Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 4.R.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Let $f(x) = 3 - 27x^3$.

- a) Compute $f(0), f(-1), f(\frac{1}{3})$ and $f(\sqrt[3]{2})$

  $f(0)$=$3 - 27 \cdot 0^3 = 3$

  $f(-1) = 3 - 27(-1)^3 = 3 + 27 = 30$

  $f(1/3) = 3 - 27(1/3)^3 = 3 - 27(1/27)$ =$3 - 1 = 2$

  $f(\sqrt[3]{2}) = 3 - 27(\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 54 = -51$

- b) Show that $f(x) + f(-x) = 6$ for all x.

  $f(x) + f(-x) = 3 - 27x^3 + 3 - 27(-x)^3 = 3 - 27x^3 + 3 + 27x^3 = 6$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Let $F(x) = 1 + \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

(a) Compute $F(0)$, $F(-2)$, $F(2)$, and $F(3)$.

$$F(0) = 1 + \frac{4 \cdot 0}{0^2 + 4} = 1 + 0 = 1$$

$$F(-2) = 1 + \frac{4 \cdot (-2)}{(-2)^2 + 4} = 1 + \frac{-8}{8} = 1 - 1 = 0$$

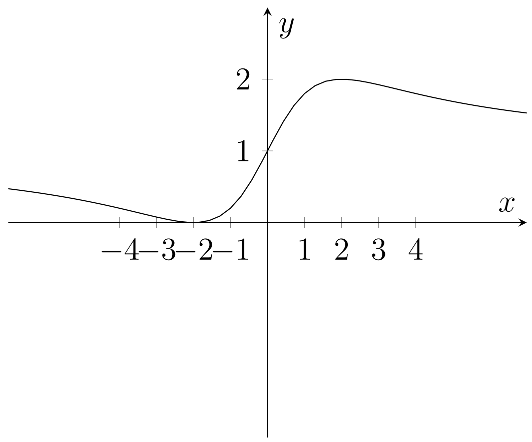
$$F(2) = 1 + \frac{4 \cdot (2)}{(2)^2 + 4} = 1 + \frac{8}{8} = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = 1 + \frac{4 \cdot (3)}{(3)^2 + 4} = 1 + \frac{12}{13} = \frac{25}{13}$$

(b) What happens to $F(x)$ when x becomes large positive or negative?

Quando x assume um número positivo muito grande note que a expressão $\dfrac{4x}{x^2 + 4}$ irá se tornar um número muito pequeno pois o denominador da expressão crescerá a uma taxa maior que o numerador, de modo que $F(x)$ se aproxime de 1 conforme o valor de x aumenta. Quando x assume o valor de um número negativo muito grande note que a expressão $\dfrac{4x}{x^2+4}$ também se tornará um número muito pequeno, embora desta vez negativo (o denominador da expressão sempre será positivo e o numerador sempre será negativo caso x seja negativo) pelo mesmo motivo de antes: o denominador de x cresce a uma taxa maior que o numerador, de modo que $F(x)$ fique cada vez mais próximo de 1 (embora menor que 1) quando x se torna um número negativo cada vez maior.

(c) Give a rough sketch of the graph of F.



■

Resolução (‖ Questão: 4.R.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

A figura 4.R.1 combina os gráficos de uma função quadrática f com uma função linear g. Use os gráficos para encontrar os valores de x para os quais:

