

# Fluxo de água no solo

Pef-5805

Percolação e adensamento

Programa de pós-graduação em  
Engenharia Civil

# Fluxo unidimensional de água no solo

$$Q = k i A \quad \text{ou} \quad v = k i$$

(Lei de Darcy, 1856)

**Q ... vazão**

**k ... coeficiente de permeabilidade**

**i ... gradiente hidráulico**

**A ... área total da seção transversal de solo**

**v ... velocidade aparente de fluxo**

$$k = K \gamma / \mu$$

**k ... coeficiente de permeabilidade**

**K ... permeabilidade intrínseca do solo**

**$\gamma$  ... peso específico do fluido**

**$\mu$  ... viscosidade dinâmica do fluido**

# Fluxo através do solo

Hipótese:

fluxo não modifica o solo

$$J_i = L_{ii} X_i$$

$J_i$  velocidade de fluxo

$L_{ii}$  coeficiente de condutividade

$X_i$  agente motriz

$$v = -k \frac{\partial H}{\partial z}$$

Lei de Darcy      fluido

$$J = -K_T \frac{\partial T}{\partial z}$$

Lei de Fourier      calor

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Lei de Ohm      eletricidade

$$J = -D_d \frac{\partial c}{\partial z}$$

Lei de Fick      substâncias químicas

Os coeficientes das equações acima são quantidades diretamente mensuráveis.

# Fluxos acoplados

Fluxos simultâneos de tipos diferentes com um único agente motriz.

$$J_i = L_{ij} X_j$$

$L_{ij}$  coeficiente de acoplamento

Exemplo: gradiente hidráulico em água contaminada causa fluxo advectivo.

FLUXO	GRADIENTE			
	Carga hidráulica	Temperatura	Eletricidade	Concentração química
Fluido	Lei de Darcy	Termo-osmose	Eletro-osmose	Osmose química
Calor	Transferência de calor isotérmica	Lei de Fourier	Efeito Peltier	Efeito Dufour
Corrente	Corrente	Termo-eletricidade: efeito de Seebeck	Lei de Ohm	Potenciais de membrana e difusão
Íon	Advecção	Difusão térmica de eletrólito: efeito Soret	Eletro-forese	Lei de Fick

# Lei de Darcy para material anisotrópico

$$\underline{v} = -\underline{k} \underline{\nabla} h$$

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$$

# Gradiente hidráulico

- $dh/dx$  para pequenas distâncias
- $\partial h/\partial x$  fluxo não unidimensional
- operador gradiente (aponta no sentido de  $h$  crescente):

$$\underline{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} \underline{e}_3$$

$$\underline{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x_i} \underline{e}_i$$



# Lei de Darcy para material anisotrópico

$$-v_1 = k_{11} \frac{\partial h}{\partial x_1} + k_{12} \frac{\partial h}{\partial x_2} + k_{13} \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

$$-v_2 = k_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + k_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} + k_{23} \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

$$-v_3 = k_{31} \frac{\partial h}{\partial x_1} + k_{32} \frac{\partial h}{\partial x_2} + k_{33} \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

$$-v_i = k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3$$

# Lei de Darcy para material anisotrópico

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{\nabla}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

**k** tensor das permeabilidades

- Resultados experimentais indicam que  $k_{ij}=k_{ji}$ .
- Com os eixos orientados nas direções principais

