

Fundamentos de Processamento Gráfico

Helton H. Bísaro ; Fátima Nunes

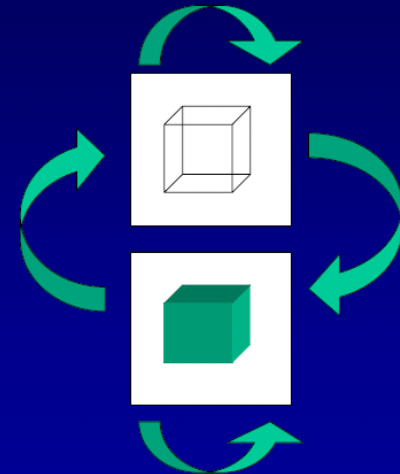
12 de setembro de 2019

Áreas Correlatas

Modelagem Geométrica

Visão
Computacional

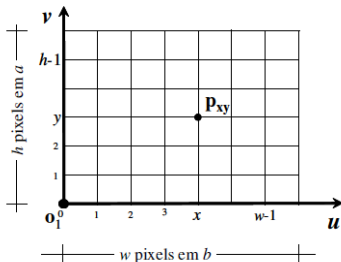
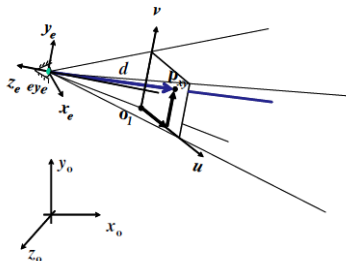
Computação
Gráfica



Processamento de Imagens

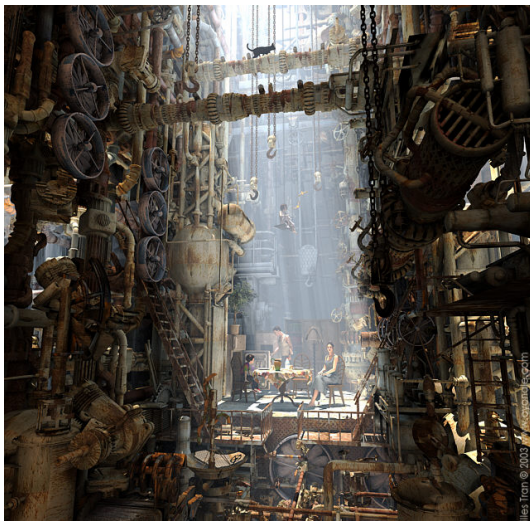
Pipeline de Visualização

Projeção de um ponto.



Pipeline de Visualização

Uma cena um pouquinho mais complexa.

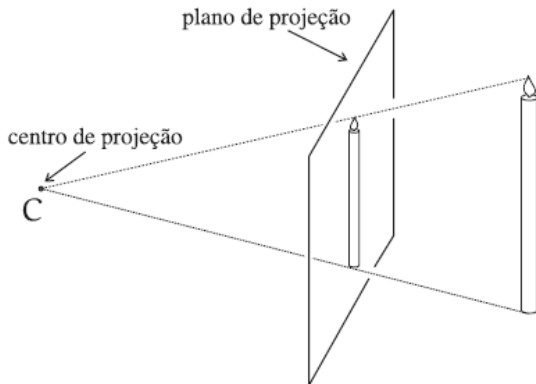


Pipeline de Visualização

- **Espaço do Objeto:** Onde cada objeto é modelado. Ele possui um sistema de coordenadas associado à geometria do objeto.
- **Espaço de Cena:** É um sistema de coordenadas global
- **Espaço de Câmera:** Esse espaço é determinado pelo sistema de coordenadas associado à projeção cônica da câmera virtual
- **Espaço Normalizado:** Espaço utilizado para operações de recorte de objetos que estão fora do campo de visão da câmera
- **Espaço de Ordenação:** Espaço que facilita a operação de visibilidade (verifica se um objeto está ou não na frente de outro)
- **Espaço de Imagem:** Espaço da tela virtual no plano de projeção da câmera virtual
- **Espaço do Dispositivo:** (Espaço de Tela) Espaço associado à superfície de exibição do dispositivo de saída gráfica

