Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

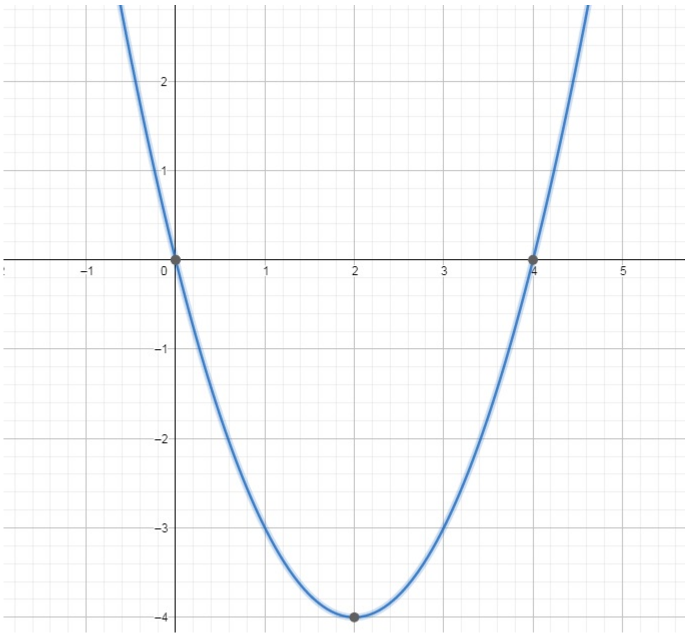
x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 4.6.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

1. Let $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Complete the following table and use it to sketch the graph of f:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



b) Using Eq. (4.6.3), determine the minimum point of f

Eq. (4.6.3): $x = \dfrac{-b}{2a}$

$X_v = \dfrac{-(-4)}{2.1} = \dfrac{4}{2} = 2$

$Y_v = 2^2 - 4.2 = -4$

$\therefore$ Ponto Mínimo em $(2, -4)$

c) Solve equation $f(x) = 0$

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ or $x = 4$

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Let $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

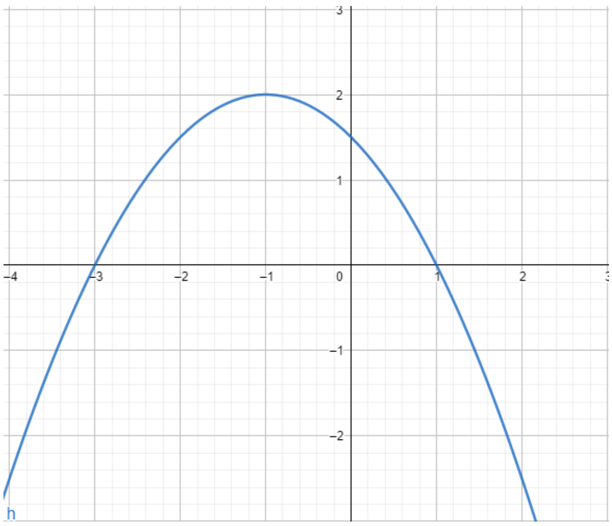
(a) Complete the following table and sketch the graph of f:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5/2	0	3/2	2	3/2	0	-5/2

Considere $f(x)$ sendo o eixo na vertical e x sendo o eixo na horizontal

Figure 1: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$



$$f(x) = -\frac{1}{2}4^2 - 4 + \frac{3}{2} = -8 - (-4) + \frac{3}{2} = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{8}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} - (-3) + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -2 - (-2) + \frac{3}{2} = -2 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 0$$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -2 - 2 + \frac{3}{2} = -\frac{8}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

(b) Using Eq. (4.6.4), determine the maximum point of f

If $a < 0$, then $f(x) = ax^2 + bx + c$ has its maximum at $x = -\frac{b}{2a}$ (4.6.4)

Portanto teremos que $f(x)$ terá seu máximo em $-\frac{(-1)}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -1$

Quando $x = -1$, $f(x) = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$

(c) Solve the equation $f(x) = 0$.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$

$f(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0$

$f(x) = -(x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$

(d)Show that $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$, and use this to study how the sign of $f(x)$ varies with x. Compare the result with your graph.

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Note que quando $x > -1$ os termos $(x-1)(x+3)$ serão ambos positivos, e quando multiplicados com o primeiro termo da equação $(-\frac{1}{2})$, farão com que $f(x)$ assuma um sinal negativo. Note também que quando $-3 < x < -1$, temos que $(x-1)$ será negativo e $(x+3)$ será positivo assim quando esses dois termos se multiplicam resultam em um termo negativo, multiplicando o termo de segundo grau originado por essa multiplicação por $-\frac{1}{2}$ teremos um $f(x)$ positivo. Ainda, caso tenhamos um $x < -3$ todos os três termos da equação serão negativos, resultando em um $f(x)$ negativo.

