Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 3.R.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

Solve each of the following equations:

a) $3x - 20 = 16$

$3x - 20 = 16 \iff 3x = 36 \iff x = 12$

b) $-5x + 8 + 2x = -(4 - x)$

$-5x + 8 + 2x = -(4 - x) \iff -3x + 8 = -4 + x \iff 12 = 4x \iff x = 3$

c) $-6(x - 5) = 6(2 - 3x)$

$-6(x - 5) = 6(2 - 3x) \iff 5 - x = 2 - 3x \iff 2x = -3 \iff x = \frac{-3}{2}$

d) $\frac{4-2x}{3} = -5 - x$

$\frac{4-2x}{3} = -5 - x \iff 2x - 4 = 15 + 3x \iff x = -19$

e) $\frac{5}{2x-1} = \frac{1}{2-x}$

Para $x \neq \frac{1}{2}$ e $x \neq 2$

$\frac{5}{2x-1} = \frac{1}{2-x} \iff 5(2 - x) = 2x - 1 \iff 10 - 5x = 2x - 1 \iff 7x = 11 \iff x = \frac{11}{7}$

f) $\sqrt{x - 3} = 6$

Para $x \geq 3$

$\sqrt{x - 3} = 6 \iff x - 3 = 36 \iff x = 39$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖) Solve each of the following equations:

(a) $\dfrac{x-3}{x-4} = \dfrac{x+3}{x+4}$

(b) $\dfrac{3(x+3)}{x-3} - 2 = 9(\dfrac{x}{x^2-9}) + \dfrac{27}{(x+3)(x-3)}$

(c) $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{5}{x}$

(d) $\dfrac{x-5}{x+5} - 1 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{11x-20}{x^2-5x}$

(a) $\dfrac{x-3}{x-4} = \dfrac{x+3}{x+4} \leftrightarrow (x-3)(x+4) = (x+3)(x-4) \leftrightarrow x^2+4x-3x-12 = x^2-4x+3x-12$
$\leftrightarrow 2x = 0 \leftrightarrow x = 0$

(b) $\dfrac{3(x+3)}{x-3} - 2 = 9(\dfrac{x}{(x+3)(x-3)}) + \dfrac{27}{(x+3)(x-3)} \leftrightarrow \dfrac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)} = \dfrac{9x+27}{(x+3)(x-3)}$

$\leftrightarrow \dfrac{3x+9-2x+6}{(x-3)} = \dfrac{9x+27}{(x+3)(x-3)} \leftrightarrow 0 = -\dfrac{(x+15)}{(x-3)} + \dfrac{9x+27}{(x+3)(x-3)}$

$\leftrightarrow 0 = \dfrac{(-x-15)(x+3)+9x+27}{(x-3)(x+3)} \leftrightarrow 0 = \dfrac{-x^2-3x-15x-45+9x+27}{(x-3)(x+3)}$

$\leftrightarrow 0 = \dfrac{-x-9x-18}{(x-3)(x+3)}$

$x = 3 \wedge x = -3$ torna a equação sem sentido, portanto o resultado deve satisfazer:

$-x^2 - 9x - 15 = 0 \wedge (x \neq 3 \text{ e } x \neq -3)$

$\Delta = 9^2 - 4.-1.-18 = 81 - 72 = 9$

$x = \dfrac{+9 \pm 3}{-2} \leftrightarrow x = \dfrac{+12}{-2} = -6$ ou $x = -\dfrac{6}{2} = -3$ (Como x não pode ser igual a -3 esse resultado não é válido)

Portanto, $x = -6$

(c) $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{5}{x} \leftrightarrow \dfrac{2x}{3} - \dfrac{2x-3}{3} = \dfrac{5}{x} \leftrightarrow \dfrac{2x-2x+3}{3} = \dfrac{5}{x} \leftrightarrow 1 = \dfrac{5}{x} \leftrightarrow x = 5$

(d) $\dfrac{x-5}{x+5} - 1 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{11x-20}{x^2-5x} \leftrightarrow \dfrac{x-5}{x+5} - 1 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{11x-20}{x(x-5)}$

$\leftrightarrow \dfrac{x-5-(x+5)}{x+5} = \dfrac{(x-5)-11x-20}{x(x-5)} \leftrightarrow \dfrac{-10}{x+5} = \dfrac{-10x-25}{x(x-5)} \leftrightarrow (-10x-25)(x+5) = (10x)(x-5)$

