CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

RENATO MAIA MATARAZZO ORSINO

Proposição. *Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ dois vetores não paralelos tais que:*

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\,|) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{s}\,|) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r} - \vec{s}\,|) = 0$$

Pode-se afirmar que:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{s}\cdot\vec{s}) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{s}\,) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\wedge\vec{s}\,|) = 0 \tag{2}$$

Considere escalares a, b e c tais que $\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}b}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}c}{\mathsf{d}t} = 0$ e defina $\vec{p} = a\,\vec{r} + b\,\vec{s} + c\,\vec{r}\wedge\vec{s}$. Pode-se afirmar ainda que:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{p}\,|) = 0 \tag{3}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\,|^2) = 2|\vec{r}\,|\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\,|) = 0$$

Demonstra-se analogamente que $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{s}\cdot\vec{s}\,) = 0$ e que $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}[(\vec{r}-\vec{s}\,)\cdot(\vec{r}-\vec{s}\,)] = 0$. Assim:

$$0 = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}[(\vec{r}-\vec{s}\,)\cdot(\vec{r}-\vec{s}\,)] = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,) - 2\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{s}\,) + \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{s}\cdot\vec{s}\,) = -2\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{s}\,)$$

o que conclui a demonstração de (1). Denotando por θ o menor ângulo entre as direções dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, nota-se que:

$$0 = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{s}\,) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\,||\vec{s}\,|\cos\theta) = -|\vec{r}\,||\vec{s}\,|\sin\theta\,\frac{\mathsf{d}\theta}{\mathsf{d}t}$$

Do não-paralelismo entre $\vec{r}$ e $\vec{s}$ conclui-se que $\sin\theta \neq 0$ e, portanto, $\frac{\mathsf{d}\theta}{\mathsf{d}t} = 0$. Assim:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\wedge\vec{s}\,|) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{r}\,||\vec{s}\,|\sin\theta) = |\vec{r}\,||\vec{s}\,|\cos\theta\,\frac{\mathsf{d}\theta}{\mathsf{d}t} = 0$$

o que demonstra (2). Ainda, sendo $\vec{p} = a\,\vec{r} + b\,\vec{s} + c\,\vec{r}\wedge\vec{s}$:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{p}\cdot\vec{p}\,) = a^2\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,) + 2ab\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{s}\,) + b^2\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\vec{s}\cdot\vec{s}\,) + c^2\,\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}[(\vec{r}\wedge\vec{s}\,)\cdot(\vec{r}\wedge\vec{s}\,)] = 0$$

Date: September 4, 2018.

o que conclui a demonstração de (3).

Note finalmente que se $\vec{p} = a\,\vec{r} + b\,\vec{s} + c\,\vec{r} \wedge \vec{s}$ e $\vec{q} = x\,\vec{r} + y\,\vec{s} + z\,\vec{r} \wedge \vec{s}$ são vetores não-paralelos com $\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}b}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}c}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t} = \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}t} = 0$, então, de acordo com (3):

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{p}\,|) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{q}\,|) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(|\vec{p} - \vec{q}\,|) = 0$$

Dessa forma, $\vec{p}$ e $\vec{q}$ são dois de vetores não-paralelos que satisfazem as mesmas hipóteses fundamentais que o par de vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, podendo substituí-los no enunciado desta proposição. □

Sejam A, B e C três pontos *não-colineares* de um mesmo corpo rígido. Da hipótese fundamental de corpo rígido:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big(|B - A|\big) = 0 \qquad \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big(|C - A|\big) = 0 \qquad \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big(|C - B|\big) = 0$$

Propriedade P1. *A velocidade relativa entre dois pontos de um corpo rígido é ortogonal à linha que os une.*

De fato, da Eq. (1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(B - A)\big] \cdot (B - A) = (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = 0 \\
&\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - A)\big] \cdot (C - A) = (\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (C - A) = 0 \\
&\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - B)\big] \cdot (C - B) = (\vec{v}_C - \vec{v}_B) \cdot (C - B) = 0
\end{aligned}$$

Propriedade P2. *O movimento de corpo rígido preserva ângulos.*

De fato:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - B) \cdot (C - B)\big] = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big\{[(C - A) - (B - A)] \cdot [(C - A) - (B - A)]\big\} \\
&= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - A) \cdot (C - A)\big] - 2\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - A) \cdot (B - A)\big] + \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(B - A) \cdot (B - A)\big]
\end{aligned}$$

Assim, da hipótese fundamental, é possível concluir que:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - A) \cdot (B - A)\big] = |C - A||B - A|\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[\cos(C\hat{A}B)\big] = 0$$

Note ainda que esta relação pode ser reescrita nas seguintes formas:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(C - A)\big] \cdot (B - A) + (C - A) \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\big[(B - A)\big] = 0 \\
&(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = -(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (C - A)
\end{aligned}$$

Teorema. *Sejam conhecidas as velocidades $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_C$ em um dado instante de tempo. Será demonstrada a existência de um vetor $\vec{\omega}$ tal que, para* qualquer *par de pontos P e Q pertencentes a este corpo, a seguinte relação instantânea é válida:*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

Demonstração. Primeiramente, consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$

Deve-se buscar um vetor $\vec{\omega}$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{0} \\ \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{0} \end{cases}$$

Assim, ou $\vec{\omega} = \vec{0}$ ou $\vec{\omega}$ deve ser paralelo tanto a $(B - A)$ quanto a $(C - A)$. Este segundo cenário é impossível, uma vez que implicaria no paralelismo entre $(B - A)$ e $(C - A)$ e, portanto, na colinearidade dos pontos A, B e C. Logo, neste caso, $\vec{\omega} = \vec{0}$.