a) $f(x) \leq g(x)$

b) $f(x) \leq 0$

c) $g(x) \geq 0$

a) $f(x) \leq g(x)$ quando $-2 \leq x \leq 3$

b) $f(x) \leq 0$ quando $-1 \leq x \leq 3$

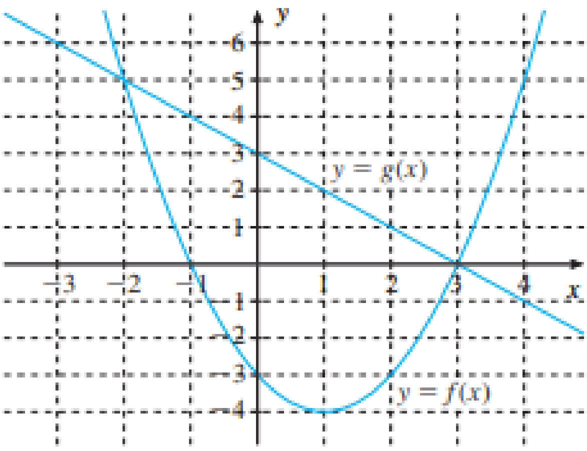
c) $g(x) \geq 0$ quando $x \leq 3$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

4. Find the domains of the following functions:

Figure 1: Figura 4.R.1



a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \tag{1}$$
$$D : x^2 - 1 \geq 0 \tag{2}$$
$$D : x^2 \geq 1 \tag{3}$$
$$D : x \geq 1, x \leq -1 \tag{4}$$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \tag{5}$$
$$D : x - 4 > 0 \tag{6}$$
$$D : x > 4 \tag{7}$$

c) $h(x) = \sqrt{(x-3)(x+5)}$

$$h(x) = \sqrt{(x-3)(x+5)} \tag{8}$$
$$D : 5 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 5 \tag{9}$$
$$e \tag{10}$$
$$x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \tag{11}$$
$$D : 3 \leq x \leq 5 \tag{12}$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

The cost of producing x units of a commodity is given by $C(x) = 100 + 40x + 2x^2$.

a) Find $C(0)$, $C(100)$ and $C(101) - C(100)$

$C(0) = 100 + 40(0) + 2(0)^2 = 100$

$C(100) = 100 + 40(100) + 2(100)^2 = 24100$

$C(101) = 100 + 40(101) + 2(101)^2 = 100 + 4040 + 2(10201) = 100 + 4040 + 20402 = 24542$

$C(101) - C(100) = 24542 - 24100 = 442$

b) Find $C(x-1) - C(x)$, and explain in words the meaning of the difference.
$C(x) = 100 + 40x + 2x^2$
$C(x+1) = 100 + 40(x+1) + 2(x+1)^2 = 100 + 40x + 40 + 2(x^2 + 2x + 1) = 142 + 44x + 2x^2$
$C(x+1) - C(x) = 142 + 44x + 2x^2 - (100 + 40x + 2x^2) = 42 + 4x$
Therefore, $42 + 4x$ is the cost of producing 1 more unit of the product since x units have already been produced.

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖) Find equations for the following straight lines:

(a) L_1 passes through $(-2, 3)$ and has a slope of -3.

(b) L_2 passes through $(-3, 5)$ and $(2, 7)$.

(c) L_3 passes through (a, b) and $(2a, 3b)$, where $a \neq 0$.

(a) $P = (-2, 3)$, Coeficiente angular: $a = -3$

$$y - 3 = -3(x+2) \tag{13}$$
$$y = -3x - 3 \tag{14}$$

(b) $P_1 = (-3, 5)$ e $P_2 = (2, 7)$ e $a = \dfrac{7-5}{2+3} = \dfrac{2}{5}$

$$y - 7 = \frac{2}{5}.(x-2) \tag{15}$$
$$y = \frac{2}{5}.x + \frac{31}{5} \tag{16}$$

(c) $P_1 = (a, b)$ e $P_2 = (2a, 3b)$ e $a \neq 0$
$a = \dfrac{3b - b}{2a - a} = \dfrac{2b}{a}$

$$y - 3b = \frac{2b}{a}(x - 2a) \tag{17}$$
$$y = \frac{2bx}{a} - \frac{4ab}{a} + 3b \tag{18}$$
$$y = 2.\frac{b}{a}.x - b \tag{19}$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

