Mecânica Quântica I - 4302403

5ª lista

1) a) Usando as relações :

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\text{cot}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

mostre que

$$L_+L_- = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \text{cot}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \text{cot}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\right].$$

b) A partir do resultado acima, e sabendo que $L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$, mostre que

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

2) Sabendo que

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\text{cot}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\ L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\ \text{ e } L_\pm|l\ m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l\ m\pm 1\rangle,$$

mostre que as seguintes auto-funções normalizadas de L^2 e L_z são:
a) $|0\ 0\rangle = Y_0^0(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$

$$\text{b) } |1\ \pm 1\rangle = Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\ e^{\pm i\phi}$$

$$\text{c) } |1\ 0\rangle = Y_1^0(\theta,\phi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta$$

3) Considere uma partícula representada pela função de onda

$$\psi(x,y,z) = A(x+y+2z)e^{-\alpha r},$$

onde A e α são constantes.
a) Qual o momento angular total da partícula?
b) Numa medida de L_z, quais valores podemos obter e quais probabilidades?

4) A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esféricamente simétrico é

$$\psi(x,y,z) = (x+y+3z)f(r).$$

a) $\psi(x,y,z)$ é auto-função de L^2 e de L_z? Se sim, quais os auto-valores?
b) Essa função pode ser auto-função de H?

5) (Q9 EUF 2014) Uma partícula quântica de massa m está sujeita a um potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2).$$

a) Obtenha os níveis de energia dessa partícula. Isto é, determine os autovalores de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi.$$

b) Considere o estado fundamental e os dois primeiros níveis excitados. Monte uma tabela mostrando para cada um desses três níveis, o valor da energia, a degenerescência e os respectivos estados em termos dos números quânticos.
c) Utilizando

$$\nabla^2\psi = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\psi\right]$$

e lembrando que $L^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$, escreva a equação diferencial do ítem (a) para a parte radial da função de onda (não é preciso resolvê-la). Identifique nessa equação o potencial efetivo $V_{ef}(r)$.
d) Resolva a equação diferencial do ítem anterior para o caso em que $l = 0$ e determine o autovalor correspondente. Para isso admita uma solução do tipo $e^{-\alpha r^2}$ e determine α.

6) Sabendo que os harmônicos esféricos são dados por:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \epsilon\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}e^{im\phi}\; P_l^m(\cos\theta)$$

com $\epsilon = (-1)^m$ para $m \geq 0$ e $m = 1$ para $m < 0$, e

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{2^l\; l!}(1-x^2)^{|m|/2}\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(1-x^2)^l$$

calcule Y_0^0, $Y_1^{\pm 1}$ e Y_1^0 e compare com os resultados do exercício 2).

7) A partir da equação diferencial para os harmônicos esféricos:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + l(l+1)\right]Y_l^m(\theta,\phi) = 0$$

mostre as relações
a) $\int_0^\pi d\theta \sin\theta (Y_l^m)^* Y_{l'}^m = 0$ para $l \neq l'$
b) $\int_0^{2\pi} d\phi (Y_l^m)^* Y_l^{m'} = 0$ para $m \neq m'$
c) ou seja, mostre que se os harmônicos esféricos são normalizados, então

$$\int d\Omega\; (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

8) a) Certifique-se de que $u(r) = Arj_1(kr)$ satisfaz a equação radial para $V(r) = 0$:

$$u" - \frac{l(l+1)}{r^2}u + k^2 u = 0$$

quando $l = 1$.
b) Determine graficamente as energias permitidas para o poço esférico infinito quando $l = 1$. Mostre que para grandes valores de n, $E_{n1} \sim (\hbar^2\pi^2/2ma^2)(n+1/2)^2$. Dica: mostre primeiro

que se $j_1(z) = 0$ então $z = \text{tg } z$. Apresente z e tg z no mesmo gráfico e determine os pontos de interceção .

9) Uma partícula de massa m é colocada num poço esférico finito:

$$V(r)) = \begin{cases} -V_0, & se \quad r \leq a \\ 0 & se \quad r > a \end{cases} .$$

Calcule o estado fundamental resolvendo a equação radial com $l = 0$. Demonstre que não há nenhum estado ligado se $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2 / 8m$.