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

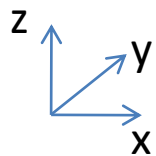
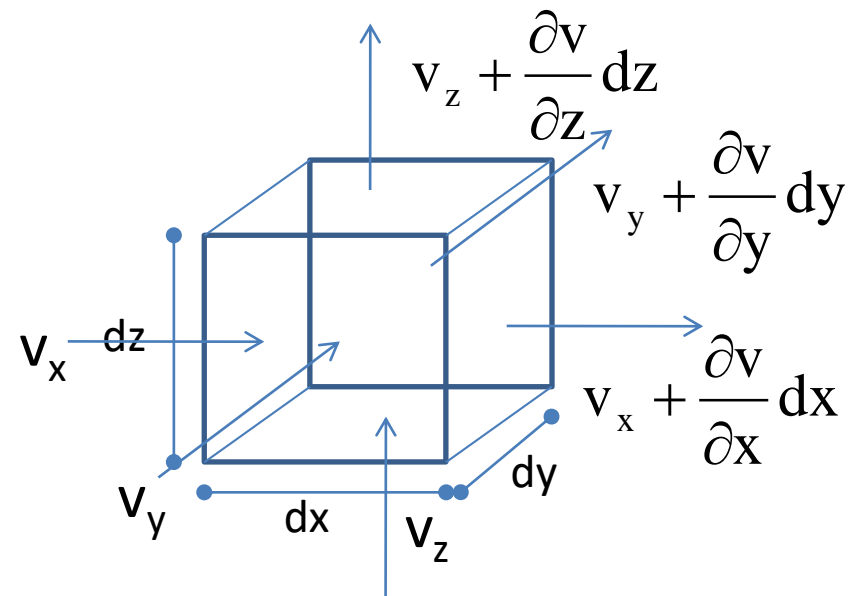
# Lei de Darcy para material isotrópico

$$\underline{k} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = -k \underline{\nabla} h$$

$$-v_1 = k \frac{\partial h}{\partial x_1}; -v_2 = k \frac{\partial h}{\partial x_2}; -v_3 = k \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

# Fluxo permanente e equação da continuidade



$$Q_{\text{saída}} - Q_{\text{entrada}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial v}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial v}{\partial z} dz dx dy = 0$$

$$\frac{\partial \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right)}{\partial z} = 0$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

- Fluxo permanente e equação da continuidade  
Solo anisotrópico

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

- Fluxo permanente e equação da continuidade  
Solo isotrópico

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

- Fluxo permanente e bidimensional, equação da continuidade, solo isotrópico

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Equação de Laplace}$$

# Teorema do divergente – fluxo permanente

$$\int_v \underline{\nabla} \underline{v} dV = \int_A \underline{v} \underline{n} dA$$

Na superfície de área  $A$  do volume de controle  $V$ :

$$\underline{v} = v_n \underline{n} + v_t \underline{t}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = v_n$$

$$\underline{v} \cdot \underline{n} dA = \text{vazão}$$



- Se o fluxo (regime) for permanente, não há variação de volume.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\int_v \underline{\nabla} \underline{v} dV = 0$$

- Se valer a Lei de Darcy e o solo for isotrópico:

$$\int_v \underline{\nabla} (-k \underline{\nabla} h) dV = 0$$

- Se o solo for homogêneo:

$$-k \int_V \nabla (\nabla h) dV = 0$$

$$\int_V \nabla^2 h dV = 0$$

- Como o volume  $V$  escolhido foi arbitrário:

$$\nabla^2 h = 0$$

- Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0$$

- Regime permanente e validade da lei de Darcy:

$$\underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \underline{\nabla} h) = 0$$

- Material anisotrópico e não homogêneo:

$$\underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \underline{\nabla} h) = -\underline{k} \nabla^2 h - \underline{\nabla} \underline{k} \underline{\nabla} h = 0$$

- Material anisotrópico e homogêneo

$$-\underline{k} \nabla^2 h = 0$$

- Material isotrópico e não homogêneo:

$$\underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \underline{\nabla} h) = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = -\underline{k} \nabla^2 h - \underline{\nabla} \underline{k} \underline{\nabla} h = 0$$

- Material isotrópico e homogêneo:

$$-\underline{k} \nabla^2 h = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 h = 0$$

- Utilizando eixos orientados segundo as direções principais:

$$\underline{v} = -k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \underline{e}_1 - k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \underline{e}_2 - k_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} \underline{e}_3$$

- Material anisotrópico mas homogêneo:

$$\underline{\nabla} \underline{v} = -k_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - k_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} - k_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0$$

- Material isotrópico e homogêneo:

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0$$

- Em materiais isotrópicos, a permeabilidade não interessa para saber a distribuição de cargas. Em materiais anisotrópicos, para saber a distribuição de cargas é necessário conhecer a relação entre as permeabilidades nas direções principais.

