Vorticidade

1)Equação de Transporte da Vorticidade

A equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível pode ser escrita:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} \qquad (1.1)$$

Podemos aplicar a equação de Lagrange da aceleração:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{u}.\vec{u}}{2}\right) + \vec{\omega} \times \vec{u} \qquad (1.2)$$

Lembrando que a aceleração da gravidade pode ser escrita na forma de um gradiente de um potencial:

$$\vec{g} = \nabla(-g\,z) \tag{1.3}$$

Para um escoamento incompressível, a equação (1.1) resulta:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \vec{\omega} \times \vec{u} = \nu\,\nabla^2 \vec{u} \tag{1.4}$$

Se fizermos o rotacional da equação (1.4):

$$\frac{\partial(\nabla\times\vec{u})}{\partial t}+\underbrace{\left[\nabla\times\nabla\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)\right]}_{0}+\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})=\nu\nabla^2(\nabla\times\vec{u}) \qquad (1.5)$$

O rotacional do gradiente de um escalar é nulo, e temos que $\nabla\times\vec{u}=\vec{\omega}$. Para o termo $\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})$, podemos aplicar a seguinte propriedade, verificável através de análise tensorial:

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\nabla.\vec{b})-(\vec{a}.\nabla)\vec{b}+(\vec{b}.\nabla)\vec{a}-\vec{b}(\nabla.\vec{a}) \qquad (1.6)$$

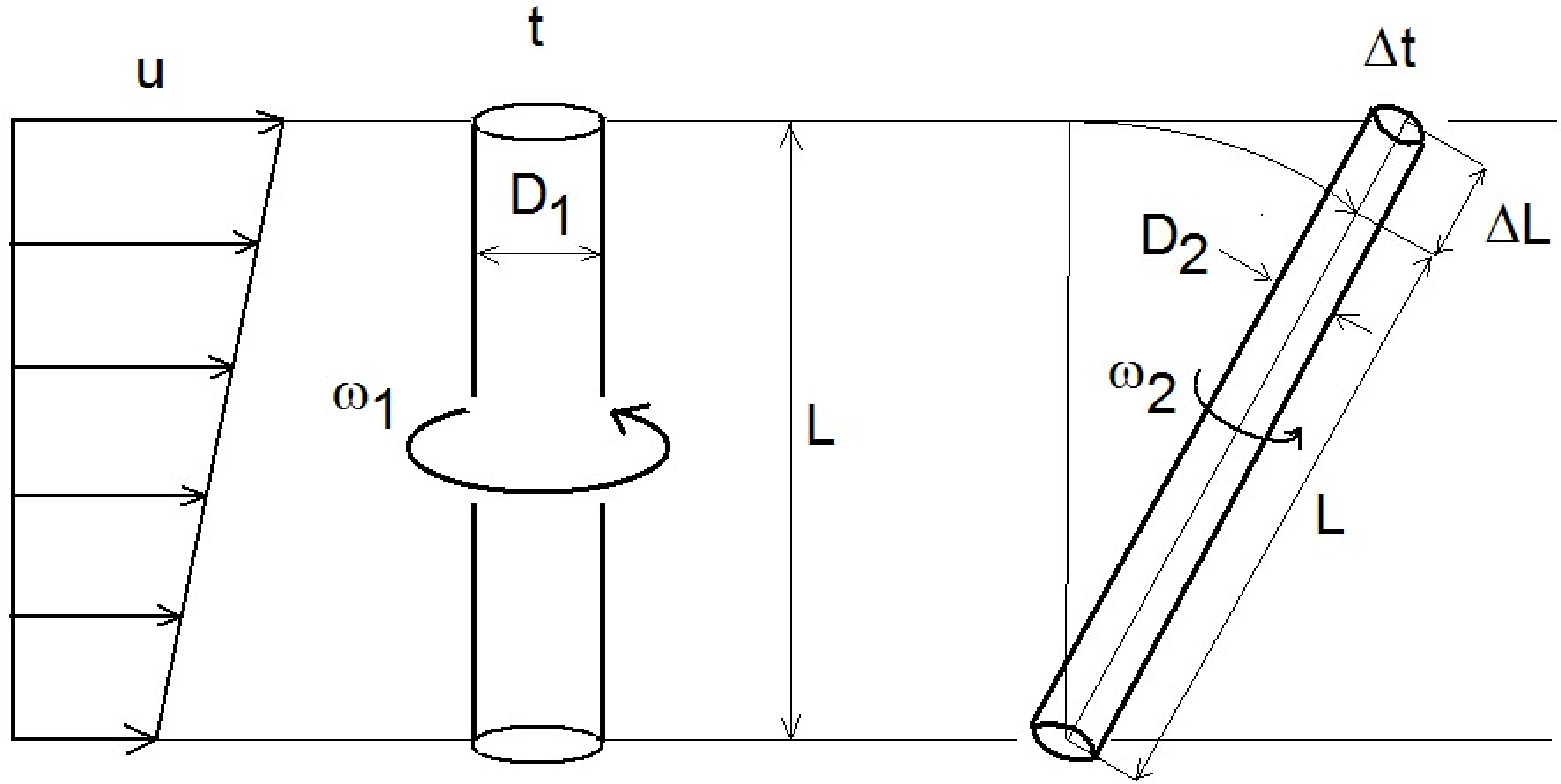
Resulta:

$$\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})=\vec{\omega}(\nabla.\vec{u})-(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}+(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}-\vec{u}(\nabla.\vec{\omega}) \qquad (1.7)$$

Temos que $\nabla.\vec{\omega}=\nabla.(\nabla\times\vec{u})=0$ (o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo), e para um escoamento incompressível, $\nabla.\vec{u}=0$. Logo, a equação de Navier-Stokes fica:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}=(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}+\nu\nabla^2\vec{\omega}} \qquad (1.8)$$

Essa é a equação de transporte da vorticidade. O termo $(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}$ é o chamado termo de estiramento de vórtices (*vortex stretching*), e corresponde a uma fonte de vorticidade que ocorre quando um vórtice é estirado pelos gradientes de velocidade.



Na figura, temos um trecho de um vórtice sendo estirado pelo gradiente de velocidade, entre os instantes t e $t+\Delta t$.

Como o vórtice é um filamento material, por conservação do volume o estiramento ΔL vai estar relacionado com uma diminuição de diâmetro, assim $D_2<D_1$. Mas, por conservação de momento angular, a vorticidade (que está relacionada com uma velocidade de rotação) vai aumentar, de modo que $\omega_2>\omega_1$. Note que, pela figura, não só a vorticidade aumenta, mas ocorre um efeito de distribuição entre as componentes, pois um vórtice que tinha seu eixo transversal à direção da velocidade passou a ter componente na própria direção da velocidade.

Também é interessante notar que, para problemas bidimensionais, o termo de estiramento de vórtice é nulo:

$$(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}=\left(\omega_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(u\vec{i}+\upsilon\vec{j}\right)=0 \qquad (1.9)$$

Isto significa que métodos que implicam em simulação direta da turbulência (*Direct Numerical Simulation* ou DNS) ou métodos que resolvem pelo menos as maiores estruturas turbulentas (*Large Eddy Simulation* ou LES) necessariamente devem ser utilizados com simulações tridimensionais, pois escoamentos turbulentos são altamente tridimensionais e o fenômeno de estiramento de vórtices é fundamental na compreensão do fenômeno de cascata de energia pelo qual a energia cinética é transferida entre as várias escalas de vórtices turbulentos.

Para um escoamento bidimensional:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \qquad (1.10)$$

Muitos métodos de resolução de escoamentos bidimensionais acoplam a solução da equação (1.10) com a solução de uma equação de Poisson para a função de corrente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \qquad (1.11)$$

Que permite a obtenção das velocidades através de:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \; \upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (1.12)$$