$\leftrightarrow -10x^2 - 50x - 25x - 125 = -10x^2 + 50x \leftrightarrow -125x = 125 \leftrightarrow x = -1$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

a) $3K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$, para K

$(3K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}})^2 = (\frac{1}{5})^2 \Longrightarrow 9K^{-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{25} \Longrightarrow K = 225L^{\frac{2}{3}}$

b) $(1 + \frac{r}{100})^t = 2$, para r

$\sqrt[t]{(1 + \frac{r}{100})^t} = \sqrt[t]{2} \Longrightarrow r = 100(\sqrt[t]{2} - 1)$

c) $p - abx_0^{b-1} = 0$, para x_0

$abx_0^{b-1} = p \Longrightarrow x_0^{b-1} = \frac{p}{ab} \Longrightarrow x_0 = \sqrt[b-1]{\frac{p}{ab}} = (\frac{p}{ab})^{\frac{1}{(b-1)}}$

d) $[(1-\lambda)a^{-p} + \lambda b^{-p}]^{-\frac{1}{p}} = c$, para b

$(1-\lambda)a^{-p}+\lambda b^{-p} = c^{-p} \Longrightarrow \lambda b^{-p} = c^{-p}-(1-\lambda)a^{-p} \Longrightarrow b^{-p} = \frac{c^{-p}-(1-\lambda)^{-p}}{\lambda} \Longrightarrow b = \lambda^{\frac{1}{p}}(c^{-p}-(1-\lambda)a^{-p})^{-\frac{1}{p}}$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

6. Solve the following quadratic equations.

a) $z^2 = 8z \Leftrightarrow z^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow z(z-8) = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ or } z = 8)$

b) $x^2 + 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2$ e $x_1.x_2 = -35 \Leftrightarrow (x_1 = -7$ ou $x_2 = 5)$

c) $p^2 + 5p - 14 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -5$ e $x_1.x_2 = -14 \Leftrightarrow (x_1 = -7$ ou $x_2 = 2)$

d)$12p^2 - 7p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.12.1}}{2.12} \Leftrightarrow p = \dfrac{7 \pm 1}{24} \Leftrightarrow (x_1 = \dfrac{7-1}{24} = \dfrac{1}{4}$ ou $x_2 = \dfrac{7+1}{24} = \dfrac{1}{3})$

e) $y^2 - 15 = 8y \Leftrightarrow y^2 - 8y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.(-15)}}{2.1} \Leftrightarrow y = \dfrac{8 \pm \sqrt{124}}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{31}}{2} \Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{31}$

f) $x^2 + x = 42 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1$ e $x_1.x_2 = -42 \Leftrightarrow (x_1 = -7$ ou $x_2 = 6)$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

Solve the following equations:

(a) $(x^2 - 4)\sqrt{5-x} = 0$

Como essa equação se iguala a zero, temos que um dos termos da multiplicação deve ser zero. Isso ocorre quando $x^2 - 4 = 0$, nesse caso $x^2 = 4$ e portanto $x = \pm 2$ e ocorre também quando $\sqrt{5-x} = 0 \Rightarrow (\sqrt{5-x})^2 = 0^2 \Rightarrow 5 - x = 0 \Rightarrow 5 = x$.

(b) $(x^4 + 1)(4 + x) = 0$

Um dos termos da multiplicação deve ser igual a zero para que o resultado final seja zero. Como $x^4 + 1 \neq 0$ pois x^4 nunca será um número negativo, devemos ter que $4 + x = 0 \Rightarrow x = -4$.

(c) $(1-\lambda)x = (1-\lambda)y$

Note que quando $\lambda = 1$ os dois lados da equação se igualam a zero de modo que x pode ser diferente de y. Entretanto para qualquer outro valor de λ devemos ter $x = y$. Isso pode ser verificado por meio da seguinte equação:

$(1-\lambda)x = (1-\lambda)y \Leftrightarrow \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow x = y.$ ■

Resolução (‖ Questão: 3.R.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Johnson investiu \$1500, parte desse valor a um uma taxa de juros de 15% e o resto a 20%. sua renda total no ano vinda dos dois investimentos foi de \$275. Quanto ele investiu a cada taxa de juros?

