Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 3.3.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖) Solve the following quadratic equations, if they have solutions:

(a) $15x - x^2 = 0$

(b) $p^2 - 16 = 0$

(c) $(q-3)(q+4) = 0$

(d) $2x^2 + 9 = 0$

(e) $x(x+1) = 2x(x-1)$

(f) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(a) $15x - x^2 = 0 \rightarrow (15 - x)x = 0$
Portanto, $x = 0$ ou $x = 15$.

(b) $p^2 - 16 = 0 \rightarrow p^2 - 4^2 = 0 \rightarrow (p-4)(p+4) = 0$
Portanto, $p = 4$ ou $p = -4$.

(c) $(q-3)(q+4) = 0 \qquad (q-3) = 0$ ou $(q+4) = 0$
Portanto, $q = 3$ ou $q = -4$.

(d) $2x^2 + 9 = 0$
$\Delta = b^2 - 4.a.c = 0^2 - 4.2.9 = 0 - 72 = -72$
Como $\Delta < 0$, não existe solução no conjunto dos reais.

(e) $x(x+1) = 2x(x-1) \rightarrow x^2 + x = 2x^2 - 2x \rightarrow x^2 + x - 2x^2 + 2x = 0$
$\rightarrow -x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0.$
Portanto, $x = 0$ ou $x = 3$.

(f) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (Trinômio quadrado perfeito) $\rightarrow (x-2)^2 = 0$
Portanto, $x = 2$

■

Resolução (‖ Questão: 3.3.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

a) $r^2 + 11r - 26 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 11^2 - 4.1.(-26) = 225$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-11 \pm 15}{2}$

$\therefore\ x_1 = -13$ ou $x_2 = 2$

b) $3p^2 + 45 = 48 \Leftrightarrow 3p^2 + 45p - 48 = 0 \Longleftrightarrow p^2 + 15p - 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 15^2 - 4.1.(-16) = 289$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-15 \pm 17}{2}$

$\therefore\ x_1 = -16$ ou $x_2 = 1$

c) $20000 = 300K - K^2 \Leftrightarrow K^2 - 300K + 20000 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-300)^2 - 4.1.20000 = 10000$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{300 \pm \sqrt{10000}}{2 \cdot 1} = \dfrac{300 \pm 100}{2}$

$\therefore\ x_1 = 200$ ou $x_2 = 100$

d) $r^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})r = \sqrt{6} \Leftrightarrow r^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})r - \sqrt{6} = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 4.1.(-\sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{-(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{2 \cdot 1}$

$\therefore\ x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = \sqrt{2}$

e) $0.3x^2 - 0.09x = 0.12 \Longleftrightarrow 30x^2 - 9x - 12 = 0 \Longleftrightarrow 10x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-3)^2 - 4.10.(-4) = 169$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 10} = \dfrac{3 \pm 13}{20}$

$\therefore\ x_1 = -0.5$ ou $x_2 = 0.8$

f) $\frac{1}{24} = p^2 - \frac{p}{12} \Longleftrightarrow 24p^2 - 2p - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-2)^2 - 4.24.(-1) = 100$

$p = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 24} = \dfrac{2 \pm 10}{48}$

$\therefore\ p_1 = \frac{1}{4}$ ou $p_2 = -\frac{1}{6}$

■

Resolução (‖ Questão: 3.3.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

4. Solve the following equations, by using the quadratic formula

a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1$ or $x_2 = 2$

b) $5t^2 - t = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.5.(-3)}}{2.5} \Leftrightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{61}}{10}$

c) $6x = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.4.(-1)}}{2.4} \Leftrightarrow t = \dfrac{6 \pm \sqrt{52}}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{2(3 \pm \sqrt{13})}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{4}$

d) $9x^2 + 42x + 44 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-42 \pm \sqrt{(42)^2 - 4.9.(44)}}{2.9} \Leftrightarrow x = \dfrac{-42 \pm \sqrt{1764 - 1584}}{18} \Leftrightarrow x = \dfrac{-42 \pm \sqrt{180}}{18} \Leftrightarrow x = \dfrac{-42 \pm 6\sqrt{5}}{18} \Leftrightarrow x = \dfrac{6(-7 \pm \sqrt{5})}{18} \Leftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{3}$

e) $30000 = x(x + 200) \Leftrightarrow x^2 + 200x - 30000 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-200 \pm \sqrt{(200)^2 - 4.1.(-30000)}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-200 \pm \sqrt{40000 + 120000}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-200 \pm \sqrt{160000}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-200 \pm 400}{2} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-200 + 400}{2} = 100$ or $x_2 = \dfrac{-200 - 400}{2} = -300$

f) $3x^2 = 5x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.1}}{2.3} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ ■

Resolução (‖ Questão: 3.3.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

(a) Find the lengths of the sides of a rectangle whose perimeter is 40 cm and whose area is 75 cm^2.