Se $f(x) = ax + b,\ f(2) = 3$ e $f(-1) = -3$, então $f(-3) = ?$
(i) $f(2) = 2a + b = 3$
(ii) $f(-1) = -a + b = -3$
Resolvendo: (i)+2(ii), temos que:

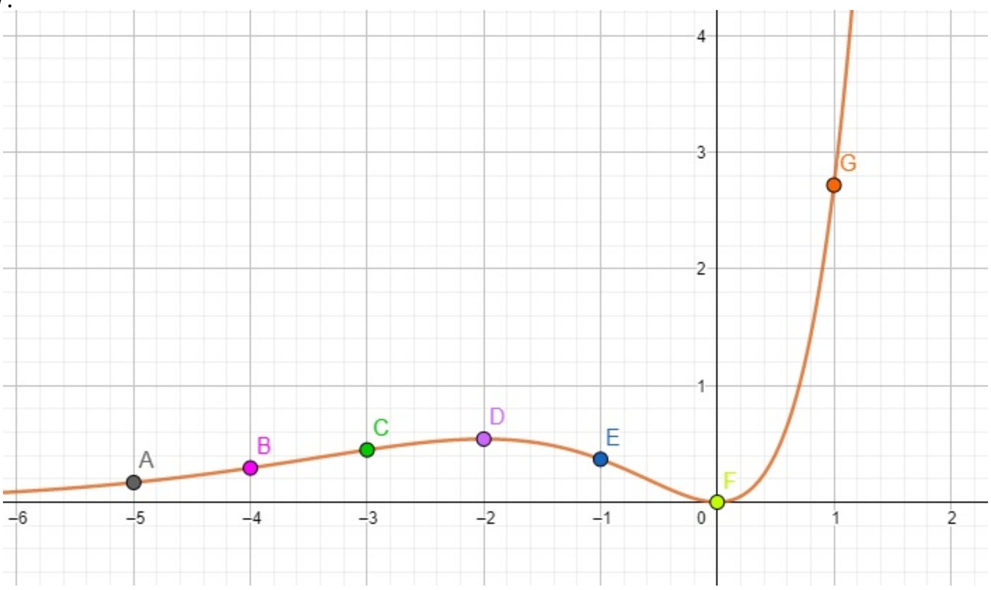
$3b = -3 \iff b = -1, \ \therefore \ a = 2$

Achando a função $f(x) = 2x - 1$, então $f(-3) = -7$ ■

Resolução (‖ Questão: 4.R.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Fill the following table, then make a rough sketch of the graph of $y = x^2e^x$

Os pontos da tabela, da esquerda para a direita (partindo do -5), são, respectivemente: A, B, C, D, E, F e G.



x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$y = x^2e^x$	$25/e^5$	$16/e^4$	$9/e^3$	$4/e^2$	$1/e$	0	e

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Find the equation for the parabola $y = ax^2 + bx + c$ that passes through the three points (1, -3), (0, -6), and (3, 15) - that is, determine a, b, and c.

Quando $x = 0$ note que $y = -6$. De acordo com a equação da parábola, isso implica que c = -6 pois $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Leftrightarrow y = c \Leftrightarrow -6 = c$. Ainda, temos que quando $x = 1$, $y = -3$. Portanto temos $-3 = a + b + c \Leftrightarrow -3 = a + b + (-6) \Leftrightarrow 3 = a + b \Leftrightarrow a = 3 - b$. Agora que descobrimos uma relação entre a e b podemos usar as coordenadas que ainda não utilizamos para descobrir outra equação que relacione as duas variáveis e assim possamos resolver um sistema de equações. Com as coordenadas (3,15) temos: $15 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + (-6) \Leftrightarrow 21 = 9a + 3b$. Substituindo o valor de a encontrado anteriormente nessa nova equação temos $21 = 9 \cdot 9(3 - b) + 3b \Leftrightarrow 21 = 27 - 9b + 3b \Leftrightarrow 6b = 6 \Leftrightarrow b = 1$. Agora que descobrimos o valor de b basta substituir esse valor em alguma das equações para encontrar o valor de a. Logo $a = 3 - 1 \Leftrightarrow a = 2$. Portanto $a = 2$, $b = 1$, $c = -6$ e a equação da parábola é $y = 2x^2 + x - 6$.

