Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 4.7.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Find all integer roots of the following equations:

(a) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

Temos que uma condição necessária para um número ser uma raíz inteira de uma função polinomial com coeficientes inteiros é que essa raíz seja um fator do termo constante da equação que não está multiplicando x. Como o termo constante da equação que não está multiplicando x é 1, os fatores dessa constante são ±1, ±2, ±3, ±6. Substituindo esses números na equação para verificar se eles de fato são raízes temos:

$(-1)^4 - (-1)^3 - 7(-1)^2 + (-1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0.$ Portanto é raiz.

$(1)^4 - (1)^3 - 7(1)^2 + (1) + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0.$ Portanto é raiz.

$(-2)^4 - (-2)^3 - 7(-2)^2 + (-2) + 6 = 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0.$ Portanto é raiz.

$(2)^4 - (2)^3 - 7(2)^2 + (2) + 6 = 16 - 8 - 28 - 2 + 6 = -16.$ Portanto não é raiz.

$(-3)^4 - (-3)^3 - 7(-3)^2 + (-3) + 6 = 81 + 27 - 63 - 3 + 6 = 21.$ Portanto não é raiz.

$(3)^4 - (3)^3 - 7(3)^2 + (3) + 6 = 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0.$ Portanto é raiz.

$(-6)^4 - (-6)^3 - 7(-6)^2 + (-6) + 6 = 1296 + 216 - 252 - 6 + 6 = 1260.$ Portanto não é raiz.

$(6)^4 - (6)^3 - 7(6)^2 + (6) + 6 = 1296 - 216 - 252 + 6 + 6 = 840.$ Portanto não é raiz.

Ou seja, são raizes inteiras $-1, 1, -2$ e 3.

(b) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 0$

$2(1)^3 + 11(1)^2 - 7(1) - 6 = 2 + 11 - 7 - 6 = 13 - 13 = 0$ .Portanto é raiz.

$2(-1)^3 + 11(-1)^2 - 7(-1) - 6 = -2 + 11 + 7 - 6 = 18 - 8 = 10$ .Portanto não é raiz.

$2(-2)^3 + 11(-2)^2 - 7(-2) - 6 = -16 + 44 + 14 - 6 = 36$ .Portanto não é raiz.

$2(2)^3 + 11(2)^2 - 7(2) - 6 = 16 + 44 - 14 - 6 = 40$ .Portanto não é raiz.

$2(-3)^3 + 11(-3)^2 - 7(-3) - 6 = -52 + 99 + 21 - 6 = 62$ .Portanto não é raiz.

$2(3)^3 + 11(3)^2 - 7(3) - 6 = 52 + 99 - 21 - 6 = 124$ .Portanto não é raiz.

$2(-6)^3 + 11(-6)^2 - 7(-6) - 6 = -432 + 396 + 42 - 6 = 0$ .Portanto é raiz.

$2(6)^3 + 11(6)^2 - 7(6) - 6 = 432 + 396 - 42 - 6 = 780$ .Portanto não é raiz.

Ou seja, são raizes inteiras 1 e -6.

(c) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$

$(1)^4 + (1)^3 + 2(1)^2 + (1) + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 \neq 0.$ Portanto temos que 1 não é raíz da equação.

$(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2 \neq 0.$ Portanto temos que -1 também não é raíz da equação.

Desse modo podemos afirmar que a equação polinomial não tem raízes inteiras.

(d) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$

$\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) + 4 = -1 - 1 + 4 + 4 = 6.$ Portanto não é raiz.

$(1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0.$ Portanto é raiz.

$(-2)^3 - (-2)^2 - 4(-2) + 4 = -8 - 4 + 8 + 4 = 0.$ Portanto é raiz.

$(2)^3 - (2)^2 - 4(2) + 4 = 8 - 4 - 8 + 4 = 0.$ Portanto é raiz.

$(-4)^3 - (-4)^2 - 4(-4) + 4 = -64 - 16 + 16 + 4 = -60.$ Portanto não é raiz.

