Lista de exercícios 3

1. Uma transformação de Lyapunov é uma matriz de mudança de estados $P(t)$ tal que, para cada t,
$$||P(t)|| \leq \rho, |\det(P(t))| \geq \eta$$
para constantes ρ e η. Mostre que essa condição é equivalente à existência de uma constante μ tal que
$$||P(t)|| \leq \mu, ||P^{-1}(t)|| \geq \mu.$$

2. Determine se a equação de estados linear
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$
é *uniformemente* exponencialmente estável para os seguintes valores de $a(t)$:
   (a) 0
   (b) -1
   (c) $-t$
   (d) $-e^{-t}$
   (e) $\begin{cases} -1, \ t < 0 \\ -e^{-kt}, \ t \geq 0 \end{cases}$

3. Se $A(t) + A^T(t) = 0$, mostre que $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ é uniformemente estável. Discuta o caso em que A é simétrica, $A(t) = A^T(t)$.

4. Nos 2 casos do problema acima, obtenha, se houver, uma matriz $Q(t)$ que estabelece estabilidade uniforme. É possível encontrar $Q(t)$ que estabelece estabilidade exponencial?

5. Utilize a matriz
$$Q(t) = \begin{bmatrix} 2a(t)+1 & 1 \\ 1 & \frac{a(t)+1}{a(t)} \end{bmatrix} x(t)$$
para obter condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema linear
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -a(t) \end{bmatrix} x(t),$$

6. Generalize o teorema de estabilidade visto em aula (Theorem 7.8 do texto) usando a matriz
$$Q(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\sigma, t) P(\sigma) \Phi(\sigma, t) dt$$
com condições apropriadas para a matriz $P(\sigma)$.

7. Resolva a equação matricial $FQ + QA + M = 0$ na incógnita Q em termos das matrizes quadradas constantes A, F, e M. A fórmula explícita da solução dependerá das matrizes de transição de estado de A e F. Quais as condições para que exista uma solução única para a equação matricial, e a fórmula esteja correta?