Mecânica Quântica I - 4302403

$4^{\underline{a}}$ lista

1) a) Use a relação :

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,Q]\rangle + \langle\frac{\partial Q}{\partial t}\rangle$$

para o operador $\vec{r}.\vec{p}$ para provar o **teorema do virial** tridimensional para estados estacionários:

$$2\langle T\rangle = \langle \vec{r}.\vec{\nabla}V\rangle.$$

b) Aplique o teorema do virial ao oscilador harmônico tridimensional e mostre que nesse caso $\langle T\rangle = \langle V\rangle = E_n/2$.
c) Aplique o teorema do virial ao átomo de hidrogênio e mostre que nesse caso $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle = -2E_n$.

2) (Q9 EUF 2019) Considere um oscilador quântico unidimensional de massa m e frequência angular ω descrito pelo hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

onde x e p são os operadores canônicos conjugados de posição e momento linear da partícula, respectivamente. Os autoestados de energia são denotatos por $|n\rangle$ $(n = 0, 1, ...)$, com os correspondentes autovalores $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Esse problema também pode ser formulado em termos de operadores não hermitianos a e $a^\dagger$ sendo $a^\dagger$ o adjunto hermitiano de a e

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_x.$$

Verifica-se que a ação desses operadores sobre os autoestados de energia satisfaz as relações

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

a) Obtenha a relação de comutação entre a e $a^\dagger$ e reescreva o hamiltoniano em termos de a e $a^\dagger$. Porque o operador $N = a^\dagger\, a$ é denominado *operador número*?

Considere agora o **oscilador harmônico bidimensional**, cujo hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 x^2$$

b) Apresente argumentos que justifiquem o fato de que os autoestados de energia do problema bidimensional podem ser escritos como $|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle\otimes|n_y\rangle$, com $|n_x\rangle$ e $|n_y\rangle$ sendo autoestados de osciladores harmônicos unidimensionais de frequências angulares ω_x e ω_y respectivamente. Obtenha os autovalores de energia do problema bidimensional.
c) Suponha que o estado da partícula no instante $t = 0$ seja dado por

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|n_x = 2, n_y = 0\rangle + 2|n_x = 1, n_y = 1\rangle\right).$$

Escreva o estado $|\psi(t)\rangle$ para um tempo genérico $t > 0$. Se uma medição da energia total so sistema for feita no instante $t' > 0$, qual a probabilidade do estado logo após a medicão apresentar valor esperado de p_x^2 dado por $\langle p_x^2 \rangle = 5m\hbar\omega_x/2$?
d) Para o caso do potencial isotrópico ($\omega_x = \omega_y = \omega$), determine o grau de degenerescência do n-ésimo estado excitado.

3) (Q3 EUF 2017) Considere a dinâmica quântica não relativística de uma partícula de massa m num potencial harmônico tridimensional isotrôpico de frequência angular ω dado por

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

a) Escreva os autoestados $|n_1,\ n_2,\ n_3\rangle$ da hamiltoniana total H em termos dos autoestados de osciladores harmônicos unidimensionais $|n_i\rangle$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ e também as autoenergia de H.
b) Uma das autoenergias do sistema é $\frac{7}{2}\hbar\omega$. Qual a sua degenerescência? Quais são os autoestados com essa autoenergia?
c) O observável H é medido quando o sistema se encontra no estado (considere os autoestados $|n_1,\ n_2,\ n_3\rangle$ normalizados)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0,\ 0,\ 1\rangle + \frac{1}{2}|0,\ 1,\ 0\rangle + \frac{1}{2}|0,\ 1,\ 1\rangle.$$

Que resultados podem ser obtidos e com quais probabilidades?
d) Suponha que a medida do ítem c) resultou no valor $\frac{5}{2}\hbar\omega$. Considere como $t = 0$ o instante imediatamente posterior a essa medida. Determine o estado do sistema $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$.

