Sistemas Lineares 2009 F. Pait

Lista de exercícios 4

1. Mostre que controlabilidade e observabilidade não se alteram por mudança de variáveis.

2. Para quais valores do parâmetros α o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

é observável? E controlável?

3. O sistema linear

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

é controlável em $[0, 1]$ para $b_1(t)$ constante? E para $b_1(t)$ uma função contínua arbitrária?

4. Mostre que $\begin{bmatrix} \Phi_A(t,\tau) & \Phi_A(t,\tau)W(\tau,t) \\ 0 & \Phi_A^T(\tau,t) \end{bmatrix}$ é a matriz de transição de $\begin{bmatrix} A(t) & B(t)B^T(t) \\ 0 & -A^T(t) \end{bmatrix}$, onde $\Phi_A(t,\tau)$ e $W(\tau,t)$ são respectivamente a matriz de transição de estado e o gramiano de controlabilidade do sistema $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$.

5. Mostre que o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

é controlável se e somente se

$$\dot{x}(t) = (A - \beta I)x(t) + Bu(t)$$

for controlável, para uma constante real β.

6. Suponha que o sistema linear invariante no tempo de dimensão n com uma entrada e uma saída

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

é controlável e observável. Mostre que A não comuta com bc para $n \geq 2$.

7. Suponha que o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

é controlável e que A tem autovalores com parte real negativa. Usando o gramiano, mostre que existe uma matriz Q simétrica e positiva definida tal que

$$AQ + QA^T + BB^T = 0.$$

8. Escreva uma $G(t, \sigma)$ que não possa ser expressa como a matriz de ponderação de algum sistema linear.

9. Para quais valores do parâmetros α o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

é uma realização mínima de seu comportamento entrada-saída?

10. Mostre que o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

com $n_u = n_y$ é mínimo se e somente se

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A + BC)z(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cz(t) \end{aligned}$$

for mínimo.

11. Construa realizações da função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

que sejam:

   (a) controlável e observável;
   (b) controlável mas não observável;
   (c) observável mas não controlável; e
   (d) nem obervável nem controlável.

12. Mostre que a matriz de ponderação da equação linear de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + e^{Ft}Bu(t) \\ y &= Ce^{-Ft}x(t) \end{aligned}$$

admite uma realização invariante no tempo se $AF = FA$, e construa uma tal realização.

13. Considere a mudança de variáveis $z(t) = P^{-1}x(t)$, onde $P = e^{(A-A^T)t/2}$, aplicada ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t). \end{aligned}$$

Mostre que a nova realização obtida por mudança de variáveis tem coeficientes limitados, e discuta as suas simetrias.

14. Mostre que a função de ponderação $G(t, \sigma)$ admite uma realização invariante no tempo se e somente se $G(t, \sigma)$ é realizável, continuamente diferenciável em relação a ambas as variáveis, e para quaisquer t, σ, e τ,

$$G(t + \tau, \sigma + \tau) = G(t, \sigma).$$