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Determine os pontos de máximo/mínimo das seguintes funções, usando as seguintes equações conforme necessário

Se $a > 0$, então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem valor mínimo quando $x = -b/2a$

Se $a < 0$, então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem valor máximo quando $x = b/2a$

a) $f(x) = x^2 + 4x$

Como $a > 0$, então $f(x)$ terá valor mínimo quando $x = \frac{-4}{2} = -2$.

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$

-4 é ponto de mínimo de $f(x)$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 18$
Como $a > 0$, então $f(x)$ terá valor mínimo quando $x = \dfrac{-6}{2} = -3$.

$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 18 = 9 - 18 + 18 = 9$

9 é ponto de mínimo de $f(x)$

c) $f(x) = -3x^2 + 30x - 30$
Como $a < 0$, então $f(x)$ terá valor máximo quando $x = \dfrac{-30}{-6} = 5$.

$f(5) = -3(5)^2 + 30(5) - 30 = -75 + 120 = 45$

45 é ponto de máximo de $f(x)$

d) $f(x) = 9x^2 - 6x - 44$
Como $a > 0$, então $f(x)$ terá valor mínimo quando $x = \dfrac{6}{18} = 1/3$.

$f(1/3) = 1 - 2 - 44 = -45$

-45 é ponto de mínimo de $f(x)$

e) $f(x) = -x^2 - 200x + 30000$
Como $a < 0$, então $f(x)$ terá valor máximo quando $x = \dfrac{200}{-2} = -100$.

$f(100) = -10000 + 20000 + 30000 = 40000$

40000 é ponto de máximo de $f(x)$

f) $f(x) = x^2 + 100x - 20000$
Como $a > 0$, então $f(x)$ terá valor mínimo quando $x = \dfrac{-100}{2} = -50$.

$f(-50) = (-50)^2 + 100(-50) - 20000 = 2500 - 5000 - 20000 = -22500$

-22500 é ponto de mínimo de $f(x)$.
■

Resolução (‖ Questão: 4.6.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

4. Find all the zeros of each quadratic function in Exercise 3, and where possible write each function in the form $a(x - x_1)(x - x_2)$.

a)$x^2 + 4x$

$$x(x - 4) = 0 \tag{1}$$
$$x = 0, x = 4 \tag{2}$$

b)$x^2 + 6x + 18$

$$x^2 + 6x + 18 = 0 \tag{3}$$
$$Aplicando: \tag{4}$$
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \tag{5}$$
$$\delta^2 = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 52 = -16 \tag{6}$$

Como o delta é negativo não é possível encontrar nenhuma solução dentro do conjunto dos reais

c)$-3x^2 + 30x - 30$

$$-3x^2 + 30x - 30 = 0 : 3 \tag{7}$$
$$-x^2 + 10x - 10 = 0 \tag{8}$$
$$Aplicando: \tag{9}$$
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \tag{10}$$
$$\delta^2 = (10)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -10 = 60 \tag{11}$$
$$\delta = \sqrt{60} = \pm 2\sqrt{15} \tag{12}$$
$$\frac{-(10) \pm 2\sqrt{15}}{-2} \tag{13}$$
$$x_1 = \frac{-10 + 2\sqrt{15}}{-2} = 5 - \sqrt{15} \tag{14}$$
$$x_2 = \frac{-10 - 2\sqrt{15}}{-2} = 5 + \sqrt{15} \tag{15}$$
$$-3(x - (5 - \sqrt{15})(x - (5 + \sqrt{15}) \tag{16}$$

d)$9x^2 - 6x - 44$

$$9x^2 - 6x - 44 = 0 \tag{17}$$
$$Aplicando: \tag{18}$$
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \tag{19}$$
$$\delta^2 = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -44 = 1620 \tag{20}$$
$$\delta = \sqrt{1620} = \pm 18\sqrt{5} \tag{21}$$
$$\frac{-(-6) \pm 18\sqrt{5}}{18} \tag{22}$$
$$x_1 = \frac{1}{3} + \sqrt{5} \tag{23}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \sqrt{5} \tag{24}$$
$$9(x - (\frac{1}{3} + \sqrt{5})(x - (\frac{1}{3} - \sqrt{5}) \tag{25}$$