$(4)^3 - (4)^2 - 4(4) + 4 = 64 - 16 - 16 + 4 = 36.$ Portanto não é raiz.

Portanto são raizes inteiras 1, -2, e 2.

■

Resolução (‖ Questão: 4.7.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Encontre todas as raízes inteiras das seguintes equações

a) $x^2 + x - 2 = 0$

Para $x = 1 \rightarrow 1 + 1 - 2 = 0$

Para $x = -2 \rightarrow 4 - 2 - 2 = 0$

$x = 1$ e $x = -2$ são raízes da desta equação.

b) $x^3 - x^2 - 25x + 25 = 0$

Para $x = 1 \rightarrow 1 - 1 - 25(1) + 25 = 0$

Para $x = 5 \rightarrow 125 - 25 - 125 + 25 = 0$

Para $x = -5 \rightarrow -125 - 25 + 125 + 25 = 0$

$x = 1$, $x = 5$ e $x = -5$ são raízes dessa equação.

c) $x^5 - 4x^3 - 3 = 0$

Para $x = -1 \rightarrow -1 + 4 - 3 = 0$
$x = -1$ é a única raíz dessa equação
■

Resolução (‖ Questão: 4.7.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

3. Perform the following divisions:

A divisão a seguir está estruturada da seguinte maneira: na primeira linha se encontra o quociente, na última linha o resto, no canto esquerdo o divisor e ao lado dele o dividendo.

a)$(2x^3 + 2x - 1) : (x - 1)$

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & +2x^2 & +2x & +4 & & \\
\hline
x-1\surd & 2x^3 & +2x & -1 & & \\
 & 2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & & 2x^2 & +2x & -1 & \\
 & & 2x^2- & 2x & & \\
\hline
 & & & 4x & -1 & \\
 & & & 4x & -4 & \\
\hline
 & & & & 3 &
\end{array}
$$

Resultado: $(2x^3 + 2x - 1) : (x - 1) = 2x^2 + 2x + 4 + \frac{3}{x-1}$
Sendo $x - 1 \neq 0$

b)$(x^4 + x^3 + x^2 + x) : (x^2 + x)$

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & & x^2 & +1 \\
\hline
x^2+x\surd & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x \\
 & x^4 & +x^3 & & \\
\hline
 & x^2 & +x & & \\
 & x^2 & +x & & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Resultado:$(x^4 + x^3 + x^2 + x) : (x^2 + x) = x^2 + 1$

c)$(x^5 - 3x^4 + 1) : (x^2 + x + 1)$

$$
\begin{array}{r|llllll}
 & +x^3 & -4x^2 & +3x & +1 & & \\
\hline
x^2+x+1\surd & x^5 & -3x^4 & +1 & & & \\
 & x^5 & x^4 & +x^3 & & & \\
\hline
 & & -4x^4 & -x^3 & +1 & & \\
 & & -4x^2 & -4x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & & & 3x^3 & +4x^2 & +1 & \\
 & & & 3x^3 & +3x^2 & +3x & \\
\hline
 & & & & x^2 & -3x & +1 \\
 & & & & x^2 & +x & +1 \\
\hline
 & & & & & -4x & \\
\end{array}
$$

Resultado:$(x^5 - 3x^4 + 1) : (x^2 + x + 1) = +x^3 - 4x^2 + 3x + 1 - \frac{4x}{x^2+x+1}$
Sendo $x^2 + x + 1 \neq 0$