Pipeline de Visualização Espaço de Cena:

Definição da Câmera Virtual



Pipeline de Visualização Espaço de Câmera:

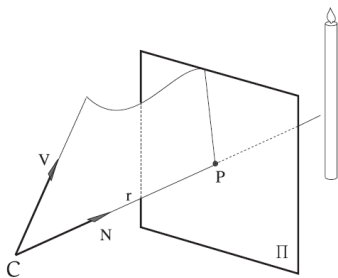
Dados:

Centro ótico C ;

Ponto de visão P ;

Vetor Vertical V ;

Precisamos definir um sistema de coordenadas ortonormais com centro em C .



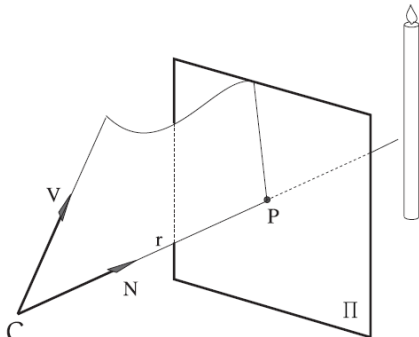
Pipeline de Visualização Espaço de Câmera:

Definimos

O vetor $n = \frac{P-C}{\|P-C\|}$;

O vetor $v = \frac{V - \langle V, n \rangle n}{\|V - \langle V, n \rangle n\|}$;

O vetor $u = v \times n$.



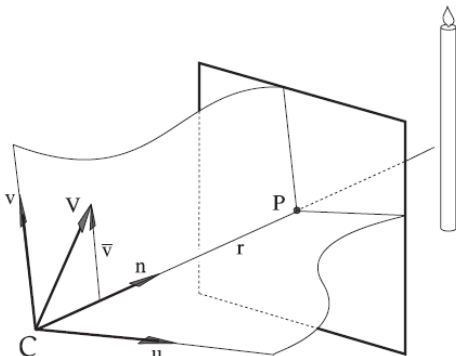
Pipeline de Visualização Espaço de Câmera:

Definimos

O vetor $n = \frac{P-C}{\|P-C\|}$;

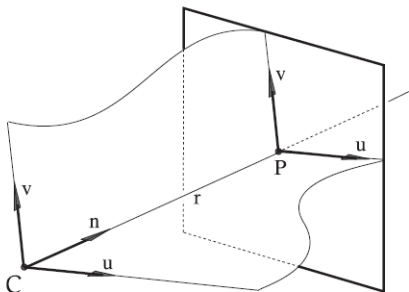
O vetor $v = \frac{V - \langle V, n \rangle n}{\|V - \langle V, n \rangle n\|}$;

O vetor $u = v \times n$.



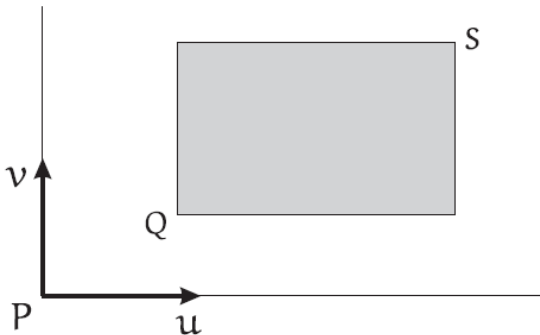
Pipeline de Visualização Espaço de Imagem:

O Espaço de Câmera define naturalmente uma sistema de coordenadas no plano de projeção.



