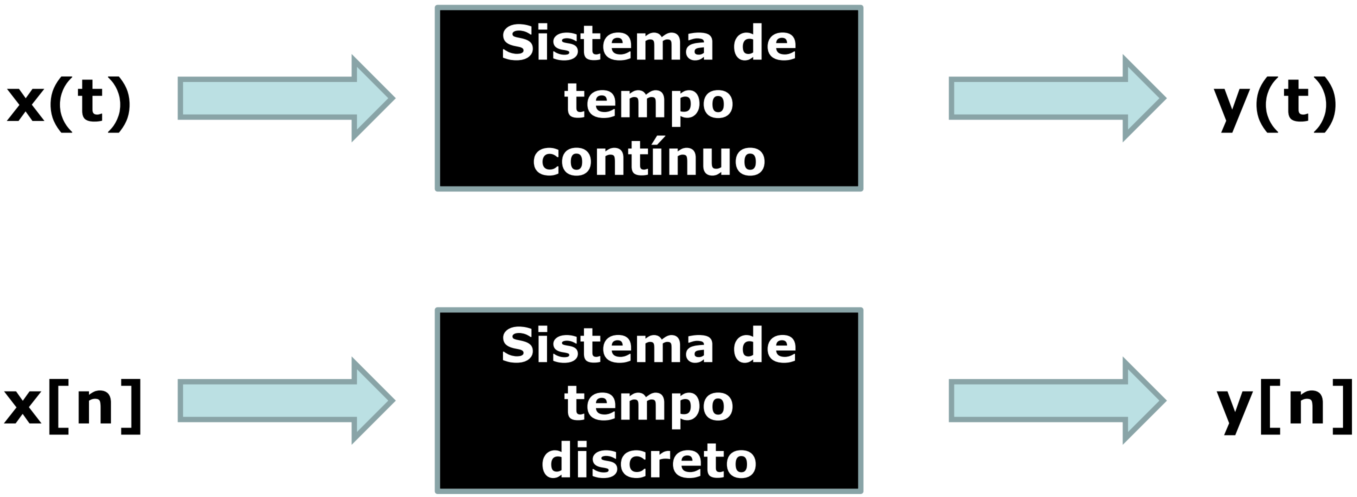
Convolução – Correlação

Profs. Theo Pavan e Adilton Carneiro
TAPS

Sistema

- Sistema → processo em que os sinais de entrada são transformados resultando em um outro sinal de saída.



Sistemas lineares e invariante no tempo

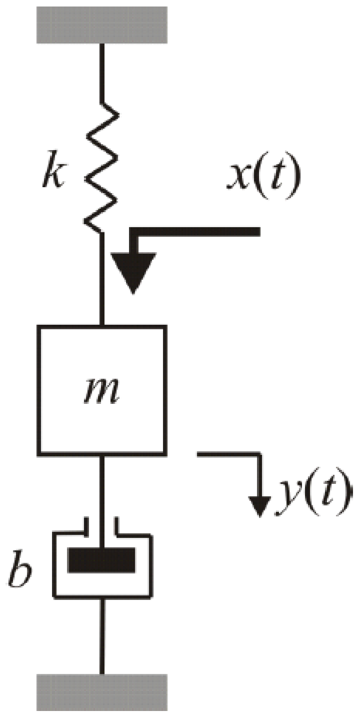
- Sistemas lineares e invariante no tempo (LIT).
- Sistema invariante no tempo → características do sistema são fixas ao longo do tempo.

$$\mathbf{y_1[n] = S\{x_1[n]\} \rightarrow y_1[n-n_0] = S\{x_1[n-n_0]\}}$$

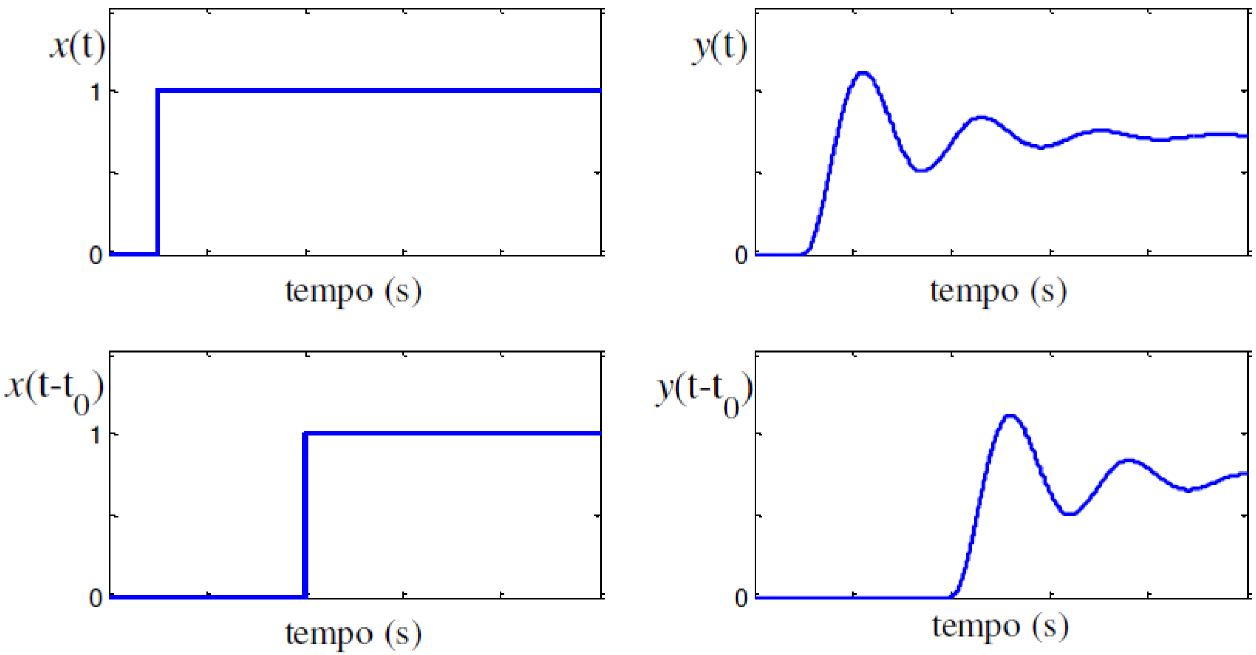
- Sistema linear → possui a importante propriedade de superposição.

$$\mathbf{S\{a.x_1[n]+b.x_2[n]\}=a.S\{x_1[n]\}+b.S\{x_2[n]\}}$$

Exemplo – Sistema Mecânico



Equação Diferencial $$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+b\frac{\partial y}{\partial t}+ky=u(t)$$



É um sistema Invariante no tempo

Resposta ao impulso

É uma maneira de avaliar a resposta de um sistema LIT.

Um impulso é um sinal de curta duração que vai de zero a um valor máximo e volta ao zero em curto espaço de tempo.

$$\mathbf{x_0 = 1}$$

$$\mathbf{x_i = 0 \text{ para } i \neq 0}$$

A resposta ao impulso de um sistema LIT representa os valores com os quais o sistema opera.

Em processamento de imagens a resposta ao impulso equivale à função de espalhamento pontual (Point Spread Function).

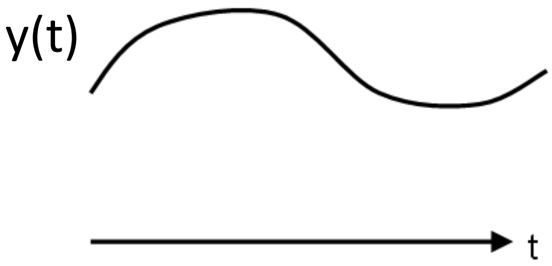
Resposta ao impulso de um sistema LIT

$$\delta[n] \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow h[n] = T\{\delta[n]\}$$

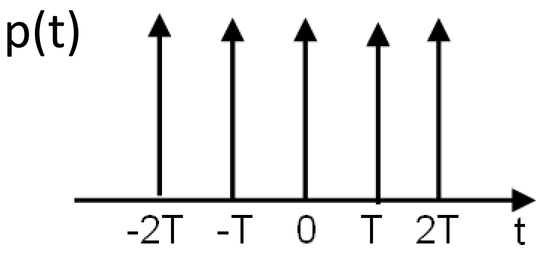
$$\delta[n-k] \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow h_k[n] = T\{\delta[n-k]\}$$

Sistema invariante no tempo $\Rightarrow$ $h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$