Caso 2. $\vec{v}_A = \vec{v}_B \neq \vec{v}_C$

Deve-se buscar um vetor $\vec{\omega}$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{0} \\ \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{v}_C - \vec{v}_A \end{cases}$$

Da primeira equação, sabe-se que existe um escalar λ tal que $\vec{\omega} = \lambda(B - A)$. Da segunda:

$$\lambda(B - A) \wedge (C - A) = \vec{v}_C - \vec{v}_A$$

Por hipótese, $(B - A)$ e $(C - A)$ são não-paralelos, logo $(B - A) \wedge (C - A) \neq \vec{0}$. Ainda, neste caso, $\vec{v}_A \neq \vec{v}_C$. Assim:

$$\lambda = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(B - A) \wedge (C - A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}$$

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(B - A) \wedge (C - A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}(B - A)$$

Caso 3. $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B \neq \vec{v}_C$ e $(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = 0$

Deve-se buscar um vetor $\vec{\omega}$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{v}_B - \vec{v}_A \\ \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{v}_C - \vec{v}_A \end{cases}$$

Da hipótese fundamental, $(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (C - A) = 0$ e, neste caso, $(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = 0$. Assim $(\vec{v}_C - \vec{v}_A)$ é ortogonal a $(B - A)$ e a $(C - A)$, ou seja, existe um escalar λ tal que:

$$\vec{v}_C - \vec{v}_A = \lambda(B - A) \wedge (C - A) \qquad \Rightarrow \qquad [\vec{\omega} - \lambda(B - A)] \wedge (C - A) = \vec{0}$$

Pode-se afirmar, portanto, que existe um escalar μ tal que:

$$\vec{\omega} = \lambda(B - A) + \mu(C - A)$$

Como $(B - A) \wedge (C - A) \neq \vec{0}$ e, neste caso, $\vec{v}_A \neq \vec{v}_C$, então:

$$\lambda = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(B - A) \wedge (C - A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}$$

Ainda:

$$\vec{\omega} \wedge (B - A) = \mu(C - A) \wedge (B - A) = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Considerando que $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$, então:

$$\mu = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)}{(C - A) \wedge (B - A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)}$$

Portanto:

$$\vec{\omega} = \frac{\big[(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)\big](B - A)}{(B - A) \wedge (C - A) \cdot (\vec{v}_C - \vec{v}_A)} + \frac{\big[(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)\big](C - A)}{(C - A) \wedge (B - A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)}$$

Caso 4. $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B \neq \vec{v}_C$ e $(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (B - A) \neq 0$

Deve-se buscar um vetor $\vec{\omega}$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{v}_B - \vec{v}_A \\ \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{v}_C - \vec{v}_A \end{cases}$$

Considere a identidade vetorial:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c}) = [\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})]\vec{a}$$

Adote $\vec{a} = \vec{\omega}$, $\vec{b} = (B - A)$ e $\vec{c} = (C - A)$, e considere que:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{v}_C - \vec{v}_A$$

Pode-se afirmar, portanto, que:

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \wedge (\vec{v}_C - \vec{v}_A) = [(C - A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)]\vec{\omega}$$

Pela propriedade P2, $(C - A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = -(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot (B - A) \neq 0$. Assim:

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \wedge (\vec{v}_C - \vec{v}_A)}{(C - A) \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)}$$

Sendo A, B e C pontos não-colineares, defina-se a seguinte base ortonormal:

$$\vec{\imath} = \frac{(B - A)}{|B - A|}$$
$$\vec{\jmath} = \frac{(C - A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \vec{\imath}}{|(C - A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \vec{\imath}|}$$
$$\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$$

Considerando a invariância de produtos escalares em um movimento de corpo rígido (propriedade P2), pode-se afirmar que:

$$\dot{\vec{\imath}} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A)}{|B - A|} = \vec{\omega} \wedge \frac{(B - A)}{|B - A|} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}$$
$$\dot{\vec{\jmath}} = \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \dot{\vec{\imath}}}{|(C - A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \vec{\imath}|} = \vec{\omega} \wedge \frac{(C - A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \vec{\imath}}{|(C - A) - (C - A) \cdot \vec{\imath}\ \vec{\imath}|} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}$$
$$\dot{\vec{k}} = \dot{\vec{\imath}} \wedge \vec{\jmath} + \vec{\imath} \wedge \dot{\vec{\jmath}} = (\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}) \wedge \vec{\jmath} + \vec{\imath} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}) = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

Considere um ponto arbitrário P deste corpo rígido. Se $(P - A) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, então:

$$(\vec{v}_P - \vec{v}_A) = x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}} = x\vec{\omega} \wedge \vec{\imath} + y\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} + z\vec{\omega} \wedge \vec{k}$$
$$= \vec{\omega} \wedge (x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}}) = \vec{\omega} \wedge (P - A)$$

Analogamente, para qualquer outro ponto Q deste mesmo corpo rígido:

$$(\vec{v}_Q - \vec{v}_A) = \vec{\omega} \wedge (Q - A)$$

Subtraindo estas últimas duas equações, chega-se à expressão do campo de velocidades neste corpo rígido para o instante considerado:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

□