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Se uma firma vende Q toneladas de um produto, o preço P recebido por tonelada é $P = 1000 - \frac{1}{3}Q$. O preço que a firma paga por tonelada é $P = 800 + \frac{1}{5}Q$. Adicionalmente, a firma paga um custo de transporte de 100 por tonelada.

a) Apresente o lucro π da firma em função de Q, o número de toneladas vendidas, e encontre a quantidade que maximiza o lucro.
Considerando o lucro como o valor recebido das vendas menos os custos:

$$\pi = (1000 - \frac{1}{3}Q)Q - (800 - \frac{1}{5}Q)Q - 100Q \tag{20}$$
$$\pi = 1000Q - \frac{1}{3}Q^2 - 800Q - \frac{1}{5}Q^2 - 100Q \tag{21}$$
$$\pi = -\frac{8}{15}Q^2 + 100Q \tag{22}$$

Para encontrar o valor de Q que maximiza o lucro:

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-\frac{8}{15})} = 93{,}75$$

b) Suponha que o governo imponha um imposto sobre o produto da firma em 10 por tonelada. Encontre a nova função de lucro da firma e a nova quantidade que maximiza o lucro.
Com o imposto, a nova função de lucro será:

$$\pi = -\frac{8}{15}Q^2 + 100Q - 10Q \tag{23}$$
$$\pi = -\frac{8}{15}Q^2 + 90Q \tag{24}$$

Para encontrar a nova quantidade que maximiza o lucro:

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2(-\frac{8}{15})} = 84{,}375$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.12 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

12. In Example 4.6.1, suppose a tax of τ per unit produced is imposed. If $\tau < 100$, what production level now maximizes profits?

Exemplo 4.6.1: $\pi = 100Q - \frac{5}{2}Q^2$
Ao se adicionar um imposto τ a função do lucro se torna igual a: $\pi = 100Q - \frac{5}{2}Q^2 - \tau Q$, pois agora o produtor tem um custo a mais para cobrir, que é o imposto.

Rearranjando a função temos:$\pi = \frac{-5}{2}Q^2 + Q(100 - \tau)$

Logo, o nível de produção que máximiza o lucro agora é igual:

$$\frac{-b}{2a} \tag{25}$$
$$\frac{-(100-\tau)}{2 \cdot -\frac{5}{2}} \tag{26}$$
$$\frac{-(100-\tau)}{-5} \tag{27}$$
$$\frac{100-\tau}{5} \tag{28}$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.13 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

A firm produces a commodity and receives \$100 for each unit sold. The cost of producing and selling x units is $20x + 0.25x^2$ dollars.

a) Find the production level that maximizes profits.

As the profit is equal to how many units were produced times its price ($100x$) minus the cost of producing and selling the commodity ($20x + 0.25x^2$), we have that the profit will be equal to:

$$100x - (20x + 0.25x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + 80x \tag{29}$$

Now, we must find the production level (x) that maximizes the profit.

As it is a quadratic function, we have the x that maximizes it's $x_{max} = \frac{-b}{2a}$, then:

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_{max} = \frac{-80}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{-80}{-\frac{1}{2}} = 160 \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Therefore, $x_{max} = 160$

b) If a tax of \$10 per unit is imposed, what is the new optimal production level?

With the new tax, the new total cost will be $\frac{1}{4}x^2 + 20x + 10x$

Maximizing for the new profit function $100x - (30x + \frac{1}{4}x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + 70x$, we have :

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{max} = -\frac{70}{2(-\frac{1}{4})} = 140 \tag{32}$$

Therefore, $x_{max} = 140$

c) Answer the question in (b) if the sales price per unit is p, the total cost of producing and selling x units is $\alpha x + \beta x^2$, and the tax per unit is τ where $\tau \leq p - \alpha$.