e)$-x^2 - 200x + 30000$

$$-x^2 - 200x + 30000 = 0 \tag{26}$$
$$\delta^2 = (-200)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 30000 = 160000 \tag{27}$$
$$\delta = \sqrt{160000} = \pm 400 \tag{28}$$
$$\frac{-(-200) \pm 400}{-2} \tag{29}$$
$$x_1 = -300, x_2 = 100 \tag{30}$$
$$-1(x + 300)(x - 100) \tag{31}$$

f)$x^2 + 100x - 20000$

$$x^2 + 100x - 20000 = 0 \tag{32}$$
$$\delta^2 = (100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -20000 = 90000 \tag{33}$$
$$\delta = \pm 300 \tag{34}$$
$$\frac{-100 \pm 300}{2} \tag{35}$$
$$x_1 = 100, x_2 = -200 \tag{36}$$
$$(x - 100)(x + 200) \tag{37}$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Find solutions to the following equations, where p and q are parameters.

a) $x^2 - 3px + 2p^2 = 0$

As $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ and $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ we have that:

$$x_1 + x_2 = 3p \tag{38}$$
$$x_1 x_2 = 2p^2 \tag{39}$$

Therefore, we conclude that $x_1 = p$ and $x_2 = 2p$

b) $x^2 - (p + q)x + pq = 0$

As $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ and $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ we have that:

$$x_1 + x_2 = p + q \tag{40}$$
$$x_1 x_2 = pq \tag{41}$$

Therefore, we conclude that $x_1 = p$ and $x_2 = q$

c) $2x^2 + (4q - p)x = 2pq$

$2x^2 + (4q - p)x = 2pq \Leftrightarrow 2x^2 + (4q - p)x - 2pq = 0$

As the roots of the function $2x^2 + (4q - p)x - 2pq = 0$ are the same of the roots of the same function divided by 2, we'll use $x^2 + (2q - \frac{p}{2})x - pq = 0$

As $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ and $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ we have that:

$$x_1 + x_2 = \frac{p}{2} - 2q \tag{42}$$

$$x_1 x_2 = -pq \tag{43}$$

Therefore, we conclude that $x_1 = \dfrac{p}{2}$ and $x_2 = -2q$

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

A model in the theory of efficient loan markets involves the function

$$U(x) = 72 - (4 + x)2 - (4 - rx)^2 \tag{44}$$

where r is a constant. Find the value of x for which $U(x)$ attains its largest value.

Expandindo $U(x) = 72 - (4+x)^2 - (4-rx)^2 \iff U(x) = 72 - (16 + 8x + x^2) - (16 - 8rx + r^2x^2) \iff U(x) = -x^2 - r^2x^2 - 8x + 8rx + 40 \iff U(x) = -x^2(1 + r^2) - 8x(1 - r) + 40$

Maximizar $U(x)$ com a fórmula $x_{max} = \frac{-b}{2a}$

$\therefore\ x_{max} = \frac{-(-8(1-r))}{2(-(1+r^2))} = \frac{4(r-1)}{(1+r^2)}$

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) A farmer has 1000 metres of fence wire with which to make a rectangular enclosure, as illustrated in the figure below.

(a) Find the areas of the three rectangles whose bases are 100, 250, and 350 metres.

(b) Let the base have length $250 + x$. Then the height is $250 - x$, as in Fig. 4.6.7. What choice of x gives the maximum area?

(a)(100) $2.b + 2.h = 1000 \rightarrow 200 + 2.h = 1000 \rightarrow h = 400$
$A = b.h \rightarrow A = 40000$

(250) $2.b + 2.h = 1000 \rightarrow 500 + 2.h = 1000 \rightarrow h = 250$
$A = b.h \rightarrow A = 62500$

(350) $2.b + 2.h = 1000 \rightarrow 700 + 2.h = 1000 \rightarrow h = 150$
$A = b.h \rightarrow A = 52500$

(b) $A = (250 + n)(250 - n) = 62500$

Como $n \geq 0$, o valor máximo de A se da quando $n = 0$, sendo $A = 62500$.

■

Resolução (‖ Questão: 4.6.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

If a cocoa shipping firm sells Q tons of cocoa in the UK, the price received is given by $P_E = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q$. On the other hand, if it buys Q tons from its only source in Ghana, the price it has to pay is given by $P_G = \alpha_2 + \frac{1}{6}Q$. In addition, it costs γ per ton to ship cocoa from its supplier in Ghana to its customers in the UK (its only market). The numbers α_1, α_2, and γ are all positive.

a) Express the cocoa shipper's profit as a function of Q, the number of tons shipped.

$\pi(Q) = (P_E - P_G - \gamma)Q = (\alpha_1 - \frac{1}{3}Q - \alpha_2 - \frac{1}{6}Q - \gamma)Q = (\alpha_1 - \frac{1}{2}Q - \alpha_2 - \gamma)Q$
$\therefore\ \pi(Q) = -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q$

b) Assuming that $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma > 0$, find the profit-maximizing shipment of cocoa. What happens if $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$?