Seja x o valor investido à taxa de juros de 15% e y o valor investido à taxa de juros de 20%, podemos escrever:

$$0,15x + 0,2y = 275 \tag{1}$$

$$x + y = 1500 \tag{2}$$

Resolvendo a equação (2) para x, temos:

$$x = 1500 - y \tag{3}$$

Substituindo o valor de x da equação (3) na equação (1) temos:

$$0,15(1500 - y) + 0,2y = 275 \iff 225 + 0,05y = 275 \iff 0,05y = 50 \iff y = 1000 \tag{4}$$

Substituindo na equação (3) o valor de y encontrado na equação (4) temos:

$$x + 1000 = 1500 \iff x = 500 \tag{5}$$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

8. Consider the macro model described by the three equations

$Y = C + I + G, C = b(Y - T), T = tY$

Here the parameters b and t lie in the interval $(0, 1)$, Y is the gross domestic product (GDP), C is consumption, I is total investment, T denotes taxes, and G is government expenditure.

a) Express Y and C in terms of I, G, and the parameters.

Para Y temos:

$$Y = C + I + G \tag{6}$$

$$Y = b(Y - T) + G + I \tag{7}$$

$$Y = b(Y - tY) + G + I \tag{8}$$

$$Y = bY - btY + G + I \tag{9}$$

$$Y + btY - bY = G + I \tag{10}$$

$$Y(1 + bt - b) = G + I \tag{11}$$

$$Y[1 + b(t - 1)] = G + I \tag{12}$$

$$Y = \frac{G + I}{1 + b(t - 1)} \tag{13}$$

Para C temos:

$$C = b(Y - T) \tag{14}$$
$$C = b(Y - tY) \tag{15}$$
$$C = bY(1 - t) \tag{16}$$
$$C = b(C + I + G)(1 - t) \tag{17}$$
$$C = (bC + bI + bG)(1 - t) \tag{18}$$
$$C = bC + bI + bG - btC - btI - btG \tag{19}$$
$$C + btC - bC = bI + bG - btI - btG \tag{20}$$
$$C(1 + bt - b) = bI + bG - btI - btG \tag{21}$$
$$C = \frac{bI + bG - btI - btG}{1 + bt - b} \tag{22}$$
$$C = \frac{b(I + G)(1 - t)}{1 - b(1 - t)} \tag{23}$$

b)What happens to Y and C as t increases?

Na equação:

$$Y = \frac{G + I}{1 + b(t - 1)} \tag{24}$$

Observamos que caso t aumente, então o denominador também aumenta, logo Y diminui.

Para C ao analisarmos a equação abaixo:

$$C = b(Y - T) \tag{25}$$
$$C = b(Y - tY) \tag{26}$$
$$C = bY(1 - t) \tag{27}$$

Percebemos que caso t aumente, então C diminui.

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

a) If $5^{3x} = 25^{y+2}$ and $x - 2y = 8$ what is $x - y$?

$5^{3x} = 25^{y+2} \Leftrightarrow 5^{3x} = (5^2)^{y+2} \Leftrightarrow 5^{3x} = (5)^{2y+4} \Leftrightarrow 3x = 2y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{2y+4}{3}$

$x - 2y = 8 \Leftrightarrow \frac{2y+4}{3} - 2y = 8 \Leftrightarrow \frac{2y+4-6y}{3} = \frac{24}{3} \Leftrightarrow -4y + 4 = 24 \Leftrightarrow y = \frac{20}{-4} \Leftrightarrow y = -5$

$x - 2y = 8 \Leftrightarrow x - 2.(-5) = 8 \Leftrightarrow x = -2$

So, $x - y = -2 - (-5) = 3$

■

Resolução (‖ Questão: 3.R.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Solve the following systems of equations:

a) $\begin{array}{r} (i)\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=4 \\ (ii)\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=19 \end{array}$

Fazendo a $2(i)+3(ii)$:

$\frac{4}{x}+\frac{6}{y}+\frac{9}{x}-\frac{6}{y}=8+57 \iff \frac{13}{x}=65 \iff x=\frac{1}{5}$ e $y=\frac{-1}{2}$

b) $\begin{array}{r} (i)3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=2 \\ (ii)2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=\frac{1}{4} \end{array}$

Para $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Fazendo $3(i)+2(ii)$,

$9\sqrt{x}+6\sqrt{y}+4\sqrt{x}-6\sqrt{y}=6+\frac{1}{2} \iff 13\sqrt{x}=\frac{13}{2} \iff \sqrt{x}=\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{4}$ e $y=\frac{1}{16}$

c) $\begin{array}{r} (i)x^2+y^2=13 \\ (ii)4x^2-3y^2=24 \end{array}$

Fazendo $3(i)+(ii)$:

$3x^2+3y^2+4x^2-3y^2=63 \iff 7x^2=63 \iff x=3$ ou $x=-3$ e $y=2$ ou $y=-2$

$\blacksquare$