Métodos numéricos - Lista de exercícios 1

Setembro 2019

Essa lista de exercícios visa auxiliar o estudo dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula, por isso, é composta por questões teóricas e práticas. Para responder algumas questões, é esperado que o estudante pesquise a resposta em alguns livros, artigos, entre outros.

1. Qual a diferença entre problema de valor de contorno e problema de valor inicial?
2. Como as equações diferenciais parciais podem ser classificadas? Exemplifique.
3. Qual a diferença entre condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin?
4. O que é uma condição de Cauchy?
5. Estime o valor da derivada da função $f(x) = \cos(x)$ em $x = 0.3$ utilizando as seguintes aproximações:
   (a) Backward com 2 pontos
   (b) Backward com 3 pontos
   (c) Forward com 2 pontos
   (d) Forward com 3 pontos
   (e) Central com 2 pontos
   (f) Central com 4 pontos

   Compare com a aproximação obtida com a solução exata. Adote: $\Delta x = 0.1$
6. Considere a função $f(x) = \exp(x)\sin(x)$. Como as estimativas de $f'(x)$ e $f''(x)$ em $x = 2$ evoluem em função de Δx para as seguintes aproximações: (i) Central com 2 pontos; (ii) Central com 4 pontos. Compare com a solução exata.
7. Considere a função $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$. Aproxime a primeira derivada da função utilizando diferentes estratégias (*backward, forward, central* de diferentes ordens). Compare a aproximação obtida com a solução exata adotando como medida do erro a média da diferença quadrática entre as derivadas aproximada e exata, i.e.:

$$E = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[f'_{aprox}(x_i) - f'(x_i)\right]^2} \tag{1}$$

   sendo N o número de pontos da discretização adotada.

   Plote os resultados em um gráfico de E vs. Δx para as diferentes estratégias adotadas.

8. Considerando uma discretização com pontos uniformemente espaçados, implemente uma função $[coefs] = derivative(order, npoints, type)$ que retorne os coeficientes da aproximação da primeira ou segunda derivadas de acordo com o número de pontos.

   Especificações: $[coefs] = derivative(order, npoints, type)$

   A variável $order$ pode assumir os valores 1 ou 2, que denotam a primeira e segunda derivada, respectivamente. A variável $npoints$ determina a ordem da aproximação utilizada ($order < npoints$). A variável $type$ pode ter os valores $'B'|'C'|'F'$. A variável $coefs$ é um vetor com os coeficientes da aproximação. Caso os dados de entrada do usuário forem incompatíveis, por exemplo $derivative(2, 1, B)$, a função deve retornar NaN.

   Exemplos:

   $[coefs] = derivative(1, 2,' C')$ retorna $coefs = [1,\ -1]$

   $[coefs] = derivative(1, 2,' B')$ retorna $coefs = [-3/2,\ 2,\ -1/2]$

   Sugestão: visite `http://web.media.mit.edu/~crtaylor/calculator.html`

9. Considere o problema de transferência de calor unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

   sendo $\lambda = 0.01$ a difusividade térmica do sistema, $t \in [0, 30]$ e $x \in [0, 1]$. As condições de contorno são:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0,t} = q(t) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1,t} = 0 \tag{3}$$

   . O fluxo de calor $q(t)$ é descrito como:

$$q(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases} \tag{4}$$

   Resolva o problema com duas abordagens: (i) explícita e (ii) implícita. Comente sobre as aproximações utilizadas para as derivadas e a estratégia utilizada para aplicar as condições de contorno do problema.

   Compare os resultados com a Figura 1 do artigo de Chinesta et. al (2011), disponível em `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01061441/document`

10. Considere o problema de transferência de calor descrito pela equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{5}$$

   com difusividade térmica igual a $\lambda = 0.01$, para $t \in [0, 100]$ e $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Em todo o contorno, a condição é adiabática. A condição inicial do problema é descrita como:

$$T(0, x, y) = 10 \exp[20(x^2 + y^2)]. \tag{6}$$

   Plote as isotérmicas para $t = 0, 25, 50, 75, 100$ utilizando uma solução (i) explícita e (ii) implícita. Comente sobre as aproximações utilizadas para as derivadas e a estratégia utilizada para aplicar as condições de contorno do problema.

11. Defina os conceitos estabilidade, consistência e convergência.

12. O que é a condição de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)?