Para maximizar a função $\pi(Q)$, vamos deriva-lá e igualar a zero:

$\frac{\partial\pi(Q)}{\partial Q} = -Q^* + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma = Q^*$

Caso $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$, a quantidade que maximiza o lucro será igual a zero ($Q = 0$), pois não é possível produzir quantidades negativas.

c) Suppose the government of Ghana imposes an export tax on cocoa of τ per ton. Find the new expression for the shipper's profits and the new quantity shipped.

$\pi(Q') = (P_E - P_G - \gamma - \tau)Q = (\alpha_1 - \frac{1}{3}Q - \alpha_2 - \frac{1}{6}Q - \gamma - \tau)Q = (\alpha_1 - \frac{1}{2}Q - \alpha_2 - \gamma - \tau)Q$
$\therefore\ \pi(Q') = -\frac{1}{2}Q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - \tau)Q$

Para maximizar a função $\pi(Q')$, vamos deriva-lá e igualar a zero:

$\frac{\partial\pi(Q')}{\partial Q} = -Q'^* + (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - \tau) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - \tau = Q'^*$, se $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - \tau > 0$

d) Calculate the Ghanaian government's export tax revenue as a function of τ , and compare the graph of this function with the Laffer curve presented in Fig. 4.1.1.

$T = \tau Q^* = \tau(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - \tau)$. T é uma função quadrática de τ; e é 0 quando $\tau = 0$ e quando $\tau = \tau_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$, e positivo para τ entre 0 e τ_1

e) Advise the Ghanaian government on how to obtain as much tax revenue as possible.

A receita de exportação é maximizada quando $\tau = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)$

■

Resolução (|| Questão: 4.6.9 || Relator: $\mathbf{x}_{06}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ||)

9. Let $a_1, a_2, ..., a_n$ and $b_1, b_2, ...b_n$ be arbitrary real numbers. The inequality

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \quad (4.6.8)$$

is called the *Cauchy-Schwarz* inequality.

a) Check the inequality for $n = 2$, when $a_1 = -3, a_2 = 2, b_1 = 5$ and $b_2 = -2$.

$((-3)(5)+(2)(-2))^2 \leq ((-3)^2+(2)^2)((5)^2+(-2)^2) \Leftrightarrow (-15-4)^2 \leq (9+4)(25+4) \Leftrightarrow (-19)^2 \leq (13)(29)$
$\Leftrightarrow 361 \leq 377$

$\therefore$ A inequação de Cauchy-Schwarz é valido para $n = 2$, quando $a_1 = -3, a_2 = 2, b_1 = 5$ e $b_2 = -2$.

b) Prove (4.6.8) by means of the following trick: first define f for all x by

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2$$

It should be obvius that $f(x) \geq 0$ for all x. Write $f(x)$ as $Ax^2 + Bx + C$, where the expressions for A, B and C are related to the terms in (4.6.8). Because $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ for all x, we must have $B^2 - 4AC \leq 0$. Why?

Primeiramente, temos que $f(x)$ é sempre maior ou igual a zero, o que nos permite concluir que, para nenhum x, $f(x)$ assume valor negativo. Logo, o coeficiente A da função deve ser, necessariamente positivo - uma vez que, caso pudesse ser permitido que ele assumisse algum valor negativo, a função também iria, devido a sua concavidade, assumir pelo menos algum valor negativo.

Prosseguindo, uma função desse tipo, sempre maior ou igual a zero, faz com que Δ, dado por $B^2 - 4AC$, terá que ser sempre igual ou menor que zero - significando que há apenas uma e nenhuma raíz, respectivamente.

c) Argue that (4.6.8) then follows.

Como $f(x) = (a_1x+b_1)^2 + ... + (a_nx+b_n)^2$, então $f(x) = (a_1^2x^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + ... + (a_n^2x^2 + 2a_nb_n + b_n^2)$

Deixando fatores comuns em evidência:

$f(x) = (a_1^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2x(a_1b_1 + ... + a_nb_n) + (b_1^2 + ... + b_n^2)$

Calculemos o Δ da função $f(x)$:

Como $\Delta = B^2 - 4AC$,

$\Delta = [2(a_1b_1 + ... + a_nb_n)]^2 - 4(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) = 4(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$

Como já chegamos a conclusão de que Δ de $f(x)$ é sempre menor ou igual a zero:

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \leq 0 \Leftrightarrow 4(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$

Dividindo cada membro da inequação por 4:

$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$

■