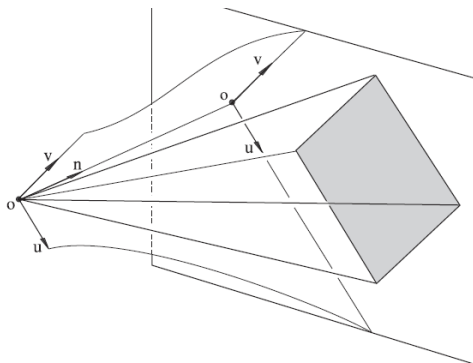
Pipeline de Visualização Espaço de Imagem:

O Espaço de Câmera define naturalmente uma sistema de coordenadas no plano de projeção.



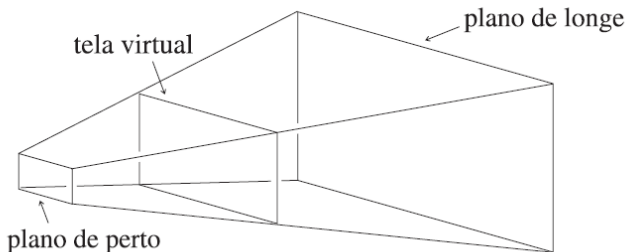
Pipeline de Visualização Espaço de Imagem:

Pirâmide de Visão.



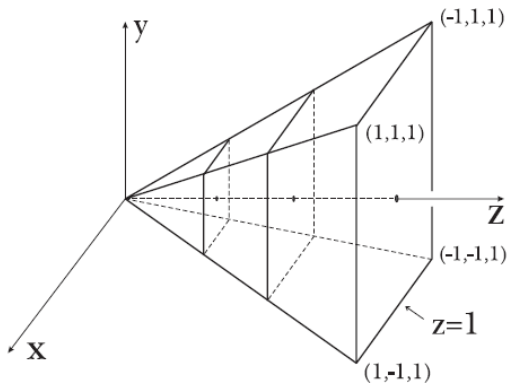
Pipeline de Visualização Espaço de Imagem:

Volume de Visão:
Operações de recorte e de
ordenação.



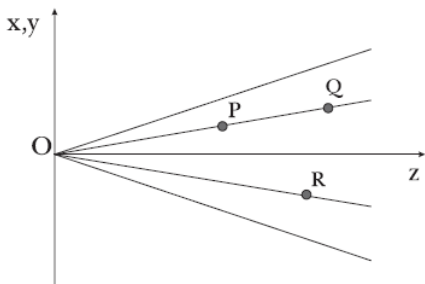
Pipeline de Visualização Espaço de Normalizado:

Volume de Visão:
Operações de recorte.

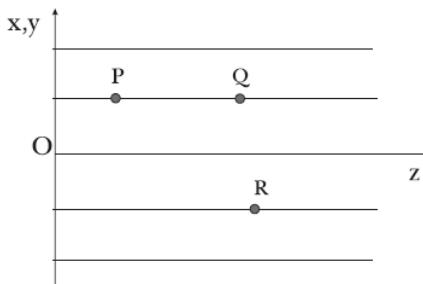


Pipeline de Visualização Espaço de Ordenação:

Volume de Visão:
Operações ordenação.



(a)



(b)

Pipeline de Visualização Exercício:

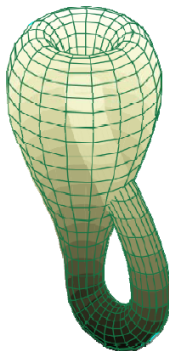
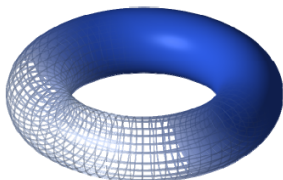
- 1 Verifique que a base $\{C, n, v, n\}$ do espaço de câmera é ortonormal;

Modelagem

A coleção de métodos para descrever a forma e outras características geométricas de um objeto é conhecida como **Modelagem Geométrica**

Modelagem

A geometria pode ser complicada.