Amostrar um sinal



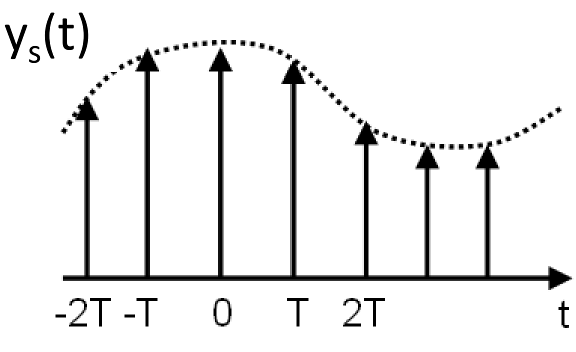
Sinal contínuo



Trem de pulsos

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT)$$

Função amostrada no tempo



$$y_s(t) = y(t).\,p(t)$$

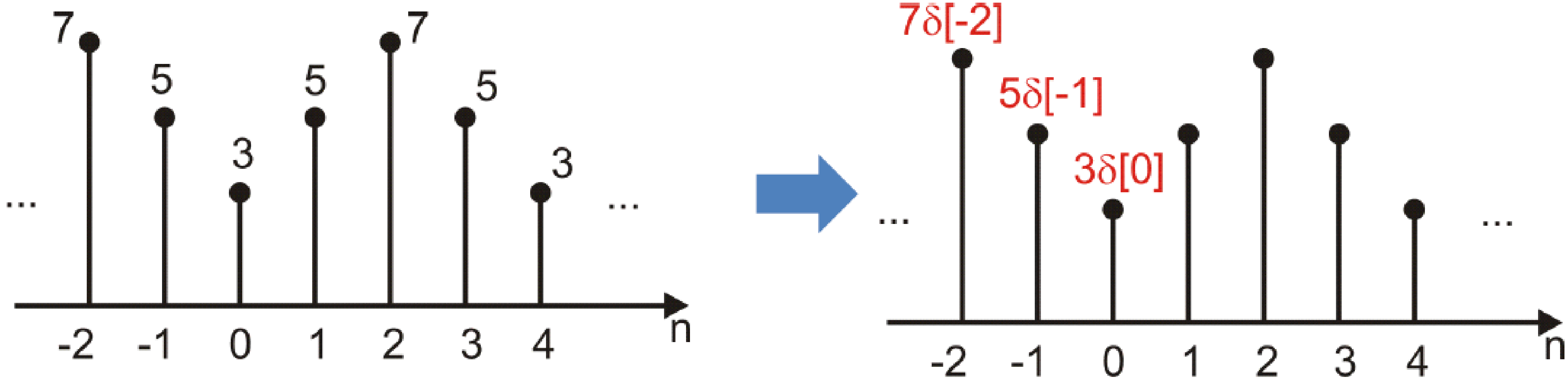
$$y_s(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT)$$

Consideramos apenas y(nT)

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta\,(t - nT)$$

http://www.youtube.com/watch?v=vbjC-aCmMUM&feature=related

Representação de Sistemas Lineares e Invariantes



$$x[n] = \ldots + \quad 7\delta_{[n+2]} \; + \quad 5\delta_{[n+1]} \quad + \; 3\delta_{[n]} \; + \; 5\delta_{[n-1]} \; + \ldots$$

$$x[n] = \ldots + x_{[-2]}\delta_{[n+2]} + x_{[-1]}\delta_{[n+1]} + x_{[0]}\delta_{[n]} + x_{[1]}\delta_{[n-1]} + \ldots$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

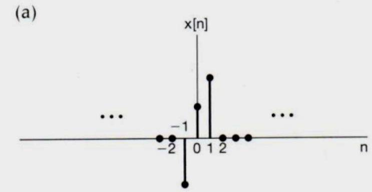
Sistema LIT

- Um conceito fundamental em processamento de sinais digitais é que um sinal (y_s) pode ser descrito como uma sequência de impulsos individuais.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad y[n] = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\}$$

$$\Downarrow \qquad \textbf{Superposição}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

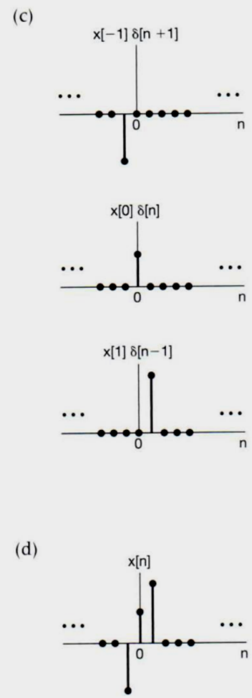


Figura 2.2 Interpretação gráfica da resposta de um sistema linear de tempo discreto conforme representado na Equação 2.3.

Sistema LIT

- Um conceito fundamental em processamento de sinais digitais é que um sinal (y_s) pode ser descrito como uma sequência de impulsos individuais.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad y[n] = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\}$$

Superposição

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Invariância no tempo

h[n] é a resposta a δ[n]

δ[n - k] é h[n – k]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

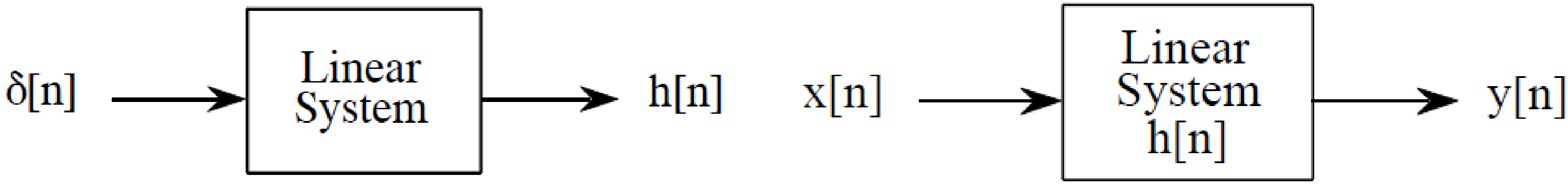
Convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

- A operação matemática da convolução expressa a resposta de um sistema LIT a uma entrada arbitrária em termos da resposta do sistema ao impulso unitário.

- É uma operação matemática como soma, em que sua aplicação sobre dois sinais implica na aparição de um terceiro sinal.

