Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{05}: José Soares Jr.	x_{11}: Luca Monaco
x_{06}: Maurício Damião	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{09}: Rafael Maddalena	x_{20}: Gustavo Zequini

Resolução (‖ Questão: 4.2.1 ‖ Relator: $\mathbf{x_{05}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{06}}$ ‖)

Suponha $f(x) = x^2 + 1$:

a) Calcule $f(0), f(-1), f(\frac{1}{2})$ e $f(\sqrt{2})$:

$f(0) = 0^2 + 1 \Longrightarrow f(0) = 1$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 \Longrightarrow f(-1) = 2$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 1 \Longrightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 \Longrightarrow f(\sqrt{2}) = 3$

b) Para quais valores de x é verdade que:

(i) $f(x) = f(-x)$?

$x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 \Longleftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + 1$

Para todo valor de x a equação é verdadeira.

(ii) $f(x+1) = f(x) + f(1)$?

$(x+1)^2 + 1 = x^2 + 1 + 1^2 + 1 \Longrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 3 \Longrightarrow 2x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$

(iii) $f(2x) = 2f(x)$?

$(2x)^2 + 1 = 2(x^2 + 1) \Longrightarrow 4x^2 + 1 = 2x^2 + 2 \Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.2 ‖ Relator: $\mathbf{x_{06}}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x_{08}}$ ‖)

2. Suppose $F(x) = 10$, for all x. Find $F(0), F(-3), and F(a+h) - F(a)$

Uma função constante $f(x) = c$, sendo c uma constante, implica que, dado qualquer x, a sua correspondência no eixo $y = f(x)$ terá sempre o mesmo valor, c. Por isso:
$F(0) = F(-3) = 10$
Por causa disso, $F(a+h) - F(a) = 0$.
■

Resolução (‖ Questão: 4.2.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

Let $f(t) = a^2 - (t-a)^2$, where a is a constant.

(a) Compute $f(0)$, $f(a)$, $f(-a)$, and $f(2a)$.

$f(0) = a^2 - (0-a)^2 = a^2 - a^2 = 0$

$f(a) = a^2 - (a-a)^2 = a^2 - 0 = a^2$

$f(-a) = a^2 - (-a-a)^2 = a^2 - 4a^2 = -3a^2$

$f(2a) = a^2 - (2a-a)^2 = a^2 - a^2 = 0$

(b) Compute $3f(a) + f(-2a)$.

$3f(a) + f(-2a) = 3[a^2 - (a-a)^2] + [a^2 - (-2a-a)^2] = 3a^2 + a^2 - 9a^2 = -5a^2$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) Seja $f(x) = x/(1+x^2)$.

a) Calcule $f(-1/10)$, $f(0)$, $f(1/\sqrt{2})$, $f(\sqrt{\pi})$, e $f(2)$.

$$f(-1/10) = \frac{\left(\frac{-1}{10}\right)}{1+\left(\frac{-1}{10}\right)^2} = \frac{-1}{10}\cdot\frac{100}{100+1} = \frac{-100}{1010} = \frac{-10}{101}$$

$$f(0) = \frac{0}{1+0^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$f(\sqrt{\pi}) = \frac{\sqrt{\pi}}{1+(\sqrt{\pi})^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{1+\pi}$$

$$f(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

b) Mostre que $f(-x) = -f(x)$ para todo x, e que $f(1/x) = f(x)$ para $x \neq 0$

$$
\begin{align}
f(-x) &= -f(x) \tag{1}\\
\frac{-x}{1+(-x)^2} &= -\frac{x}{1+x^2} \tag{2}\\
\frac{-x}{1+(-x)(-x)} &= \frac{-x}{1+x^2} \tag{3}\\
\frac{-x}{1+x^2} &= \frac{-x}{1+x^2} \tag{4}
\end{align}
$$

$$
\begin{align}
f(1/x) &= f(x) \tag{5}\\
\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{x}{1+x^2} \tag{6}\\
\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} &= \frac{x}{1+x^2} \tag{7}\\
\frac{1}{x+\frac{x}{x^2}} &= \frac{x}{1+x^2} \tag{8}\\
\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{x}} &= \frac{x}{1+x^2} \tag{9}\\
\frac{x}{1+x^2} &= \frac{x}{1+x^2} \tag{10}
\end{align}
$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

5.Let $F(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$. Compute $F(0)$, $F(-3)$, and $F(t+1)$.

$$
\begin{align}
F(O) &= \sqrt{0^2 - 2\cdot 0 + 4} = 2 \tag{11}\\
F(-3) &= \sqrt{(-3)^2 - S\cdot(-3) + 4} = \sqrt{19} \tag{12}\\
F(t+1) &= \sqrt{(t+1)^2 - 2\cdot(t+1) + 4} \to \sqrt{t^2 + 2t + 1 - 2t - 2 + 4} \to \sqrt{t^2 + 3} \tag{13}
\end{align}
$$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

The cost of producing x units of a commodity is given by $C(x) = 1000 + 300x + x^2$

a) Compute $C(0)$, $C(100)$, and $C(101) - C(100)$.