Modelagem Histórico:

- Modelagem por arames (Wireframe):
 - Representa um objeto por arestas e pontos sobre o objeto;
 - Gera modelos ambíguos.
- Modelagem por superfície (década de 60):
 - Representa um objeto por meio de sua descrição matemática ;
 - Paramétrica \times Implícita.
- Modelagem por sólidos(década de 70):
 - Contém informações sobre o fechamento e conectividade do objeto.
- Modelagem de dimensão mista ou **Non Manifold**:
 - Permite modelar objetos com estruturas internas ou elementos pendentes de dimensão diferente.
 - Delimita o sólido por superfícies que não são necessariamente linear por partes

Modelagem : Sólidos

Propriedade Requeridas.

1 Rigidez:

- Distância e ângulos fixos no espaço Euclidiano;
- A forma deve ser invariante sobre transformações rígidas.

2 Finitude:

- O objeto deve estar contido em uma porção limitada do espaço;
- O objeto deve ser descrito através de um número finito de símbolos;

3 Homogeneidade:

- O objeto não deve ter partes isoladas ou penduradas em sua fronteira.

4 Determinismo de fronteira:

- Deve ser possível descrever a fronteira e, conseqüentemente, o interior e exterior do objeto.

5 Fechamento sobre operações:

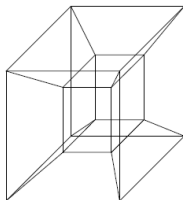
- O resultado de operações geométricas sobre objetos válidos devem ser ainda objetos válidos.

Quatro Categorias de Representação.

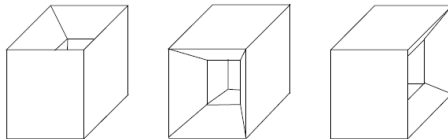
- ❶ **Modelos de Arame:** (Wireframe);
- ❷ **Modelos de Decomposição:** (BSP-trees, octrees, etc..);
- ❸ **Modelos de Superfícies:** (Surface Modeling);
- ❹ **Modelos de Sólido:** (Solid Modeling);
 - Modelos Construtivos (CSG - Constructive Solid Geometry);
 - Modelos de Fronteira (B-rep: Boundary Representation);
 - Modelos Híbridos (CSG e B-rep);
 - Modelos Baseados em Features (Feature Based Modeling);
 - Modelos de Dimensão Mista (Non Manifold).

Modelagem : WireFrame

Ambiguidade de representação.



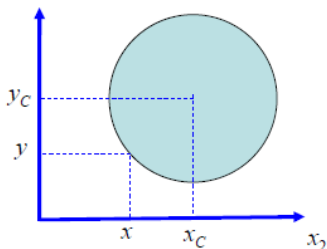
Modelo



Objetos representados

Modelagem:

Representação Implícita



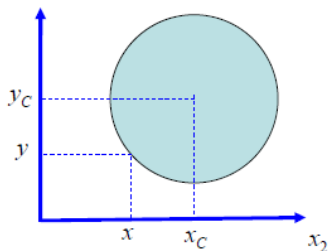
Equação da circunferência

Centro (x_c, y_c) e raio r .

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Modelagem:

Representação Paramétrica



Equação da circunferência

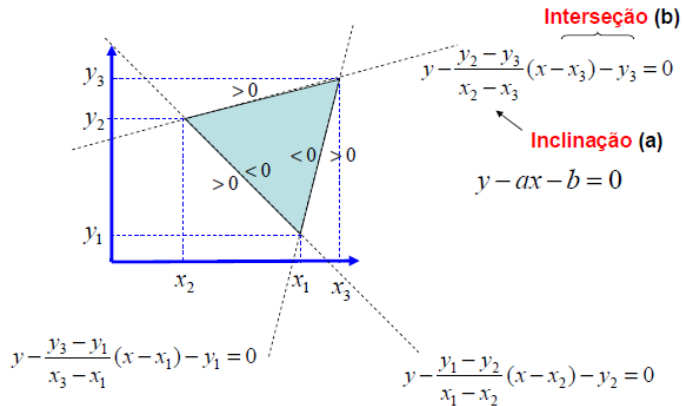
Centro (x_c, y_c) e raio r .