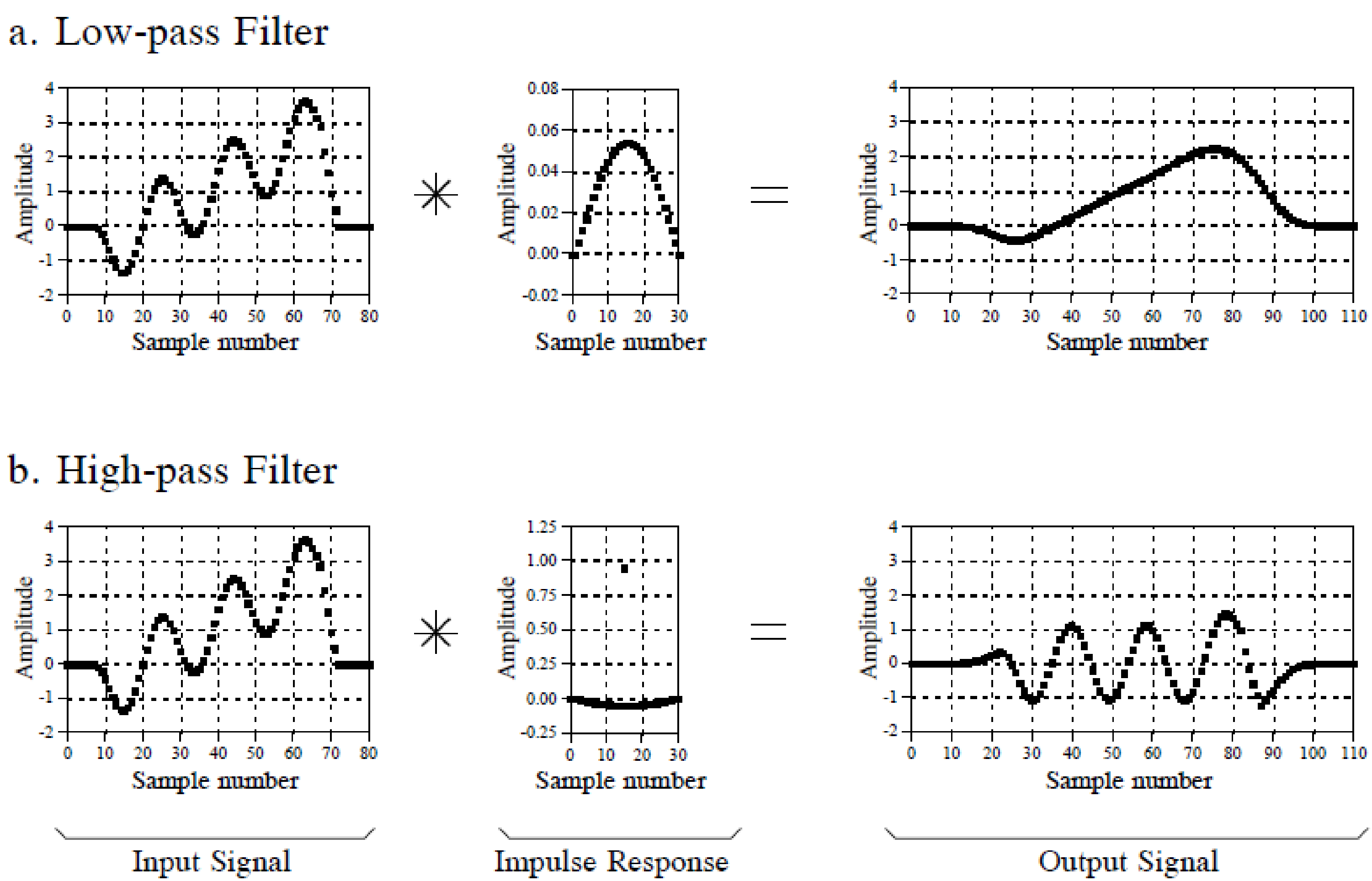
Convolução



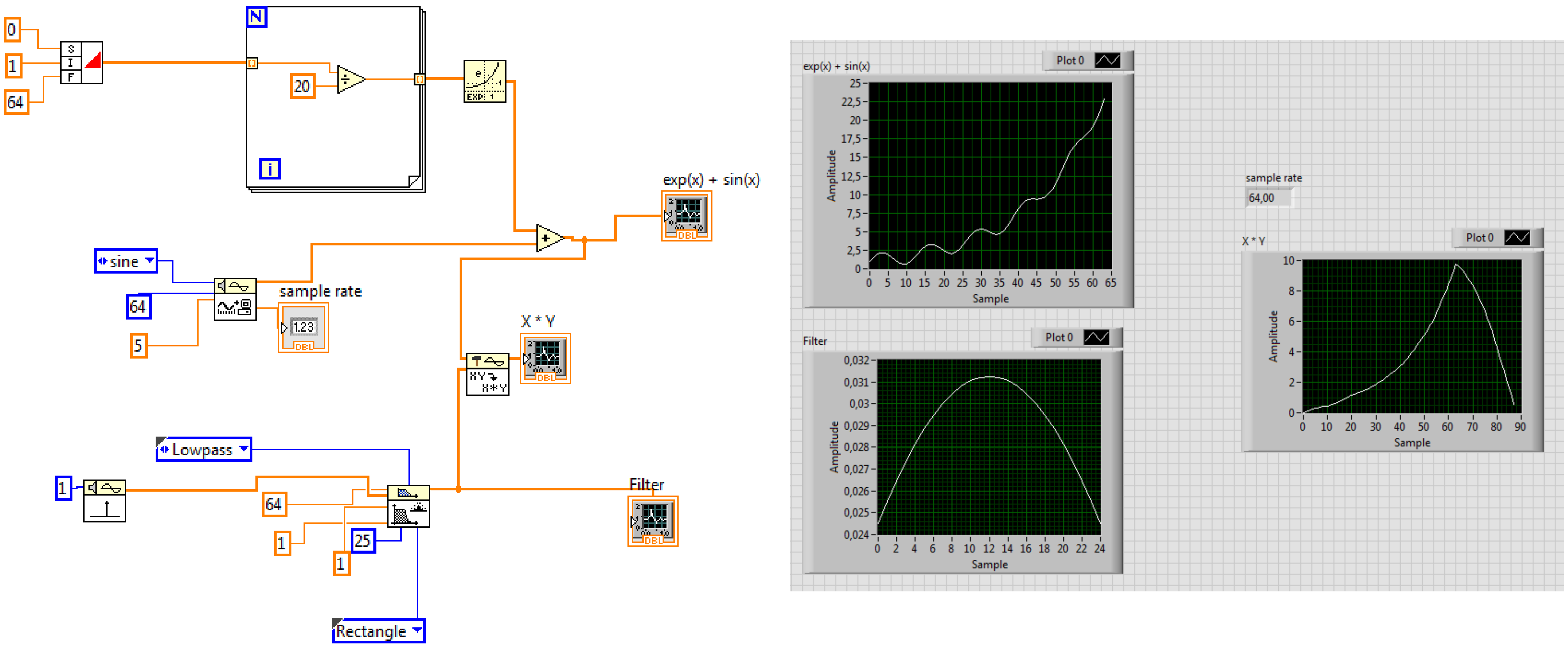
$$x[n] * h[n] = y[n]$$

Resumindo:
se conhecemos a resposta para um impulso de um sistema LIT, podemos calcular qual será a saída de qualquer sinal de entrada.

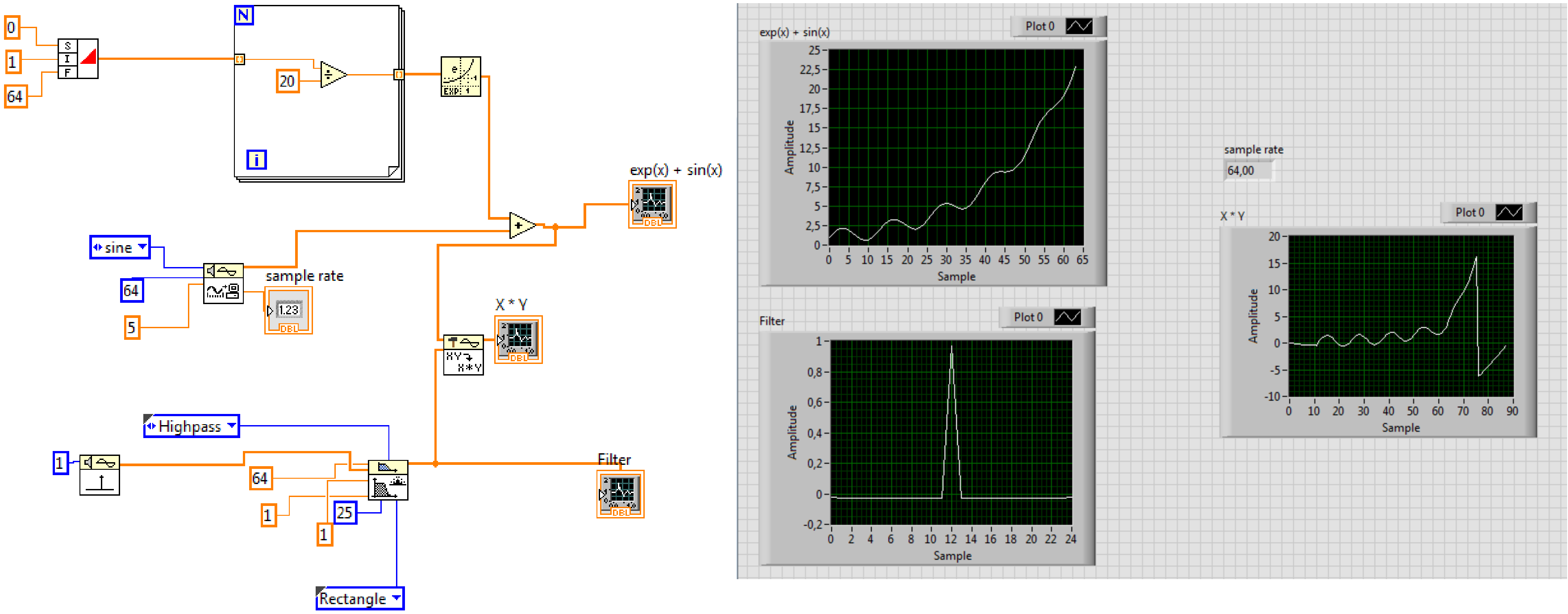
Operação pode ser por exemplo um filtro



Exemplo LabView



Exemplo LabView



Exemplo convolução - filtros

- A resposta ao impulso de um filtro **passa-baixas** é um **arco suave**. O resultado é que **somente a forma de onda** que **varia lentamente** com o tempo **passa** para a saída.

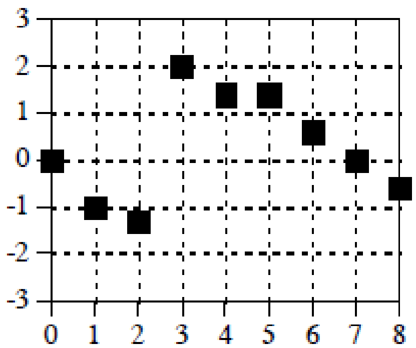
- De maneira similar, o filtro **passa-altas** permite que somente **mudanças mais rápidas passem** para a saída.