# Métodos de resolução

- Equação de Laplace: método gráfico, solução analítica para problemas simples.
- Material anisotrópico e homogêneo: mudança de coordenadas e tratar como Laplace.
- Material heterogêneo com heterogeneidades descontínuas: impondo continuidade na fronteira.  
(vazão que chega por um canal de fluxo é igual à que sai pelo outro)  
ou  $k_a / k_b = \tan \alpha_a / \tan \alpha_b$
- Materiais quaisquer: métodos numéricos (elementos finitos e diferenças finitas) e analogia (elétrica, térmica).

# Fluido ideal

- O movimento de um fluido real é muito complexo. Para simplificar sua descrição considera-se o comportamento de um fluido ideal cujas características são:
- Fluido não viscoso (é desprezível o atrito interno no fluido)
- Fluido incompressível (a densidade do fluido permanece constante com o tempo)
- Fluxo estacionário (a velocidade do fluido em um ponto é constante com o tempo)
- Fluxo irrotacional (não apresenta turbilhões, logo, não há momento angular do fluido relativo a qualquer ponto)



# Equação de Bernoulli

- Comportamento de um fluido ideal ao longo de um tubo

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho_w} = \text{constante}$$

$$\frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma_w} = \text{constante}$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{mp}{\rho_w} = \text{constante}$$

*Onde:*

$v$  = velocidade do fluido ao longo do conduto

$g$  = aceleração da gravidade

$h$  = altura com relação a um referencial

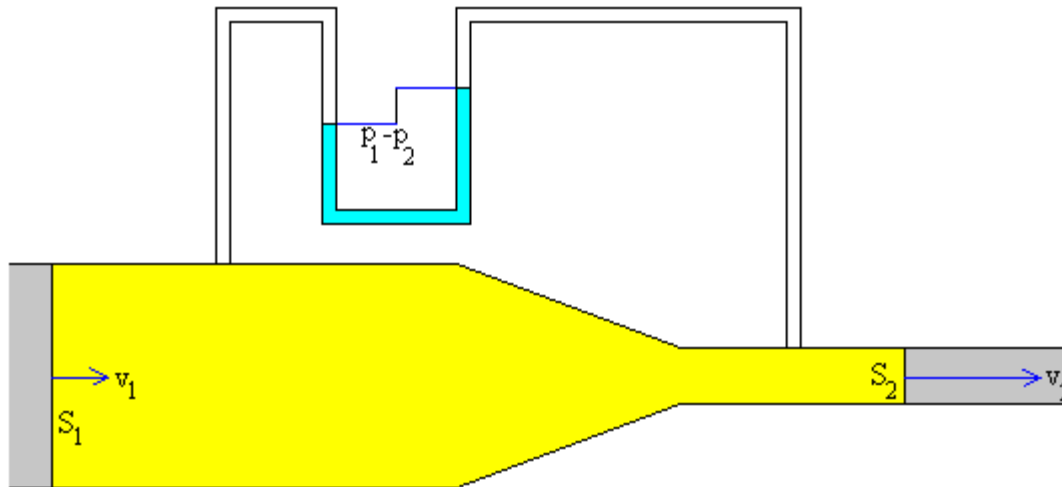
$p$  = pressão ao longo do recipiente

$\rho$  = densidade do fluido

- Se a velocidade de uma partícula de um fluido aumenta enquanto ela escoar ao longo de uma linha de corrente, a pressão do fluido deve diminuir e vice-versa.
- A equação de Bernoulli relaciona variação de pressão, variação de altura e variação de velocidade em um fluido incompressível num escoamento estacionário. Ela é obtida como uma consequência da conservação da energia.

### ***O medidor de Venturi:***

É um aparelho usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido em um tubo. O medidor é conectado entre dois tubos de secções transversais diferentes. No escoamento de líquido por um tubo de diâmetros diferentes: sendo o diâmetro da parte central do tubo menor que nas duas extremidades, o escoamento é mais rápido na região mais estreita e a pressão menor. *O medidor de venturi* permite calcular a velocidade de um fluido em um tubo horizontal, por meio da diferença de pressão nos tubos verticais.



