centros.

Construção de triângulos

E é possível construir um **triângulo isósceles**?
E um triângulo qualquer dado seus três lados?

As construções nas quais são dados segmentos de reta represetando lados de um triângulo necessitam de uma construção básica denominada "**transporte de segmentos**".

Exercício: Pesquisar e descrever a referida construção conforme enunciado que segue (baseado em Euclides).

Proposição 2 do **Livro 1** - ***Os Elementos*** de **Euclides**

A partir de um ponto dado, construir um segmento de reta congruente a outro segmento dado.

Antes de realizar a construção,

algumas **considerações** e **resultados importantes**!

☺

Construção de Segmentos de reta

Teorema: Dado um segmento de reta *AB* e uma semirreta *CD*, existe exatamente um ponto *E* da semirreta *CD* tal que os segmentos *AB* e *CE* são congruentes (ou seja, *AB* = *CE*).

Demonstração (Moise, 1976, p. 87-88)

Congruência de segmentos

Para segmentos, a **congruência** é uma **relação de equivalência**

Isto é, valem as seguintes propriedades:

i) **Reflexividade**: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (todo segmento é congruente a si mesmo)

ii) **Simetria**: se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$

iii) **Transitividade**: se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$

Operações com segmentos

Teorema (adição de segmentos): Se

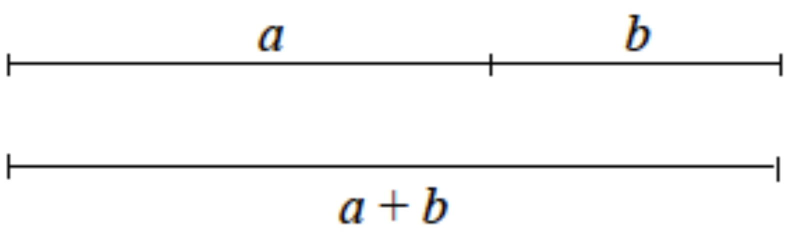
(1) $A - B - C$

(2) $A' - B' - C'$

(3) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$

(4) $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$



Operações com segmentos

Teorema (subtração de segmentos): Se

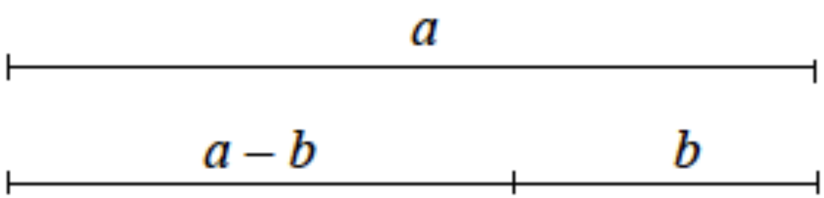
(1) *A– B – C*

(2) *A'– B'– C'*

(3) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$

(4) $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$

Então $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$



Proposição 2 - Construção

- Sejam dados um ponto A e um segmento de reta $\overline{BC}$

1) Traçar a reta por *A* e *B* (I.1)
2) Construir o triângulo equilátero *DAB* de lado *AB* (Prop. 1)
3) Traçar as semirretas *DA* e *DB* (I.1, I.2 e def. semirreta)
4) Traçar a circunferência C_1 com centro em *B* e raio *BC* (Op. 3). C_1 intercepta a semirreta *DB* no ponto *E*.
5) Traçar a circunferência C_2 com centro em *D* e raio *DE* (Op. 3). C_2 intercepta a semirreta *DA* no ponto *F*.
6) O segmento *AF* é a solução do problema, ou seja, *AF* = *BC*.

Proposição 2 - Construção

- Sejam dados um ponto A e um segmento de $\overline{BC}$ reta

Prova: Sendo *B* centro de C_1 , tem-se *BC*= *BE* (1) e sendo *D* centro de C_2, tem-se *DE* = *DF* (def. circunf.). *Mas*, *DA* = *DB* (Δ*DAB* é equilátero, por construção) e, com isso, *BE* = *AF* (2) (subtração de segmentos). Logo, de (1) e (2), *BC* = *AF* (transitividade) e, por consequência, foi construído, com extremidade em *A*, um segmento *AF* congruente a *BC* dado.

Proposição 3 do **Livro 1** - ***Os Elementos*** de **Euclides**

"*Dados dois segmentos de reta não congruentes, retirar do maior uma parte igual ao menor.*"

Ou:

Sejam dois segmentos de reta AB e CD (distintos) dados, com $AB < CD$. Construir um ponto E no segmento CD, tal que $CE=AB$.

Construções fundamentais

1) **Transportar um ângulo** dado sobre uma semirreta dada
2) Construir a **bissetriz** de um ângulo
3) Construir a **mediatriz** de um segmento de reta
4) Traçar, por um ponto dado, a **reta perpendicular** a uma reta dada
5) Traçar, por um ponto dado, a **reta paralela** a uma reta dada
6) **Trissectar** um ângulo reto
7) **Construir um triângulo**, dados os 3 lados

Construções fundamentais

1) **Transportar um ângulo** dado sobre uma semirreta dada
2) Construir a **bissetriz** de um ângulo
3) Construir a **mediatriz** de um segmento de reta
4) Traçar, por um ponto dado, a **reta perpendicular** a
5) Traçar, por um a uma reta a
6) **Trissectar** um âng
7) **Construir um triângulo**, dados os 3 lados

Necessidade de **axiomas de congruência** de triângulos

Construção de Triângulo Isósceles

1) *Definir **triângulo isósceles** (nomeando seus elementos).*

2) *Construir **triângulo isósceles** com régua (não graduada) e compasso.*

(Lembrete: a resolução por construção geométrica compreende 3 fases: - descrição passo a passo da construção gráfica; - prova/justificativa; - discussão da solução)

Livro 1 de *Os Elementos* de Euclides

- Disponível em http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/2parte.html Último acesso em: 28/08/2019