Calculando a convolução

Um exemplo simples

Entrada

x[n]

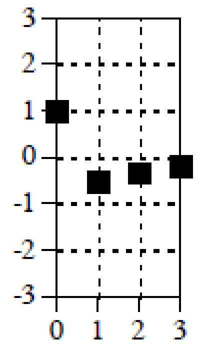


9 pontos

$*$

Resposta ao impulso

h[n]

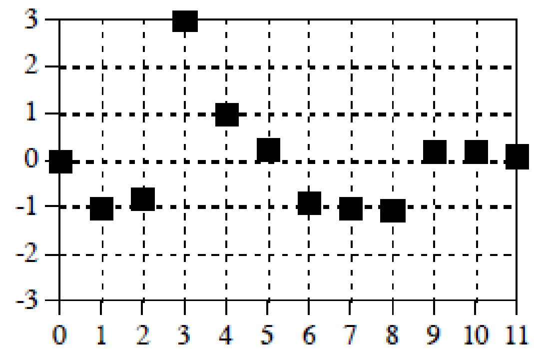


4 pontos

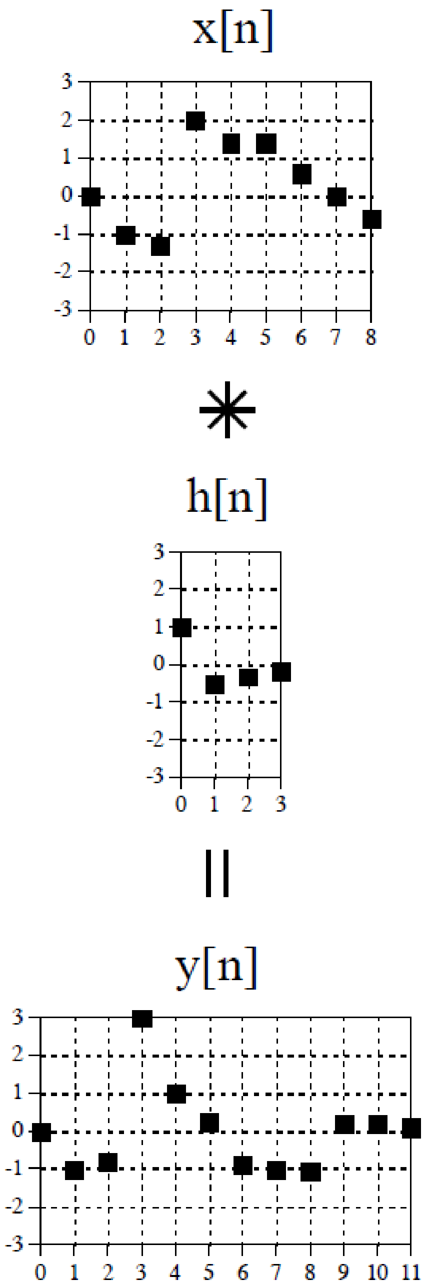
$=$

Saída

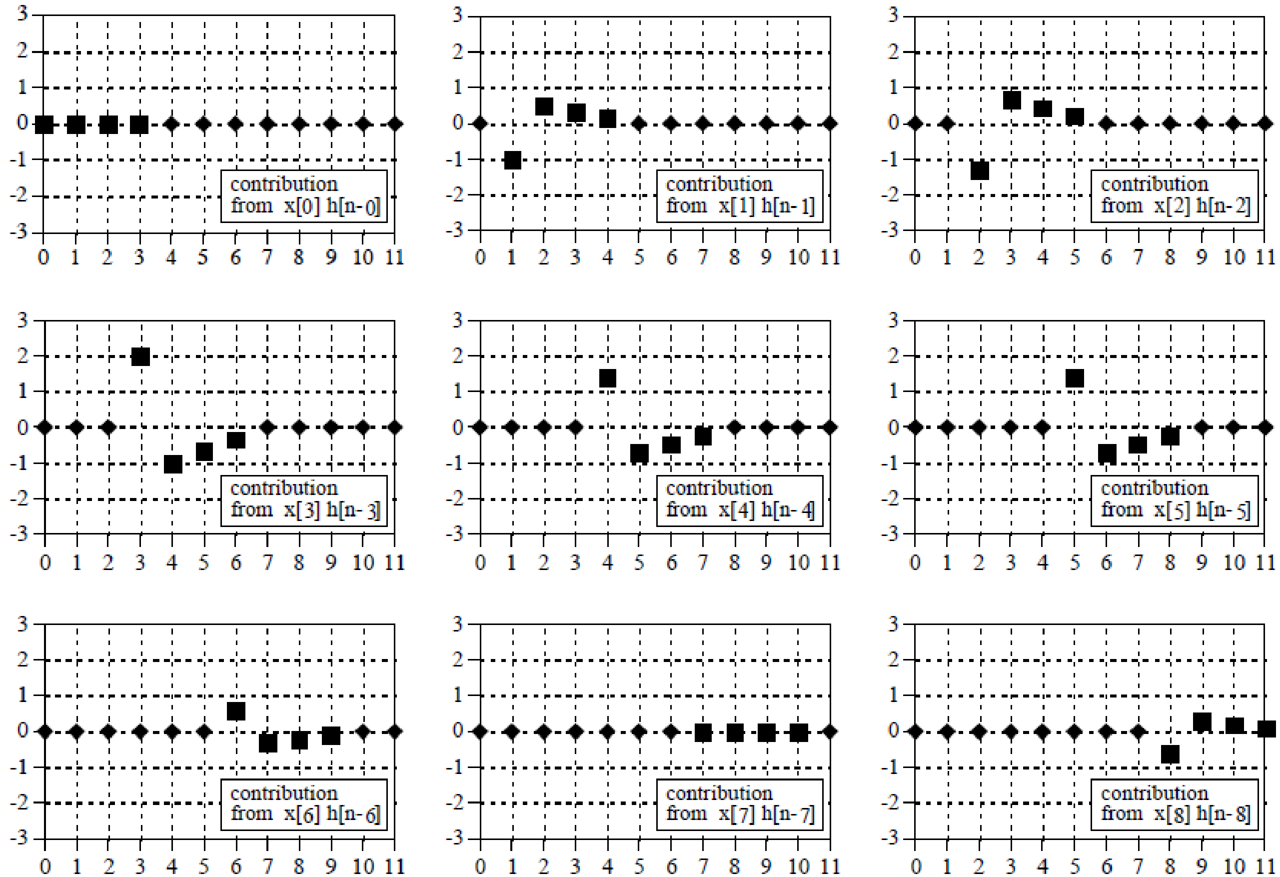
y[n]

