IME-USP
MAT230 – Geometria e Desenho Geométrico I
Licenciatura em Matemática – Diurno – 2/2019

Resumo 4 – AXIOMAS DA GEOMETRIA EUCLIDEANA (cont.)

Com os postulados já enunciados e teoremas já demonstrados, podemos introduzir a **congruência de triângulos**.

DEF19: Dados dois triângulos, ΔABC e ΔDEF, e uma correspondência biunívoca entre seus vértices (com a natural correspondência biunívoca entre os lados e ângulos que dela decorre), diremos que esta correspondência é uma **congruência** se todo par de lados correspondentes são congruentes e todo par de ângulos correspondentes são congruentes.

Isto é, a correspondência ABC↔DEF é uma congruência se as seguintes condições são verdadeiras:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE},\ \overline{AC} \equiv \overline{DF},\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \quad \text{e} \quad \hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}.$$

DEF20: **Dois triângulos**, ΔABC e ΔDEF, são **congruentes** se existe alguma correspondência biunívoca entre seus vértices que satisfaça as seis condições para uma congruência. Neste caso, escrevemos $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Sabemos, da nossa experiência, que é suficiente valerem três das seis congruências acima para que as outras três também sejam verdadeiras. Só que isso decorre do próximo postulado.

Postulado de Congruência de Triângulos

LAL - Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois lados do 1º triângulo e o ângulo determinado por eles são congruentes aos elementos correspondentes do 2º triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Algumas **propriedades importantes** que podem ser **demonstradas a partir dos postulados enunciados até aqui** (sem o Postulado das Paralela de Euclides).

I – Casos de congruências de triângulos

Com enunciados análogos aos do postulado **LAL**, valem mais os seguintes casos de congruência de triângulos (**formule seus enunciados**): **ALA, LLL,** $\mathbf{LAA_o}$ e, sendo $\hat{A}$ um ângulo reto ou obtuso, também vale **ALL** (que não vale se $\hat{A}$ for agudo – **dê um contra exemplo**).

II – Desigualdades Geométricas

Teorema 1 (do ângulo externo): Em um dado triângulo, todo ângulo externo é maior do que cada um dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

Corolário 1.1: É única a reta perpendicular a uma dada reta passando por um ponto externo a essa.

Corolário 1.2: Todo triângulo tem, no máximo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso, sendo os outro dois agudos.

Teorema 2: Em um dado triângulo tem-se: um dos seus lados tem medida maior do que outro se, e somente se, o ângulo que se opõe ao primeiro tem medida maior do que o ângulo que se opõe ao segundo.

Corolário 2.1: A hipotenusa de um triângulo retângulo é o seu maior lado (assim como o lado que se opõe ao ângulo obtuso de um triângulo obtusângulo).

Teorema 3: O menor segmento que une um ponto a uma reta à qual ele não pertence é perpendicular à reta.

Teorema 4 (Desigualdade triangular): Em qualquer triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é sempre maior do que o comprimento do terceiro lado.

Teorema 5: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre menor ou igual a 180.
(Observe que sem o postulado da paralela não é possível demonstrar a igualdade.)

III – Resultados sobre paralelismo de retas que não dependem do Postulado das Paralelas

Teorema 6: Em um dado plano, se duas retas são perpendiculares a uma terceira reta, então elas são paralelas.

Teorema 7: Dados uma reta e um ponto fora dela, sempre existe pelo menos uma reta que passa pelo ponto e é paralela à reta dada.

Teorema 8: Em um plano, dadas duas retas cortadas por uma transversal, se dois ângulos alternos internos (ou alternos externos ou correspondentes) forem congruentes, então as retas são paralelas.

Atenção: as recíprocas dependem do **Postulado das paralelas** de Euclides.