d)$(3x^8 + x^2 + 1) : (x^3 - 2x + 1)$

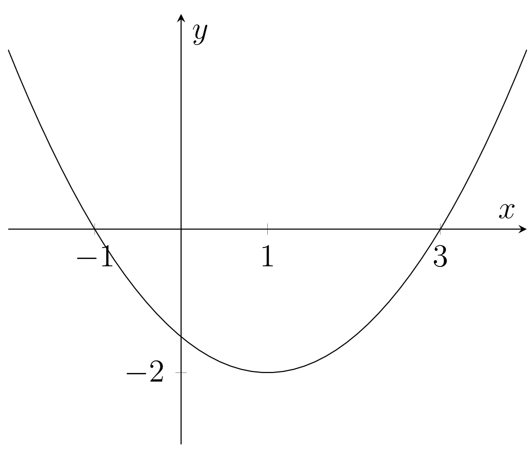
$$
\begin{array}{r|lllllll}
 & +3x^5 & +6x^3 & -3x^2 & +12x & -12 & & \\
\hline
x^3+-2x+1\surd & 3x^8 & +x^2 & +1 & & & & \\
 & -3x^8 & -6x^6 & +3x^5 & & & & \\
\hline
 & & 6x^6 & -3x^5 & +x^2 & +1 & & \\
 & & -6x^6 & -12x^4 & +6x^3 & & & \\
\hline
 & & & -3x^5 & +12x^4 & -6x^3 & +x^2 & +1 \\
 & & & -3x^5 & +6x^3 & -3x^2 & & \\
\hline
 & & & & 12x^4 & -12x^3 & +4x^2 & +1 \\
 & & & & 12x^4 & -24x^2 & +12x & \\
\hline
 & & & & & -12x^3 & +28x^2 & -12x \quad +1 \\
 & & & & & -12x^3 & +24x & -12 \\
\hline
 & & & & & & 28x^2 & -36x \quad +13 \\
\end{array}
$$

Resultado:$(3x^8 + x^2 + 1) : (x^3 - 2x + 1) = +3x^5 + 6x^3 - 3x^2 + 12x - 12 + \frac{28x^2-36x+13}{x^3-2x+1}$
Sendo $(x^3 - 2x + 1)$ diferente de 0 ■

Resolução (‖ Questão: 4.7.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Find possible formulas for each of the three polynomials with graphs shown in Figs 4.7.6 to 4.7.8.

a)



By the graph, it's clear that it is a quadratic function, because of its U shape, and we can see three points: $(-1, 0)$, $(1, -2)$ and $(3, 0)$. Therefore, we conclude that the roots are $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, because they are the points where the function cross the x axis. We also know that the function is equal to -2 when x is equal to 1.

Assuming that every quadratic function can be written as:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \tag{1}$$

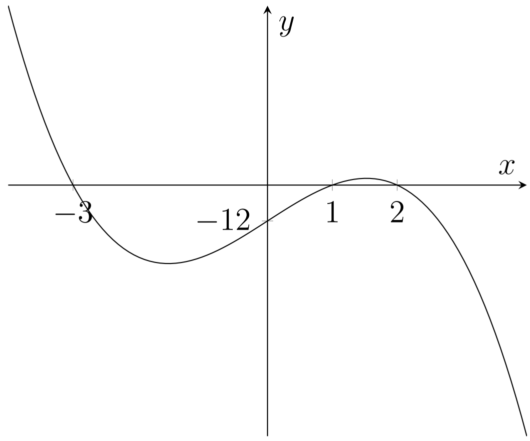
we have that the function above is equal to : $a(x + 1)(x - 3)$.

Substituting x by 1 in the function, we have that:

$a(1 + 1)(1 - 3) = -2 \Leftrightarrow -4a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
Thus, the function is

$$\frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) \tag{2}$$

b)



By the graph we can see four points: $(-3, 0)$, $(0, -12)$, $(1, 0)$ and $(2, 0)$. Therefore, we conclude that the roots are $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ because they are the points where the function cross the x axis. We also know that the function is equal to -12 when x is equal to 0.

Assuming that every polinomial function can be written as:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) \tag{3}$$

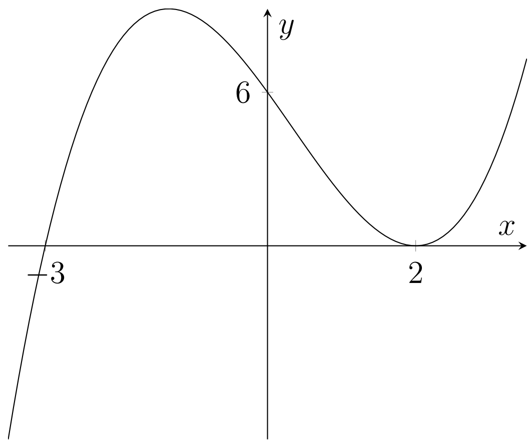
we have that the function above is equal to : $a(x + 3)(x - 1)(x - 2)$, because it has only 3 roots.