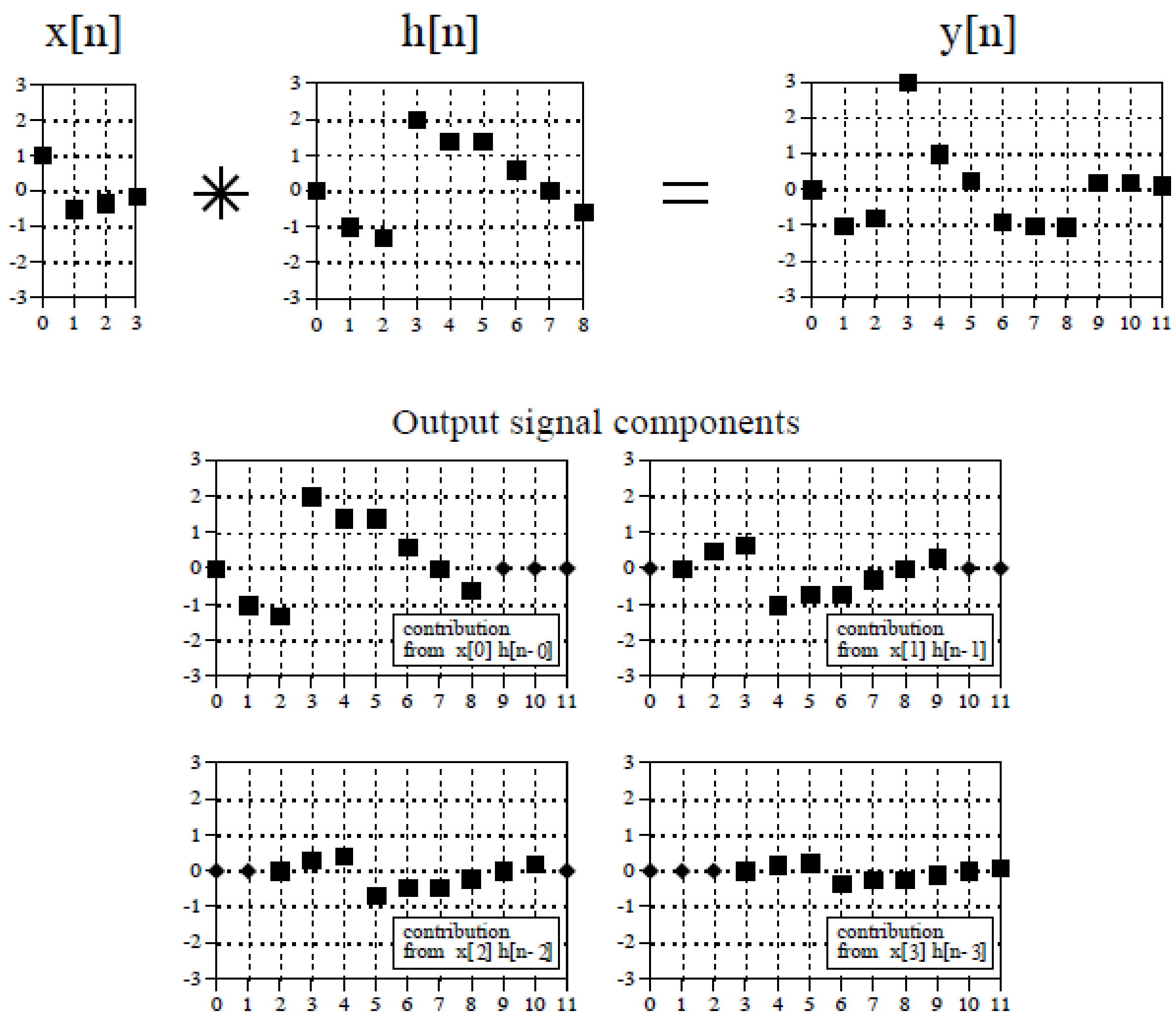


9+4-1 = 12 pontos



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$





A convolução é comutativa $a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$

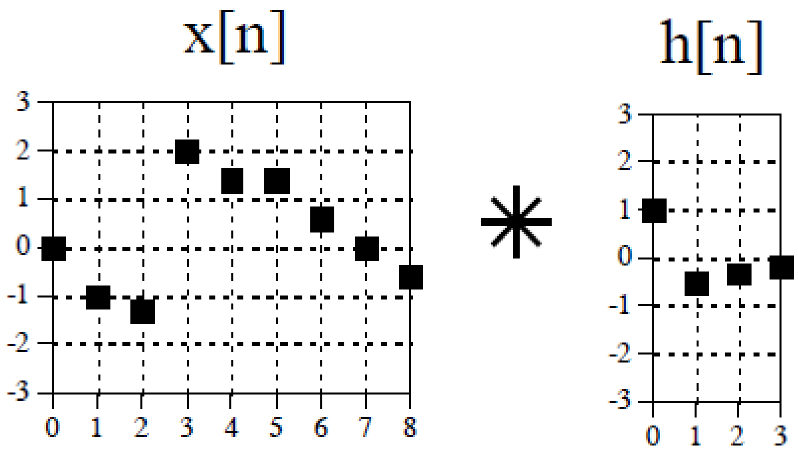
Calculando a convolução

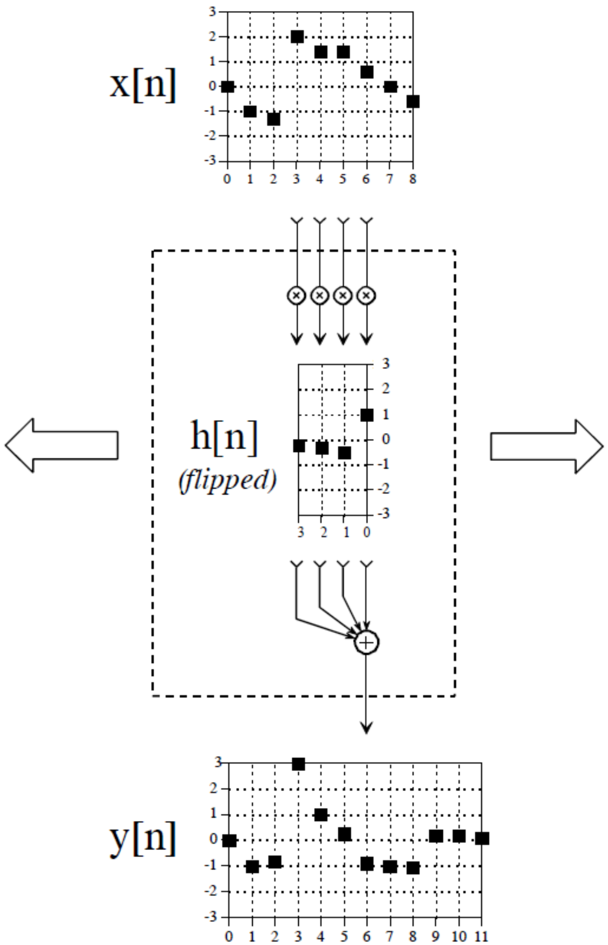
- O método discutido analisou como cada ponto no sinal de entrada afetou o sinal de saída como um todo.
- Contudo, podemos analisar como cada ponto no sinal de saída é afetado pelo sinal de entrada.
- Para isso é preciso saber como cada ponto de saída é calculado de maneira independente dos demais.

n = 6

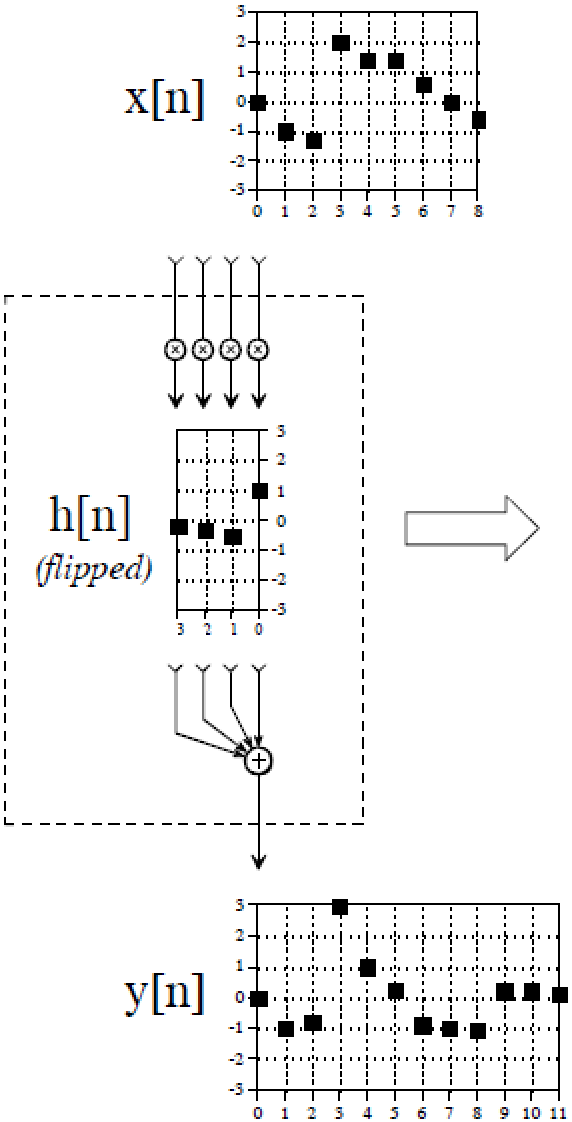
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\boldsymbol{y[6] = x[3]h[3] + x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0]}$$