4) (Q3 EUF 2019) Considere o problema quântico de uma partícula de massa m que se movimenta no plano xy dentro de uma caixa bidimensional retangular, de forma que suas coordenadas x e y estão limitadas aos intervalos $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$ (o potencial é nulo dentro da caixa e infinito fora).
a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a função de onda da partícula.
b) Encontre as autofunções e autovalores de energia. Para isso, escreva a solução na forma $\Psi_{n_x n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\ \varphi_{n_y}(y)$, sendo n_x e n_y números quânticos pertencentes aos números naturais não nulos N^* $(n_x, n_y = 1, 2, 3...)$. Normalize as autofunções $\Psi_{n_x n_y}(x, y)$.
c) Suponha que agora no instante $t = 0$ a partícula encontra-se no estado dado por $\Phi(x, y) = C\Psi_{11}(x, y) + D\Psi_{12}(x, y)$, onde C e D são constantes reais. Que resultados poderiam ser obtidos em uma medida da energia da partícula nesse instante e quais as suas probabilidades?
d) O estado descrito pela função de onda do ítem c) é um estado estacionário? Em caso negativo encontre a função de onda $\Phi(x, y, t)$ para um instante $t > 0$ qualquer.

5) Os operadores de levantamento e abaixamento mudam o valor de m de uma unidade:

$$L_\pm|l\ m\rangle = c_\pm|l\ m \pm 1\rangle,$$

onde $c_\pm$ é uma constante. Mostre que se as funções , $|l\ m\rangle$, são normalizadas então:

$$c_\pm = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

Dica: Observe que $L_\pm$ é o hermitiano conjugado de $L_\mp$, e use a relação : $L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$.
Mostre também que, com esse resultado, é imediato obter: $L_-|l\ -l\rangle = 0$, $L_+|l\ l\rangle = 0$.

6) a) Começando pelas relações de comutação canônicas para posição e momento mostre que:

$$[L_z, x] = i\hbar y; \quad [L_z, y] = -i\hbar x; \quad [L_z, z] = 0,$$

$$[L_z, p_x] = i\hbar p_y; \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x; \quad [L_z, p_z] = 0.$$

b) Utilize os resultados de a) para mostrar que $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$.
c) Utilize os resultados de a) para mostrar que $[L_z, r^2] = [L_z, p^2] = 0$.
d) Usando o resultado de c) mostre que se $V = V(r^2)$, ou seja, se V depende apenas do módulo de $\vec{r}$ então $[H, L_z] = 0$.
e) Generalize o resultado de d) para mostrar que para $V = V(r)$, $[H, \vec{L}] = 0$.

7) Mostre que
a) para potenciais esfericamente simétricos

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = 0.$$

b) para potenciais $V = V(\vec{r})$

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{\tau} \rangle,$$

onde $\vec{\tau} = \vec{r} \times (-\nabla V)$ é o torque. Esse resultado é o teorema de Ehrenfest para o torque.

8) Uma partícula num potencial esféricamente simétrico está num dos autoestados de L^2 e L_z com autovalores $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar m$, respectivamente.
a) Prove que os valores esperados entre os estados $|l\ m\rangle$ satisfazem:

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \quad \langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{[l(l+1) - m^2]\hbar^2}{2}$$

b) Usando esses resultados cheque a relação

$$\langle (\Delta L_x)^2 \rangle \langle (\Delta L_y)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [L_x, L_y] \rangle|^2$$

9) Duas partículas de massa m estão ligadas às extremidades de uma barra rígida, sem massa, de comprimento a. O sistema é livre para girar em três dimensões em torno do centro, mas o ponto central é fixo.
a) Mostre que a hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{L^2}{ma^2}.$$

Dica: expresse a energia cinética clássica em termos do momento angular total.
b) Quais são as auto-funções e as auto-energias desse sitema?
c) Qual é a degenerescência do l-ésimo nível de energia?