Seja x e y o comprimento de cada um dos lados do retângulo. Então pelo enunciado sabemos que o perímetro do retângulo é $2x + 2y = 40$, de modo que $x + y = 20$. Ainda, sabemos que a área do retângulo é $xy = 75$ de modo que $x = \frac{75}{y}$. Substituindo o valor de x encontrado na equação $x + y = 20$ temos $\frac{75}{y} + y = 20$. Multiplicando ambos os lados da equação por y teremos: $75 + y^2 = 20y$. Rearranjando os termos vem: $y^2 - 20y + 75 = 0$. Podemos encontrar os valores de y que satisfazem a equação através da fórmula de Bhaskara. Sendo $a = 1$ e $b = -20$ e $c = 75$ temos $y_1, y_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(75)}}{2(1)} = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{2} = \dfrac{20 \pm 10}{2}$ Assim, $y_1 = \dfrac{20 + 10}{2} = 15$ e $y_2 = \dfrac{20 - 10}{2} = 5$. Como vimos anteriormente $x + y = 20$, assim caso $y = 15$ teremos $x + 15 = 20 \Rightarrow x = 5$ e caso $y = 5$ teremos $x + 5 = 20 \Rightarrow x = 15$.

(b) Find two successive natural numbers whose sum of squares is 13.

De acordo com o enunciado precisamos que $n^2 + (n + 1)^2 = 13$, sendo que $n \in \mathbb{N}$. Assim temos $n^2 + (n + 1)^2 = 13 \Rightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 13 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 12 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$. Aplicando

Bhaskara temos: $n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$. Assim $n_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ e $n_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.

Logo, como $n \in \mathbb{N}$ desconsideraremos n_2 e assumiremos somente n_1 de modo que os numeros naturais que satisfazer a resposta são n e $n+1$ que por sua vez são iguais a 2 e 3.

(c) In a right-angled triangle, the hypotenuse is 34 cm. One of the short sides is 14 cm longer than the other. Find the lengths of the two short sides.

Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que $a^2 + b^2 = c^2$. Aplicando esse teorema nesse caso dado pelo enunciado temos: $(x+14)^2 + x^2 = 34^2 \Rightarrow x^2 + 28x + 196 + x^2 = 1156 \Rightarrow 2x^2 + 28x - 960 = 0 \Rightarrow x^2 + 14x - 480 = 0$. Aplicando Bhaskara para resolver essa equação de segundo grau teremos: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-28 \pm \sqrt{14^2-4(1)(-480)}}{2(1)} = \frac{-14 \pm \sqrt{196+1920}}{2} = \frac{-14 \pm 46}{2}$. Assim teremos $x_1 = \frac{-14+46}{2} = \frac{32}{2} = 16$ e $x_2 = \frac{-14-46}{2} = \frac{-60}{2} = -30$. Entretanto note que não faz sentido uma medida ser negativa! Assim só tomaremos como um resultado possível x_1. Desse modo teremos um cateto com tamanho de 16 cm e o outro com tamanho de $16 + 14 = 30$ cm.

(d) A motorist drove 80 km. In order to save 16 minutes, he had to drive 10 km/h faster than usual. What was his usual driving speed?

Seja V = Velocidadade em km/minuto, T=Tempo em minutos e D = Distância Percorrida em km.

Antes da situação inicial o motorista andava a uma velocidade x durante um tempo y para percorrer 80km de modo que $V \cdot T = 80 \Rightarrow T = \frac{80}{V}$. Considerando esse tempo em minutos teremos: $T = \frac{80}{V} \cdot 60 \Rightarrow T = \frac{4800}{V}$

Agora temos que o motorista anda 10km/h mais rápido para chegar 16 minutos antes. Desse modo temos que: $(V+10)(T-16) = 80 \Rightarrow (V+10)(\frac{4800}{V} - 16) = 80 \Rightarrow 4800 - 16V + \frac{48000}{V} - 160 = 80 \Rightarrow -16V^2 - 160V + 48000 = 0 \Rightarrow -V^2 - 10V + 3000 = 0$. Aplicando a fórmula de Bhaskara temos:

$V_1, V_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(-1)(3000)}}{2(-1)} = \frac{10 \pm \sqrt{12100}}{-2} = \frac{10 \pm 110}{-2}$

$V_1 = \frac{10+110}{-2} = \frac{120}{-2} = -60$. Como a velocidade não pode ser negativa desconsideraremos esse resultado.

$V_2 = \frac{10-110}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50$. 50km/hora é portanto a velocidade do motorista na situação inicial.

■

Resolução (|| Questão: 3.3.6 || Relator: $\mathbf{x}_{09}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ||)

Resolva as seguintes equações

a) $x^3 - 4x = 0$

$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$

Portanto, $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Considerando $x^2 = y$, temos: $y^2 - 5y + 4 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$
$y = \dfrac{5 \pm 3}{2} \iff y = 4$ ou $y = 1$
Portanto,
$x^2 = y \iff x^2 = 4$ ou $x^2 = 1$
Resolvendo as duas equações acima, temos que $x = \pm 2$ ou $x = \pm 1$

c) $z^{-2} - 2z^{-1} - 15 = 0$
Considerando $z^{-1} = x$, temos:
$x^2 - 2x - 15 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$
$x = \dfrac{2 \pm 8}{2} \iff x = 5$ ou $x = -3$
Portanto,
$z^{-1} = x \iff z^{-1} = 5$ ou $z^{-1} = -3$
Resolvendo as duas equações acima, temos que $z = \dfrac{1}{5}$ ou $z = \dfrac{-1}{3}$ $\blacksquare$