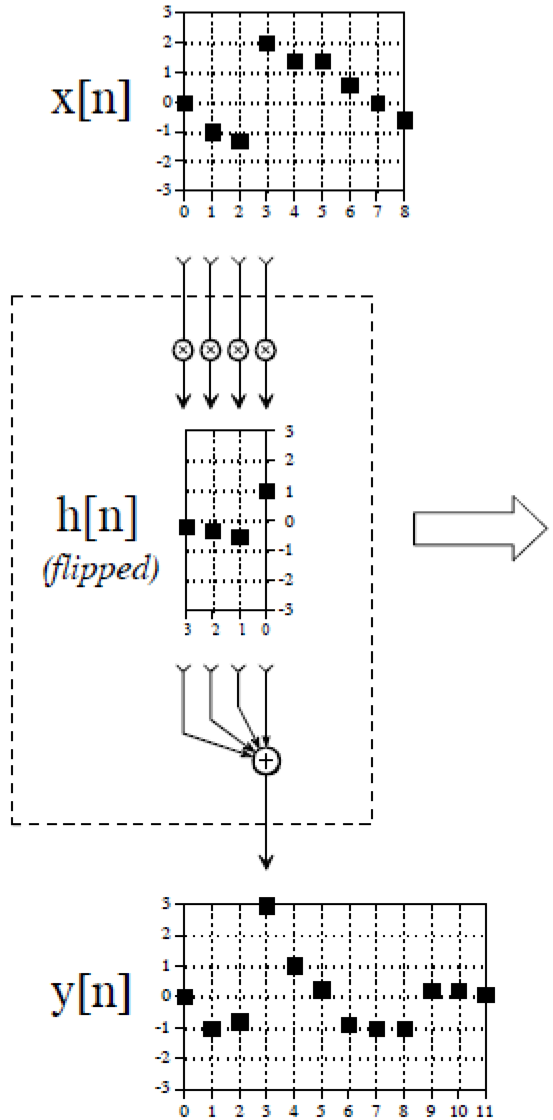




A resposta ao impulso é invertida no tempo

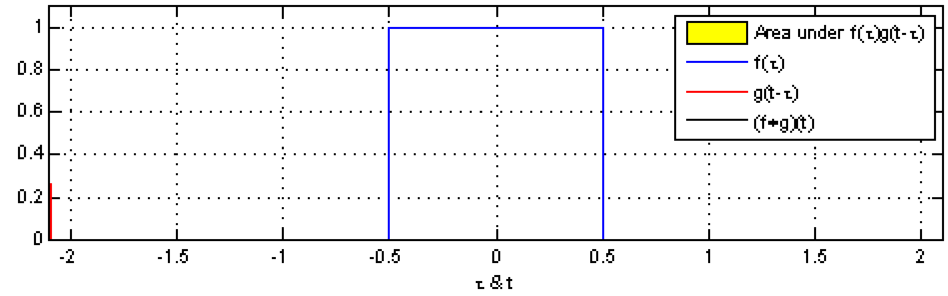


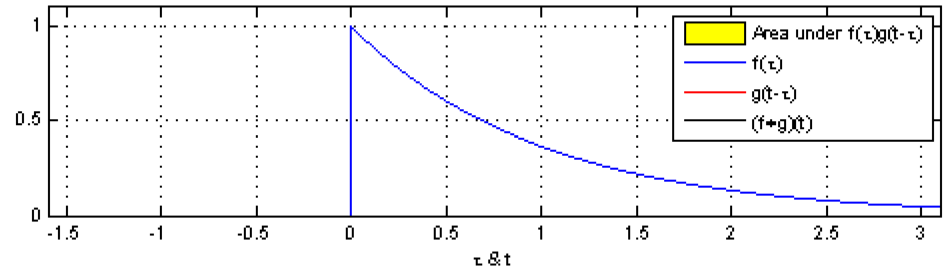
a. Set to calculate y[0]



b. Set to calculate y[3]

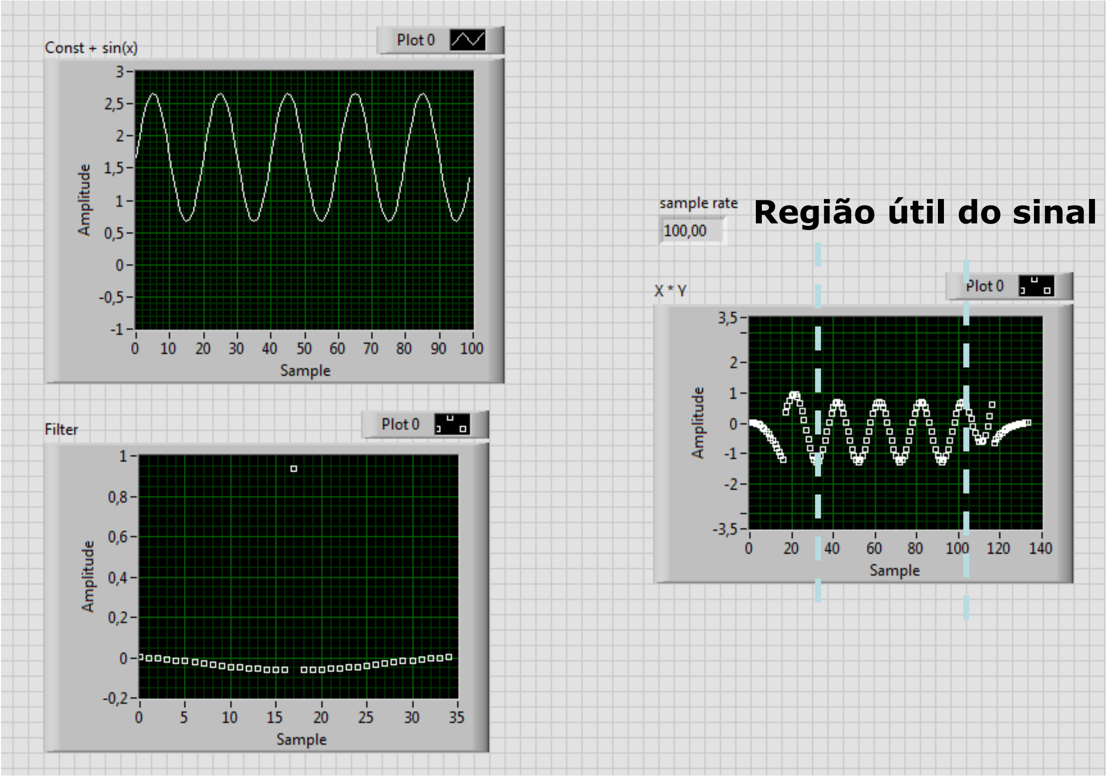
Convolução


Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f∗g)(t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
τ & t


Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f∗g)(t)
1
0.5
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
τ & t

Convolução

Filtro passa altas para remover a componente DC do sinal



As regiões mais a esquerda e mais a direita no sinal de saída não carregam toda a informação da resposta ao impulso do sistema

Resumindo...

Um sistema LIT pode ser completamente descrito por sua resposta ao impulso.

Essa foi a base para descrever o **1º algoritmo**. Cada ponto no **sinal de entrada** contribui com o sinal de saída com uma **versão escalonada e deslocada da resposta ao impulso**.

A resposta ao impulso também pode ser observada como coeficientes de ponderação. Assim, **cada ponto no sinal de saída é uma soma de entradas ponderadas**, ou seja um ponto da saída é influenciada por uma região da entrada.

Essa foi a base para o **2º algoritmo,** na qual uma **região do sinal de entrada é multiplicada pela resposta ao impulso invertida no tempo**.