Substituting x by 0 in the function, we have that:
$a(0 + 3)(0 - 1)(0 - 2) = -12 \Leftrightarrow a(3)(-1)(-2) = -12 \Leftrightarrow a6 = -12 \Leftrightarrow a = -2$

Thus, the formula of the graph's function is:

$$-2(x + 3)(x - 1)(x - 2) \tag{4}$$

c)



By the graph we can see three points: $(-3, 0)$, $(0, 6)$, $(2, 0)$. Therefore, we conclude that the roots are $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ because they are the points where the function cross the x axis. We also know that the function is equal to 6 when x is equal to 0.

Assuming that every polinomial function can be written as:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) \tag{5}$$

we have that the function above is equal to : $a(x + 3)(x - 2)^2$, because it has only 2 roots, and the second term is squared because once the point $(2, 0)$ is tangent to the x axis, the root has multiplicity 2.

Substituting x by 0 in the function, we have that:

$a(0 + 3)(0 - 2)(0 - 2) = 6 \Leftrightarrow a(3)(-2)(-2) = 6 \Leftrightarrow a12 = 6 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Thus, the formula of the graph's function is:

$$\frac{1}{2}(x + 3)(x - 2)^2 \tag{6}$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.7.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖) Show that the division:

$$(x^4 + 3x^2 + 5)/(x - c) \tag{7}$$

leaves a remainder for all values of c.

$(x^4 + 3x^2 + 5)/(x - c) = (x^3 + c.x^2 + c^2.x + 3.x) + (3xc + c^3x + 5)$
Sendo o resto (R): $R = 3.x.c + c^3.x + 5$
Para que a equação $(x^4 + 3x^2 + 5)$ seja divisível por $(x - c)$, o resto (R) deve ser igual a zero (R=0).
$R = 3.x.c + c^3.x + 5 = 0$
$x(3c + c^3) + 5 = 0$
Não existe c pertence aos reais que torne a equação verdadeira. Portanto, a divisão deixa resto $\forall c \in \mathbb{R}$.
■

Resolução (‖ Questão: 4.7.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Prove que, desde que $c \neq 0$ e $cx + d \neq 0$, a equação $\dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c(cx + d)}$:

Resolvemos essa questão expandindo o lado direito da expressão:

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)} \Longrightarrow \frac{a(cx + d) + bc - ad}{c(cx + d)} \Longrightarrow \frac{acx + ad + bc - ad}{c(cx + d)} \Longrightarrow \frac{acx + bc}{c(cx + d)} \Longrightarrow \frac{c(ax + b)}{c(cx + d)} \Longrightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$$

$\therefore\ \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ■

Resolução (‖ Questão: 4.7.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

8. The following function has been used in demand theory:

$$E = \alpha \frac{x^2 - \gamma x}{x + \beta}$$

with α, β and γ being constants. Perform the division $\dfrac{(x^2 - \gamma x)}{(x+\beta)}$, and use the result to express E as a sum of a linear function and a proper fraction.

$(x^2 - \gamma x)\ /\ (x+\beta) = x - (\gamma + \beta)$ (quociente)

Fazendo a divisão passo a passo

$(x^2 - \gamma x)$ - $(x^2 + \beta x) = 0 - (\gamma + \beta)x$
$-(\gamma+\beta)x\ -\ (-(\gamma+\beta)x\ -\ \beta(\gamma+\beta)) = +\ \beta(\gamma+\beta)$ (resto)

$\therefore E = \alpha(x - (\gamma+\beta) + \dfrac{(\beta(\gamma+\beta))}{x+\beta}) = \alpha(x - (\gamma+\beta))\ +\ \dfrac{\beta\alpha(\gamma+\beta)}{x+\beta}$
■