$C(0) = 1000 + 300(0) + (0)^2 = 1000$

$C(100) = 1000 + 300(100) + (100)^2 = 1000 + 30000 + 10000 = 41000$

$C(101) = 1000 + 300(101) + (101)^2 = 1000 + 30300 + 10201 = 41501$

Therefore : $C(101) - C(100) = 41501 - 41000 = 501$

b) Compute $C(x+1) - C(x)$, and explain in words the meaning of the difference.

$C(x) = 1000 + 300x + x^2$ $C(x+1) = 1000 + 300(x+1) + (x+1)^2 = 1000 + 300x + 300 + x^2 + 2x + 1 = 1301 + 302x + x^2$

Then: $C(x+1) - C(x) = 1301 + 302x + x^2 - (1000 + 300x + x^2) = 301 + 2x$

As $C(x)$ is the cost of producing x units of the commodity, and $C(x+1)$ is the cost of producing x plus 1 commodities, we conclude that the difference $C(x+1) - C(x)$ is the cost of producing 1 more commodity when it had been already produced x units.

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

The demand for cotton in the USA, for the period 1915–1919, with appropriate units for the price P and the quantity Q, was estimated to be $Q = D(P) = 6.4 - 0.3P$.

a) Find the demand quantity in each case if the price is 8, 10, and 10.22.

Sendo a função demanda $Q = D(P) = 6.4 - 0.3P$ substitui-se o preços por:

$p = 8 \Rightarrow D(8) = 6.4 - 0,3 \cdot 8 \iff D(8) = 4$

$p = 10 \Rightarrow D(10) = 6.4 - 0,3 \cdot 10 \iff D(10) = 3,4$

$p = 10,22 \Rightarrow D(10,22) = 6.4 - 0,3 \cdot 10,22 \iff D(10,22) = 3,3334$

b) If the demand quantity is 3.13, what is the price?

Como a demanda é $D(p) = 3,13$ então $3,13 = 6,4 - 0,3p \iff p = 10,9$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

(a) If $f(x) = 100x^2$, show that for all t, $f(tx) = t^2 f(x)$

(b) If $P(x) = x^{1/2}$, show that for all $t \geq 0$, $P(tx) = t^{1/2}P(x)$

(a) $f(tx) = t^2 f(x) \iff 100(tx)^2 = t^2.100x^2 \iff 100.t^2.x^2 = 100.t^2.x^2$

Portanto, $f(tx) = t^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Caso $t \geq 0$: $(x.t)^{1/2} = t^{1/2}.x^{1/2} \iff x^{1/2}t^{1/2} = t^{1/2}.x^{1/2} \iff x^{1/2}t^{1/2} = x^{1/2}t^{1/2}$
Caso $t < 0$, Exemplo: $t = -2$: $(x.t)^{1/2} = t^{1/2}.x^{1/2} \iff (x. -2)^{1/2} = -2^{1/2}.x^{1/2}$

Não existe solução no conjunto dos Reais, é possível notar pelo termo: $-2^{1/2}$que é equivalente a $\sqrt{-2}$ e para $t < 0, \sqrt{t} \notin \mathbb{R}$.

Portanto, $t \geq 0, P(tx) = t^{1/2}P(x)$.

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

O custo de remover $p\%$ das impurezas de um lago é dada por $b(p) = \frac{10p}{(105-p)}$:

a) Ache $b(0), b(50)$ e $b(100)$

$$b(0) = \frac{10 \cdot 0}{(105-0)} \Longrightarrow b(0) = 0$$

$$b(50) = \frac{10 \cdot 50}{(105-50)} \Longrightarrow b(50) = \frac{100}{11}$$

$$b(100) = \frac{10 \cdot 100}{(105-100)} \Longrightarrow b(100) = 200$$

b) O que $b(50+h) - b(50)$ significa (considerando $h \geq 0$)?