Exemplos de operações

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

Convolução sobre a função delta é a própria função

$$x[n] * k\delta[n] = kx[n]$$

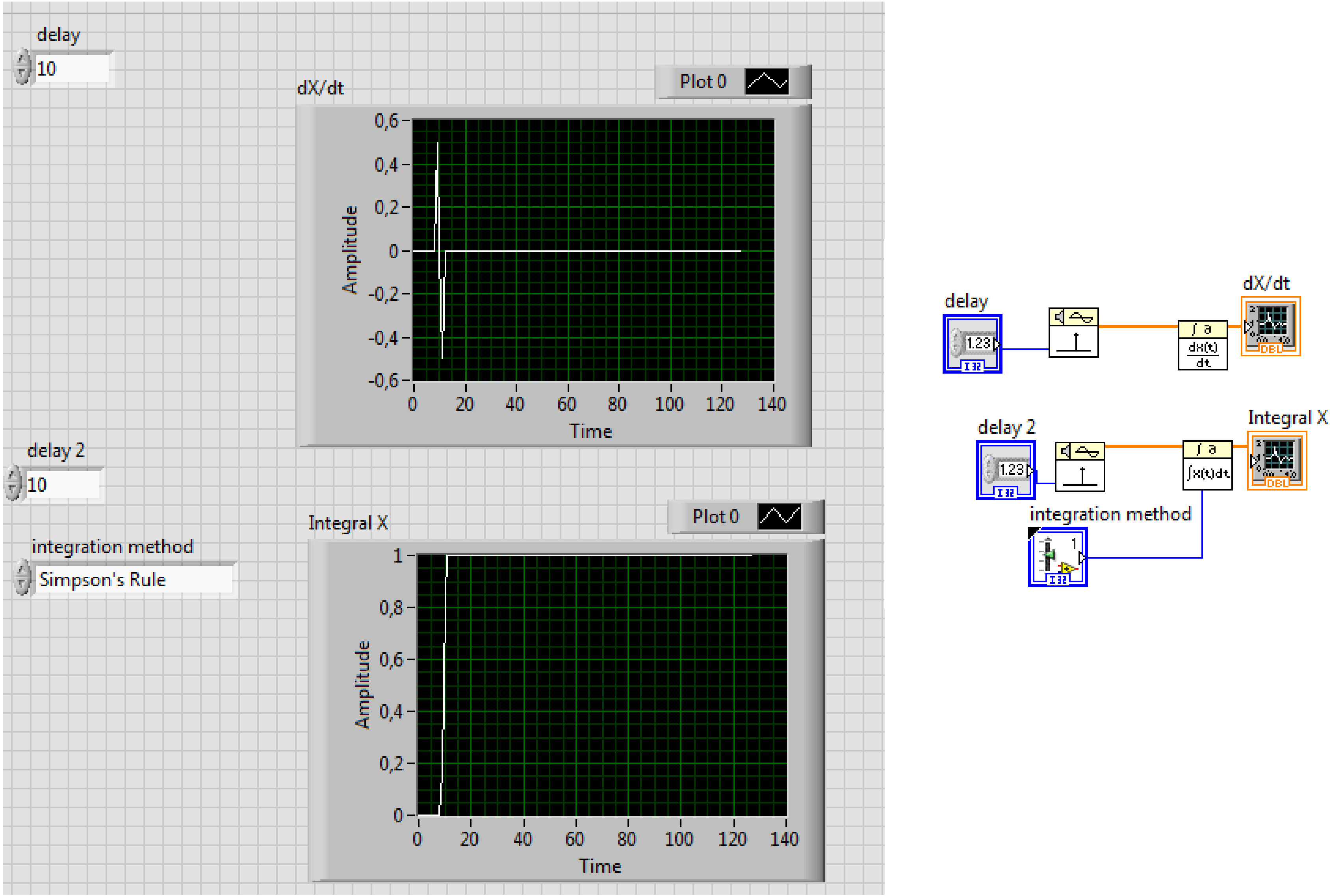
Amplificador ou atenuador

$$x[n] * \delta[n+s] = x[n+s]$$

Avanço ou atraso no sinal

Operações matemáticas

- Diferencial
  - Um ponto no sinal de saída (primeira diferença) é igual à diferença entre pontos adjacentes no sinal de entrada, ou seja a saída é a inclinação do sinal de entrada.
- Integral
  - Cada ponto no sinal de saída é igual à soma de todos os pontos a esquerda do sinal de entrada. Soma acumulada.


delay
10
dX/dt
Plot 0
Amplitude
Time
delay 2
10
integration method
Simpson's Rule
Integral X
Plot 0
Amplitude
Time
delay
dX/dt
delay 2
Integral X
integration method

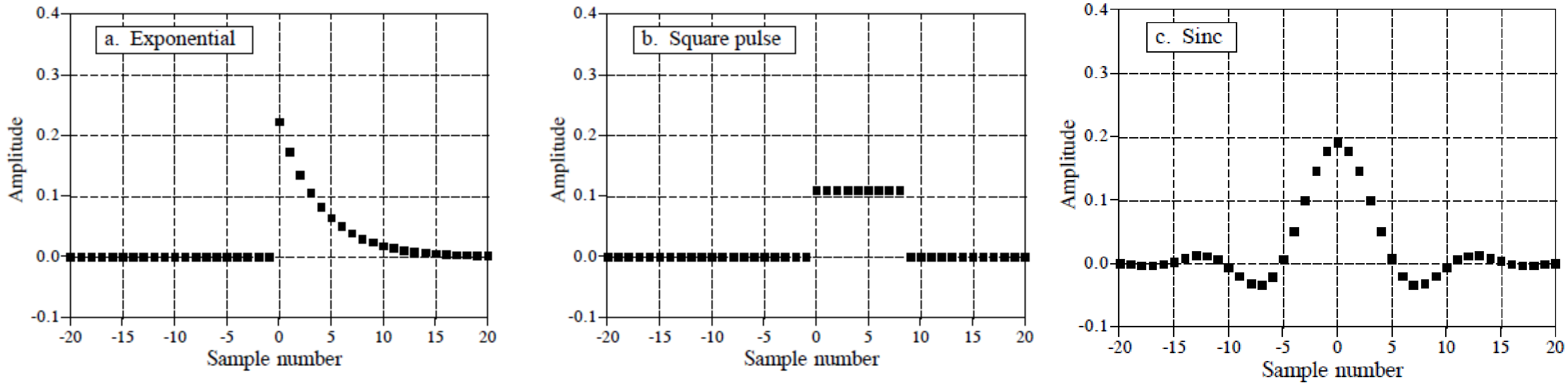
Filtros

- Discutiremos mais sobre os filtros em próximas aulas.

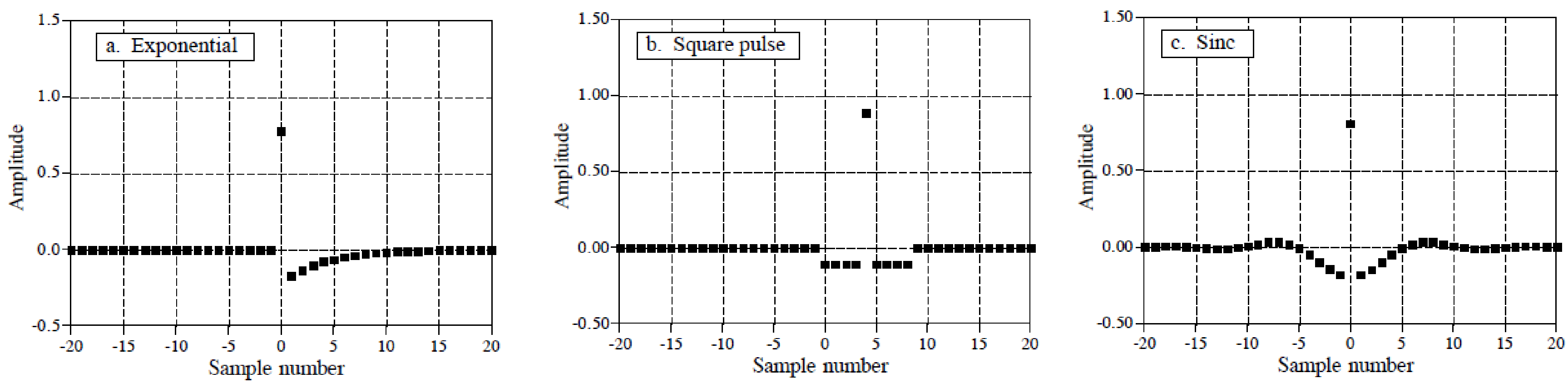
- **Filtro passa-baixas**, em geral, é composto de pontos positivos adjacentes. Isso resulta que em uma média ponderada de pontos vizinhos do sinal de entrada. Esse procedimento suaviza o sinal.

- **Filtro passa-altas:** todas menos as baixas frequências, ou seja, função delta menos a função correspondente ao passa-baixas.

Janelas aplicáveis a filtros passa-baixas

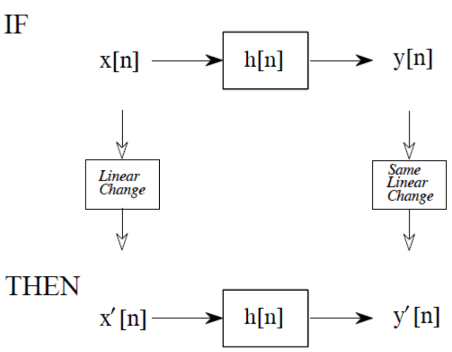


Janelas aplicáveis a filtros passa-altas



Propriedades da convolução

- Comutativa $a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$
- Associativa $(a[n] * b[n]) * c[n] = a[n] * (b[n] * c[n])$
- Distributiva $a[n] * b[n] + a[n] * c[n] = a[n] * (b[n] + c[n])$
- Transferência entre entrada e saída



Correlação

- É um operação similar à convolução.

$$R_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n+k]$$

- Essa operação aplicada a dois sinais para produzir um terceiro é chamada de **correlação cruzada**.

- Se o sinal é correlacionado com ele próprio denomina-se **autocorrelação**.

Correlação cruzada

- A amplitude de cada ponto no sinal da correlação cruzada é uma medida de similaridade entre os entre os sinais de entrada nesse ponto.

