Mecânica Quântica I - 4302403

3ª lista

1) Considere o potencial função delta dobrado:

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)],$$

onde a e α são constantes positivas.
a) Esboce esse potencial.
b) Quantos estados ligados existem?

2) a) Construa $\psi_2(x)$ para o segundo estado excitado do oscilador harmônico.
b) Faça um esboço de ψ_0, ψ_1 e ψ_2.
c) Verifique diretamente, por meio de integração explícita, a ortogonalidade desses estados. Dica: não se esqueça de considerar a paridade dos estados.

3) a) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ para os estados

$$\psi_0(x) = \alpha e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\xi^2/2}$$

onde $\alpha = (m\omega/\pi\hbar)^4$ e $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$, por meio de integração explícita.
b) Mostre que para esses estados vale o princípio da incerteza: $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$.
c) Calcule $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ para esses estados (nenhuma nova integração é necessária). A soma deles é o esperado?

4) Mostre que $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ no n-ésimo estado do oscilador harmônico são dados por:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \langle p^2 \rangle = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Confira que o princípio da incerteza é obedecido.

5) Uma partícula no potencial do oscilador harmônico está no estado

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)].$$

a) Calcule A.
b) Calcule $\Psi(x,t)$ e $|\Psi(x,t)|^2$
c) Mostre que no estado $\Psi(x,t)$

$$\langle x \rangle = \frac{24}{25}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t), \quad \langle p \rangle = -\frac{24}{25}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(\omega t)$$

d) Mostre que o Teorema de Ehrenfest, $d\langle p \rangle/dt = -\langle \partial V/\partial x \rangle$, é válido para essa função de onda.
e) Ao medir a energia da partícula que valores voce poderá obter, e com quais probabilidades?

6) (EUF) Considere a dinâmica quântica unidimensional de uma partícula de massa m sob a ação de um potencial harmônico. Seu hamiltoniano é dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$

onde ω é a frequência do oscilador e

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p.$$

Os autoestados $|n\rangle$ $(n = 0,\ 1, ...)$ do hamiltoniano são não degenerados, e são também autoestados do operador número $N = a^\dagger a$, e satisfazem as relações :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,\ \ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

a) Calcule os elementos de matriz dos operadores x e p na base dos autoestados de H.
b) Calcule o valor esperado do operador x^2 em um autoestado qualquer $|n\rangle$.
c) Calcule a razão entre a energia total média e a energia potencial média para um autoestado qualquer $|n\rangle$. Deduza dai o valor da energia cinética média e do valor esperado do operador p^2 em um autoestado qualquer $|n\rangle$.

7) (Q9 EUF 2016) Seja um oscilador com frequência ω, massa m e com hamiltoniano

$$H = (1/2 + N)\hbar\omega,$$

onde $N = a^\dagger a$ com $N|n\rangle = n|n\rangle$. Os operadores abaixamento e levantamento satisfazem:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,\ \ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Supondo que o oscilador esteja em um estado coerente $|z\rangle$ definido por

$$a|z\rangle = z|z\rangle,$$

responda:
a)Qual é o valor de $\langle z|N|z\rangle$ para $z = \frac{1}{2}\exp(i\pi/4)$, supondo que $|z\rangle$ esteja normalizado?
b) Supondo que em $t = 0$ o oscilador esteja no estado fundamental $|0\rangle$, determine o estado no instante $t = 1/10$s para $\omega = 5\pi$ s^{-1}.
c) Quanto vale c_n (como função de n e z) para que o estado coerente $|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$ esteja normalizado? (Lembre-se que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$)
d) Use o resultado do ítem anterior e calcule o valor numérico de $|\langle z'|z\rangle|^2$ para $z = \frac{1}{2}\exp(i\pi/4)$ e $z' = \frac{1}{4}\exp(i\pi/4)$.

8) Uma partícula está no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω quando, repentinamente, a frequência do oscilador duplica sem, inicialmente, mudar a função de onda. Quais são as probabilidades de, numa medida de energia, se encontrar os valores: $\hbar\omega/2$ e $\hbar\omega$?

9) Mostre que, para uma partícula no estado fundamental do oscilador harmônico de frequência ω, a probabilidade de encontrar a partícula fora da região clássicamente permitida é:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty d\xi\ e^{-\xi^2} = 0.157$$

10) Calcule as energias permitidas do meio oscilador harmônico:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & para \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & para \quad x > 0 \end{cases},$$

11) Mostre que:
a) $H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2.$
b) $H_{2n+1}(0) = 0,\ H_{2n}(0) = (2n)!(-1)^n/n!,\ H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$

12) Calcule $\psi_0,\ \psi_1$ e ψ_2 diretamente da expressão:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

13) (Q4 EUF 2019) A função de onda que descreve a dinâmica quântica unidimensional de uma partícula de massa m como função do tempo na presença de um potencial confinante é

$$\Psi(x,t) = C\left(x^2 - \frac{\hbar}{4am}\right) e^{-a\left[(mx^2/\hbar)+5it\right]},$$

onde C e a são constantes reais positivas com dimensões apropriadas.
a) Através de análise dimensional, determine a dimensão da constante C.
b) A partícula está num autoestado de energia? Se sim, qual é o autovalor de energia correspondente? Justifique suas respostas.
c) Determine os desvios padrão da posição x e do momento linear p da partícula, sabendo que os valores esperados de x^2 e p^2 para esse estado são $\langle x^2 \rangle = C^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{32}\left(\frac{\hbar}{am}\right)^{7/2}$ e $\langle p^2 \rangle = 40\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\hbar^2}{C^2}\left(\frac{am}{\hbar}\right)^{7/2}$. Os desvios padrão são consistentes com o primcípio da incerteza? Justifique sua resposta.
d) Determine a função energia potencial da partícula.