- Líquidos reais têm viscosidade:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_w} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_w} + \Delta h$$

$\Delta h$  = perda de carga

- Esta perda de energia é devida ao atrito com as paredes do tubo e devida à viscosidade do líquido em escoamento

# Número de Reynolds

- Quando a velocidade de um fluido que escoar em um tubo excede certo valor crítico, o regime de escoamento passa de lamelar para turbulento, exceto em uma camada extremamente fina junto à parede do tubo, chamada camada limite, onde o escoamento permanece laminar.
- No escoamento turbulento, o movimento do fluido é altamente irregular, caracterizado por vórtices locais e um grande aumento na resistência ao escoamento.

# Número de Reynolds

- O regime de escoamento, se lamelar ou turbulento, é determinado pelo número de Reynolds:

$$N_R = \rho D v / \mu$$

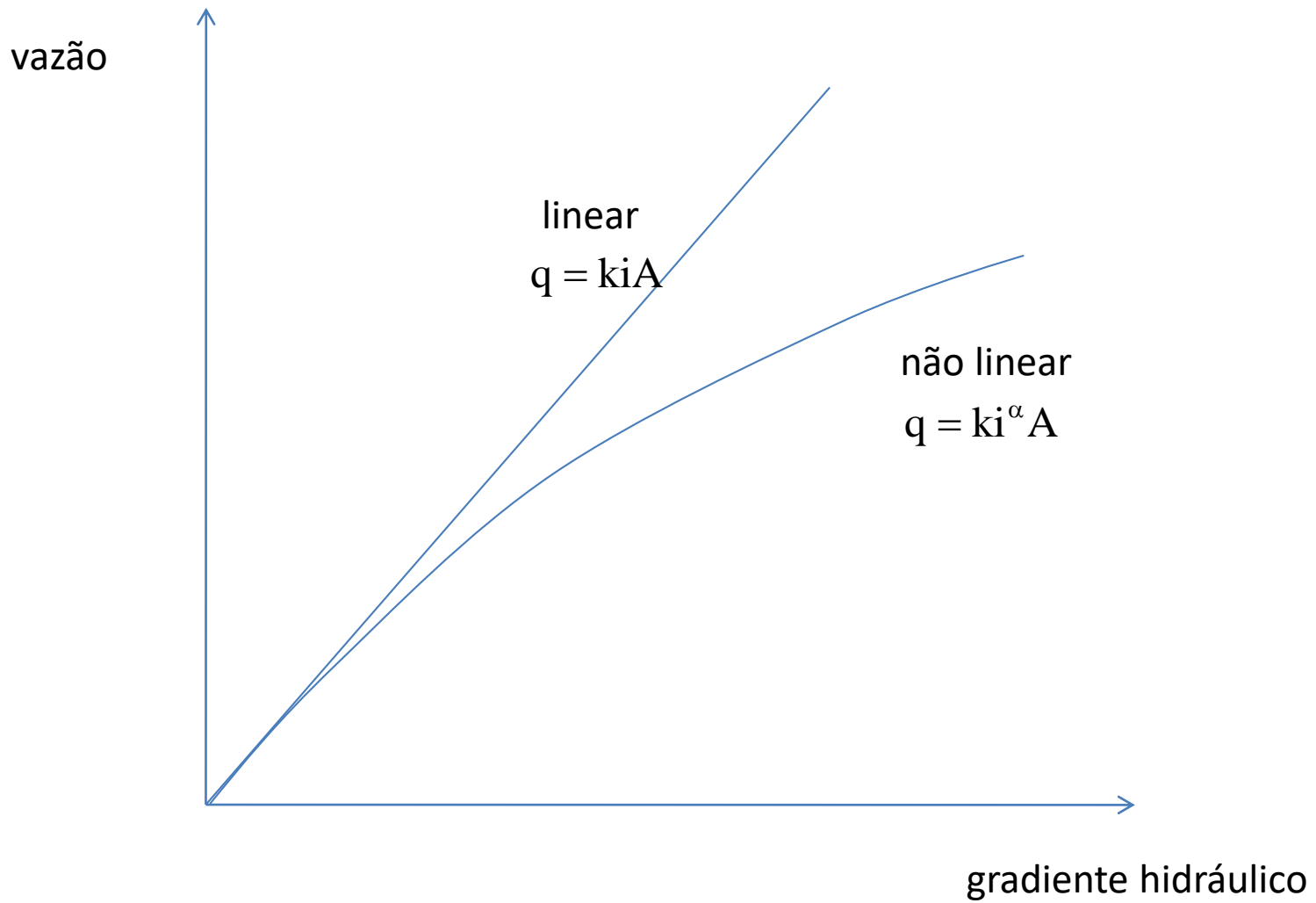
$\rho$  = densidade do fluido

$\mu$  = viscosidade dinâmica do fluido

$v$  = módulo da velocidade média de escoamento

$D$  = diâmetro do tubo

- Verifica-se experimentalmente que o escoamento de um fluido é:  
lamelar se  $N_R < 2.000$  (linhas de fluxo paralelas)  
turbulento se  $N_R > 3.000$   
instável, isto é, mudando de um regime para outro, se  $2.000 < N_R < 3.000$





# Água

- Viscosidade cinemática:

Sua unidade no S.I. é *stoke* (1stoke =  $1\text{cm}^2/\text{s}$ ).

Viscosidade da água a  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = \mathbf{1,01 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}}$

- Viscosidade dinâmica: *poise* (1 poise =

$0,1\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ ). Água fria:  $\mu = \mathbf{1,03 \cdot 10^{-4} \text{kgf}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$