A equação descrita acima é sobre o custo adicional de remover mais do que 50% das impurezas do lago.

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

10. Only for very special "additive" functions is it true that $f(a+b) = f(a) + f(b)$ for all a and b. Determine whether $f(2+1) = f(2) + f(1)$ for the following funcions:

a) $f(x) = 2x^2$

$f(2+1) = 18$

$f(2) + f(1) = 8 + 2 = 10$

$\therefore$ Não é válido $f(2+1) = f(2) + f(1)$ para $f(x) = 2x^2$.

b) $f(x) = -3x$

$f(2+1) = -9$

$f(2) + f(1) = -6 - 3- = -9$

$\therefore$ É válido $f(2+1) = f(2) + f(1)$ para $f(x) = -3x$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$

$f(2+1) = \sqrt{3}$

$f(2+1) = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$

$\therefore$ Não é válido $f(2+1) = f(2) + f(1)$ para $f(x) = \sqrt{x}$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

(a) If $f(x) = Ax$, show that $f(a+b) = f(a) + f(b)$ for all numbers a and b.

$f(a+b) = A(a+b) = Aa + Ab = f(a) + f(b)$

(b) If $f(x) = 10^x$, show that $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ for all natural numbers a and b.

$f(a+b) = 10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = f(a) + f(b)$

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.12 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Suponha que existam 10 pessoas na sala, então:

$$A_{10,5} = C_{10,5}P_p = \frac{10!}{5!(10-5)!}5! = \frac{10!}{5!.5!}5! = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 10.9.8.7.6 = 30.240 \quad \blacksquare$$

Resolução (‖ Questão: 4.2.13 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

13. Find the domains of the functions defined by the following formulas:

a)$y = \sqrt{5-x}$

$$5 - x \geq 0 \iff 5 \geq x \tag{14}$$

Por ser uma raíz quadrada o x deve ser positivo ou 0.

b)$y = \frac{2x-1}{x^2-x}$

$$x^2 - x \neq 0 \iff x(x-1) \neq 0 \iff x \neq 0; x \neq 1 \tag{15}$$

Por ser uma razão o denominador não pode ser igual a 0, portanto x não pode assumir os valores de 1 e 0 para que essa condição seja satisfeita.

c)$y = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x+3)}}$

$$(x-2)(x-3) \neq 0 \iff x \neq 2, x \neq -3 \tag{16}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x+3)}} \geq 0 \iff \frac{x-1}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \iff x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \tag{17}$$

Analisando as condições que x deve satisfazer para que a função seja válida, conclui-se que x deve ser maior que 2, pois uma vez satisfeita essa condição, todas as outras automaticamente também são.

$\blacksquare$

Resolução (‖ Questão: 4.2.14 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Let $f(x) = (3x+6)/(x-2)$.

a) Find the domain of the function.

As $f(x) = (3x+6)/(x-2)$ is not defined when the denominator is equal to 0, because it leads to ann indetermination ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{0}$ isn't determined), the denominator $x-2$ must be different from 0.

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \tag{18}$$

Therefore the Domain is defined as $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$

b) Show that 5 is in the range of f , by finding an x such that $\dfrac{3x+6}{x-2}$ =5.

$\dfrac{3x+6}{x-2}$ =5 $\Leftrightarrow 3x+6 = 5(x-2) \Leftrightarrow 3x+6 = 5x-10 \Leftrightarrow -2x = -16 \Leftrightarrow x = 8$

As there is a $x = 8$ that satisfies the equation, 5 is in the range os $f(x)$

c) Show that 3 is not in the range of $f(x)$

$\frac{3x+6}{x-2}=3 \Leftrightarrow 3x+6=(x-2)3 \Leftrightarrow 3x+6=3x-6 \Leftrightarrow 6=-6$

As the equation $\frac{3x+6}{x-2}=3$ when solved leads to the absurd $6=-6$, we conclude that there is no x that satisfies it, therefore, 3 is not in the range of $f(x)$.

■

Resolução (‖ Questão: 4.2.15 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Find the domain and the range of $g(x)=1-\sqrt{x+2}$.

Como $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$, então $D_g=[-2;+\infty[$

Fazendo $((g(x)-1)^2=(-\sqrt{x+2})^2 \iff x=(g(x)-1)^2-2$, Substituindo $x=-2$ na função tem-se que o valor mínimo de $g(x)$ será $g(x)=1-\sqrt{(-2)+2}=1$.

Dessa forma, $R_g=[1;+\infty[$

■