As there is a tax of τ per unit, the total cost will be $\tau x + \alpha x + \beta x^2$,and the revenue will be px, thus, the profit function, given by $\pi(x)$, is:

$$\pi(x) = px - (\tau x + \alpha x + \beta x^2) = x(p - \tau - \alpha) - \beta x^2 \tag{33}$$

As it is a quadratic function, we have the x that maximizes it $x_{max} = \frac{-b}{2a}$, then:

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_{max} = \frac{-(p - \tau - \alpha)}{2(-\beta)} = \frac{(p - \tau - \alpha)}{2\beta} \tag{34}$$

Therefore, $x_{max} = \dfrac{(p - \tau - \alpha)}{2\beta}$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.15 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖) Suppose that a and b are constants, while n is a natural number. Which of the following divisions leave no remainder?

(a) $(x^3 - x - 1)/(x - 1)$

(b) $(2x^3 - x - 1)/(x - 1)$

(c) $(x^3 - ax^2 + bx - ab)/(x - a)$

(d) $(x^{2n} - 1)/(x^{2n} - 1)$

(a)
$$\begin{array}{rl}
x^3 \qquad & -x-1 = \big(x-1\big)\,\big(x^2+x\big) - 1 \\
\underline{-x^3+x^2} & \\
x^2 & -x \\
\underline{-x^2} & \underline{+x}
\end{array}$$

A divisão deixa resto $= -1$.

(b)
$$\begin{array}{rl}
2x^3 \qquad & -x-1 = \big(x-1\big)\,\big(2x^2+2x+1\big) \\
\underline{-2x^3+2x^2} & \\
2x^2 & -x \\
\underline{-2x^2} & \underline{+2x} \\
 & x-1 \\
 & \underline{-x+1} \\
 & 0
\end{array}$$

A divisão deixa resto $= 0$.

(c)
$$\begin{array}{rl}
x^3-ax^2 & +bx-ab = \big(x-a\big)\,\big(x^2+b\big) \\
\underline{-x^3+ax^2} & \\
 & bx-ab \\
 & \underline{-bx+ba} \\
 & 0
\end{array}$$

A divisão deixa resto $= 0$.

(d) n n
$$\begin{array}{rl}
x^{2n} \qquad & -1 = \big(x+1\big)\,\big(x-1\big) \\
\underline{-x^{2n}-x} & \\
 & -x-1 \\
 & \underline{x+1} \\
 & 0
\end{array}$$

A divisão deixa resto $= 0$.

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.16 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Ache os valores de k que façam o polinômio $q(x)$ dividir o polinômio $p(x)$:

a) $p(x) = x^2 - kx + 4,\ q(x) = x - 2$

$p(2) = 0 \Longrightarrow 2^2 - 2k + 4 = 0 \Longrightarrow -2k = -8 \Longleftrightarrow k = 4$

b) $p(x) = k^2 - kx - 6,\ q(x) = x + 2$

$p(-2) = 0 \Longrightarrow 2^2k^2 - 2k - 6 = 0 \Longrightarrow 4k^2 - 2k - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100$

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 4} = \frac{2 \pm 10}{8}$$

$\therefore\ k_1 = 1$ ou $k_2 = -\frac{3}{2}$

c) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + k,\ q(x) = x + 2$

$p(-2) = 0 \Longrightarrow (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2 + k = 0 \Longrightarrow -8 - 16 - 2 + k = 0 \Longleftrightarrow k = 26$

d) $p(x) = k^2x^4 - 3kx^2 - 4,\ q(x) = x - 1$

$p(1) = 0 \Longrightarrow 1^4k^2 - 3 \cdot 1^2k - 4 = 0 \Longrightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$

$k_1 + k_2 = \frac{-b}{a}$ e $k_1 \cdot k_2 = \frac{c}{a},\ \therefore\ k_1 + k_2 = 3$ e $k_1 \cdot k_2 = -4$

Assim, $k_1 = -1$ ou $k_2 = 4$

■

Resolução (‖ Questão: 4.R.17 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

The cubic function $p(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 - \dfrac{11}{4}x + \dfrac{15}{2}$ has three real zeros. Verify that $x = 2$ is one of them, and find the another two.