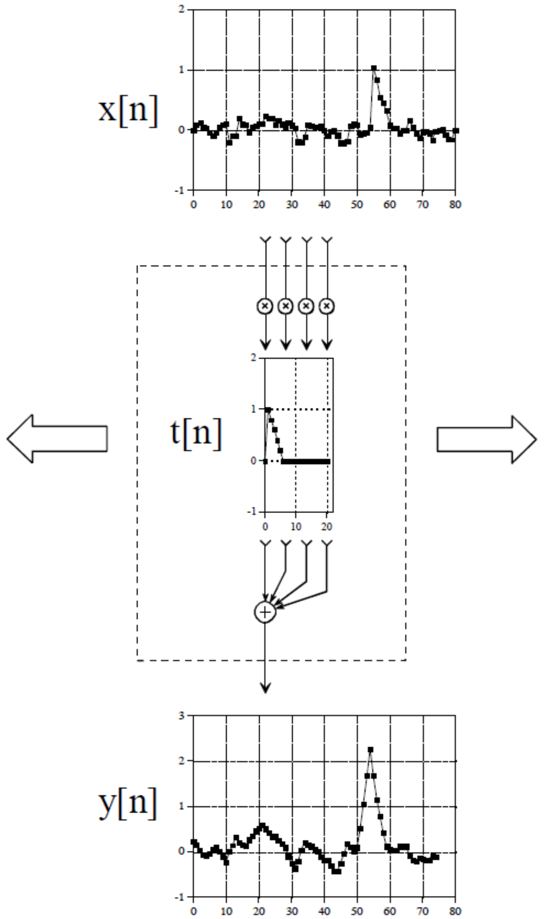
- A correlação é uma ótima técnica para detectar um sinal conhecido, mesmo com a presença de ruído.

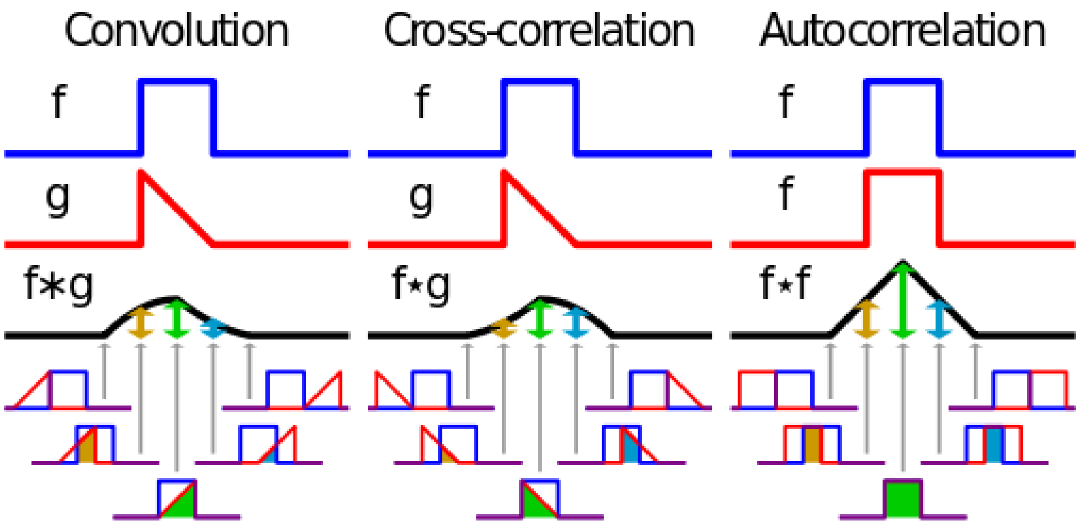
Convolução Vs. Correlação

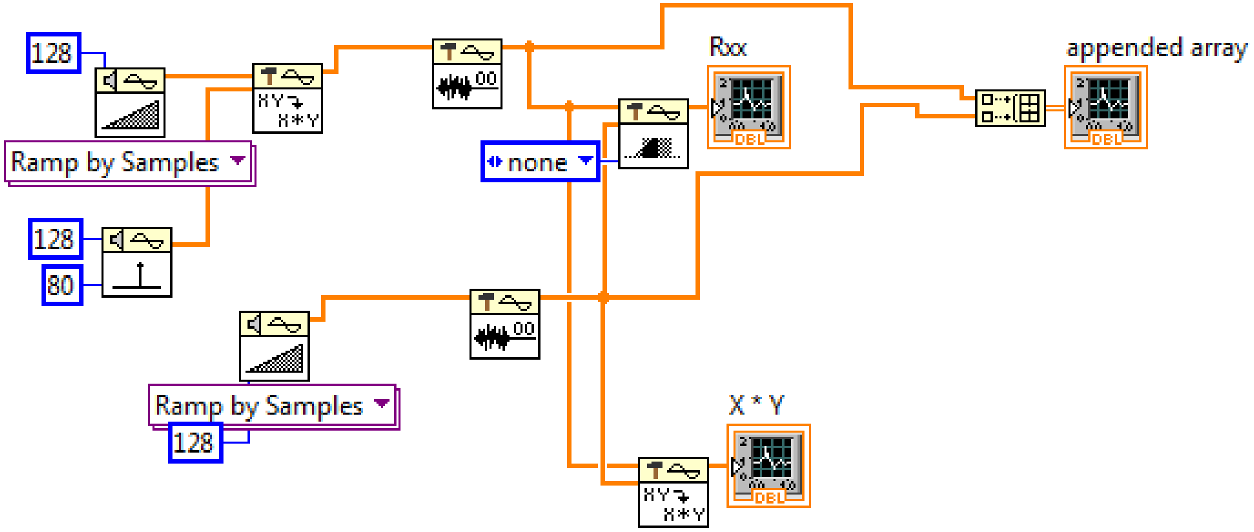
- Apesar da semelhança matemática, a convolução e a correlação são operações com significados distintos.

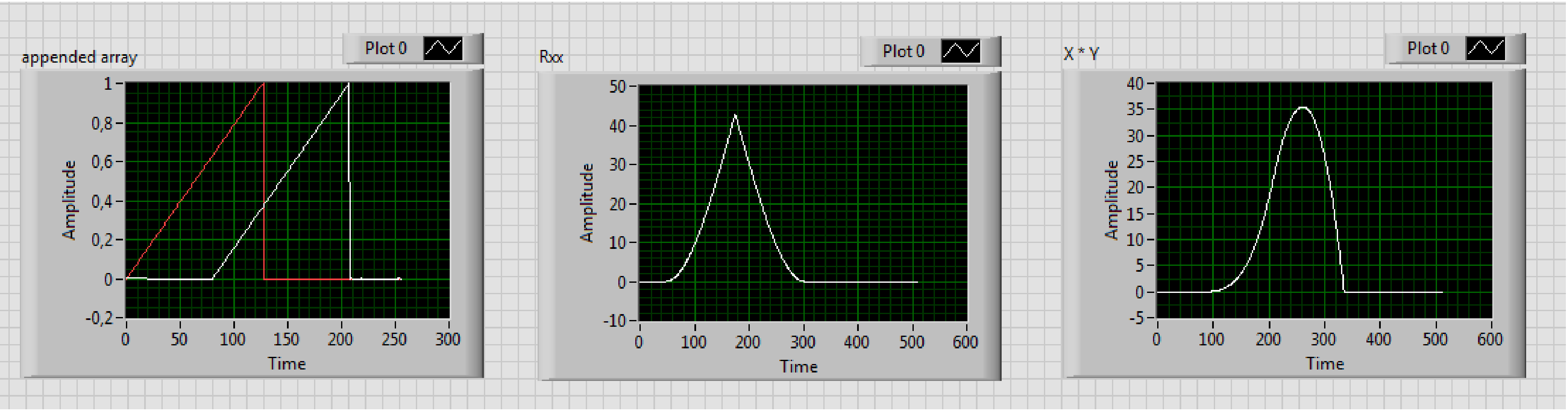
Convolução	**$y[n] = x[n] * h[n]$** Relação entre o sinal de entrada ao sistema, o sinal de saída e a resposta ao impulso do sistema.

Correlação	**$y[n] = x[n] * h[-n]$** Ferramenta para avaliar a similaridade entre sinais. Muito aplicada na detecção de uma forma de onda conhecida imersa em ruído.


x[n]
t[n]
y[n]


Convolution
Cross-correlation
Autocorrelation
f
g
f∗g
f
g
f⋆g
f
f
f⋆f


128
Ramp by Samples
128
80
Ramp by Samples
128
none
Rxx
appended array
X * Y


appended array
Plot 0
Amplitude
Time
Rxx
Plot 0
Amplitude
Time
X * Y
Plot 0
Amplitude
Time

Bibliografia

- Smith, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Signal Processing (http://www.dspguide.com/)
- A. V. OPPENHEIM; A. S. Willsky. Sinais e Sistemas, 2ª ed., 2010.
- OPPENHEIM; R. W. SCHAFER & J. R. BUCK. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 2ª ed., 1999.
- Carlos Alexandre Melo, Processamento de sinais, http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS.pdf