## Densidade e viscosidade da água sob condições normais de pressão

<b>Temperatura - q (°C)</b>	<b>Densidade absoluta - r (kg/m<sup>3</sup>)*</b>	<b>Viscosidade dinâmica - m (10<sup>-3</sup> N.s/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Viscosidade cinemática - n (10<sup>-6</sup>m<sup>2</sup>/s)</b>	<b>Densidade relativa - d</b>
0 (gelo)	917,0	-	-	0,9170
0(água)	999,8	1,781	1,785	0,9998
4	1000,0	1,558	1,558	1,0000
5	1000,0	1,518	1,519	1,0000
10	999,7	1,307	1,308	0,9997
15	999,1	1,139	1,140	0,9991
20	998,2	1,002	1,003	0,9982
25	997,0	0,890	0,893	0,9970
30	995,7	0,798	0,801	0,9967
40	992,2	0,653	0,658	0,9922
50	988,0	0,547	0,553	0,9880
60	983,2	0,466	0,474	0,9832
70	977,8	0,404	0,413	0,9788
80	971,8	0,354	0,364	0,9728
90	965,3	0,315	0,326	0,9653
100	958,4	0,282	0,294	0,9584

(\*) Para converter para kgf.s<sup>2</sup>/m<sup>4</sup> divide-se o valor tabelado por 9,80665

# Densidade da água em função da temperatura

°C	Décimos de grau									
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
<b>0</b>	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
<b>10</b>	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984
<b>20</b>	0,9982	0,9980	0,9978	0,9976	0,9973	0,9971	0,9968	0,9965	0,9963	0,9960
<b>30</b>	0,9957	0,9954	0,9951	0,9947	0,9944	0,9941	0,9937	0,9934	0,9930	0,9926
<b>40</b>	0,9922	0,9919	0,9915	0,9911	0,9907	0,9902	0,9898	0,9894	0,9890	0,9885
<b>50</b>	0,9881	0,9876	0,9872	0,9867	0,9862	0,9857	0,9852	0,9848	0,9842	0,9838
<b>60</b>	0,9832	0,9827	0,9822	0,9817	0,9811	0,9806	0,9800	0,9765	0,9789	0,9784
<b>70</b>	0,9778	0,9772	0,9767	0,9761	0,9755	0,9749	0,9743	0,9737	0,9731	0,9724
<b>80</b>	0,9718	0,9712	0,9706	0,9699	0,9693	0,9686	0,9680	0,9673	0,9667	0,9660
<b>90</b>	0,9653	0,9647	0,9640	0,9633	0,9626	0,9619	0,9612	0,9605	0,9598	0,9591

máxima a 4°C = **0,999973 g/cm<sup>3</sup>**