Primeiramente, vale ressaltar que, se $x = 2$ for uma das raízes da função $p(x)$, então $p(2) = 0$. Testemos:

$$p(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 2^2 - \frac{11}{4} \cdot 2 + \frac{15}{2} = 2 - 4 - \frac{11}{2} + \frac{15}{2} = -2 + \frac{4}{2} = 0$$

$\therefore x = 2$ é uma das raízes. Logo, é divisível por $(x - 2)$.

Para facilitarmos os cálculos das outras raízes, multiplicaremos por 4 cada membro da equação. Para o cálculo das raízes, tal transformação é útil, ainda que a equação já não seja mais a mesma.

$$p(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{2} = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$$

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30\ /\ (x - 2) = x^2 - 2x - 15$

$$\begin{array}{llll}
x^3 & -2x^2 & & \\
\hline
 & -2x^2 & -11x & +30 \\
 & -2x^2 & +4x & \\
\hline
 & & -15x & +30 \\
 & & -15x & +30 \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ A divisão resulta em $x^2 - 2x - 15$.

Resolvendo esta equação para suas raízes, por meio de soma e produto:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$

$P = \dfrac{c}{a} = -15$

Sendo x_1 e x_2 as raízes possíveis que resolvem a equação $x^2 - 2x - 15 = 0$:
$x_1 \cdot x_2 = -15$ e $x_1 + x_2 = 2$
Por tentativas, chegamos que $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$

$\therefore \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 - \dfrac{11}{4}x + \dfrac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -3, 2, -5$
■

Resolução (‖ Questão: 4.R.18 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

In 1964 a five-year plan was introduced in Tanzania. One objective was to double the real income per capita over the next 15 years. What is the average annual rate of growth of real income per capita required to achieve this objective?

Usando a fórmula $P(t) = Aa^t$ e dando o seguinte significado para cada uma das variáveis: ”$P(t)$” é a renda per capita da Tanzania após t anos; ”A” é a renda per capita da Tanzania atual; ”a” é a taxa de crescimento da renda per capita da Tanzania e ”t” é o número de anos que se passam. Assim temos $2 = 1 \cdot a^{15}$. Note que colocamos $P(15) = 2$ igual a 2 pois queremos dobrar a renda per capita da Tanzania em 15 anos. Consideramos inicialmente a renda per capita da Tanzania igual a 1, e a é o valor que queremos descobrir. Assim podemos aplicar logaritmos dos dois lados da equação de modo a obter $\ln 2 = \ln(1 \cdot a^{15}) \Leftrightarrow \ln 2 = \ln 1 + \ln a^{15} \Leftrightarrow \ln 2 = 0 + \ln a^{15} \Leftrightarrow e^{\ln 2} = e^{\ln a^{15}} \Leftrightarrow 2 = a^{15} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{15}} = a \Leftrightarrow 1,0472 = a$. Assim temos que a taxa de crescimento da renda per capita deve ser de $4,72\%$ pelos próximos 15 anos para que a renda per capita do país dobre.
■

Resolução (‖ Questão: 4.R.19 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

A figura 4.R.2 mostra o gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$. Cheque quais das constantes a, b e c é positiva, zero ou negativa

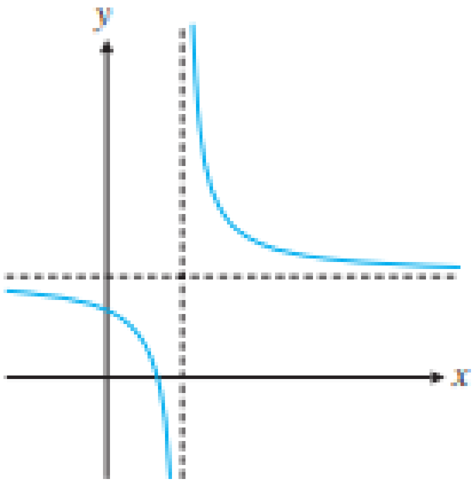
Como a linha pontilhada vertical é $x = -c$ e se encontra onde x é positivo, então c é negativo. Quando x se aproxima de c sendo menor que $-c$, $f(x)$ fica menor do que 0, o que quer dizer que $a > 0$. Se a e x são positivos quando $f(x) = 0$, b é menor que 0 ■

Resolução (‖ Questão: 4.R.20 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

20. Figure 4.R.3 shows the graph of the function $y = g(x) = px^2 + qx + r$. Check which of the constants p, q, and r are positive, zero, or negative.

Como o gráfico é uma parábola ”virada” para cima, podemos deduzir que p é positivo, além disso como a parábola corta o eixo y em um ponto negativo é possivel concluir que r é negativo.
Por último, como a parábola corta o eixo y em sua metade decrescente, isto é, a tangente no ponto x=0 é decrescente, conclui-se que q é negativo.

Figure 2: Figura 4.R.2



■

Resolução (|| Questão: 4.R.21 || Relator: $\mathbf{x}_{15}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ||)

Recall that: (i) the relationship between the Celsius (C) and Fahrenheit (F) temperature scales is linear; (ii) water freezes at 0^oC and 32^oF; and (iii) water boils at 100^oC and 212^oF.

a) Determine the equation that converts C to F.

The enunciate gives us 2 points of the linear function: $(0, 32)$ and $(100, 212)$. As we have that the parameter a of any linear function $f(x) = ax + b$ is:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \tag{35}$$

As we already know the value of one of the parameters, we use one of the points to determine the parameter b :

$$\frac{9}{5} \cdot 0 + b = 32 \Leftrightarrow b = 32 \tag{36}$$

We conclude then that the function that converts Celsius to Fahrenheit is:

$$F^o = \frac{9}{5}C^o + 32 \tag{37}$$

b) Which temperature is represented by the same number in both scales?

To solve this, we use an arbitrary temperature x as:

$$x = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow x(1 - \frac{9}{5}) = 32 \Leftrightarrow -x \cdot \frac{4}{5} = 32 \Leftrightarrow x = \frac{32 \cdot (-5)}{4} \Leftrightarrow x = -40 \tag{38}$$

So, $-40C^o = -40F^o$

■

Resolução (|| Questão: 4.R.23 || Relator: $\mathbf{x}_{20}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ||) Prove the following equalities, with appropriate restrictions on the variables:

(a) $\ln x - 2 = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right)$

(b) $\ln x - \ln y + \ln z = \ln \frac{xz}{y}$

(c) $3 + 2\ln x = \ln(e^3 x^2)$

(d) $\frac{1}{2}\ln x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x+1) = \ln \frac{x^2}{x+1}$

(a) $\ln x - 2 = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right) \iff \ln x - 2 = \ln x - \ln e^2 \iff -2 = -\ln e^2 \iff -2 = -2$

É válida para $x > 0$

(b) $\ln \frac{xz}{y} = \ln(xz) - \ln(y) = \ln(x) + \ln(z) - \ln(y)$

É válida para $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$

(c)

É válida para $x > 0$

(d) $\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln\frac{1}{x} - \ln(x+1) \iff \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}(-\ln x) - \ln(x+1) \iff 2.\ln x - \ln(x+1) \iff \ln x^2 - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

É válida para $x > 0$

■