$$x = x_c + r \cos(\theta)$$

$$y = y_c + r \sin(\theta)$$

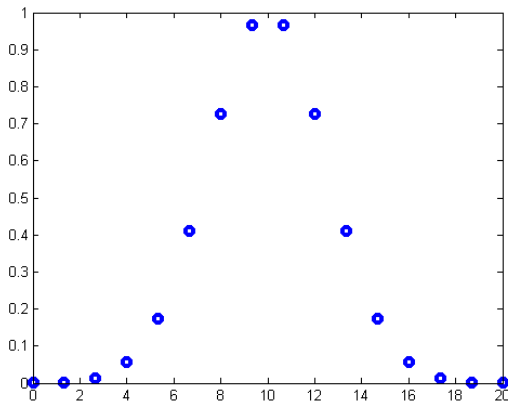
Modelagem:

Representação Implícita de um Triângulo.



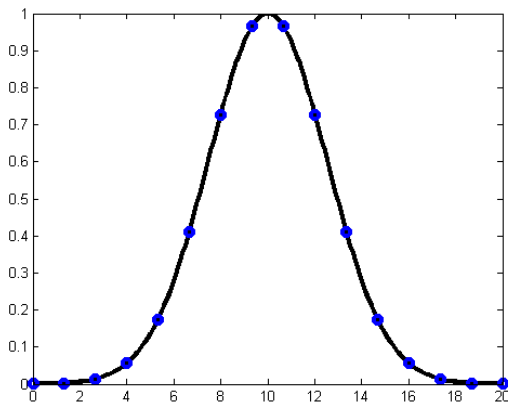
Modelagem: Interpolação

Pontos sobre uma curva.



Modelagem: Interpolação

Pontos sobre uma curva.



Modelagem: Interpolação

Polinômio Interpolador:

Dado um conjunto : $P_0 = \{(x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)\}$ queremos ajustar um polinômio da forma: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Sabemos que:

$$p(x_0) = y_0 ;$$

$$p(x_1) = y_1 ;$$

$$\vdots$$

$$p(x_n) = y_n.$$

Ou ainda:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} = y_1 ;$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_2 ;$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n.$$

Modelagem: Interpolação

Polinômio Interpolador:

Na forma Matricial.

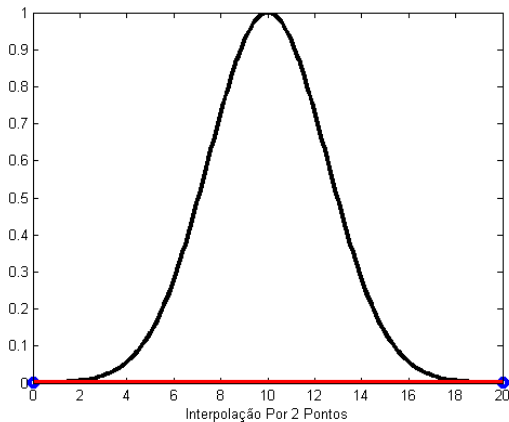
$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^{n-1} \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ou seja. $Ma = y$

Trabalho : Inverter a matriz M , e encontrar o vetor $a = M^{-1}y$.

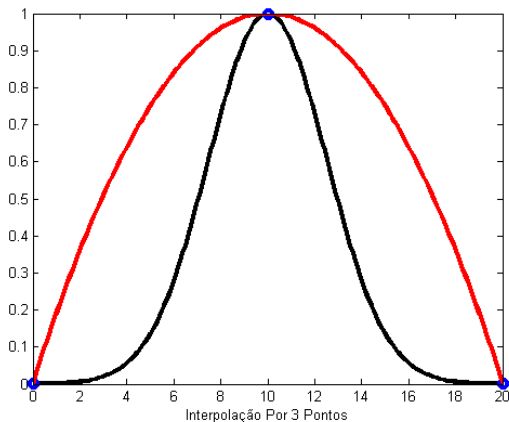
Modelagem: Interpolação

Intrepolação por dois pontos



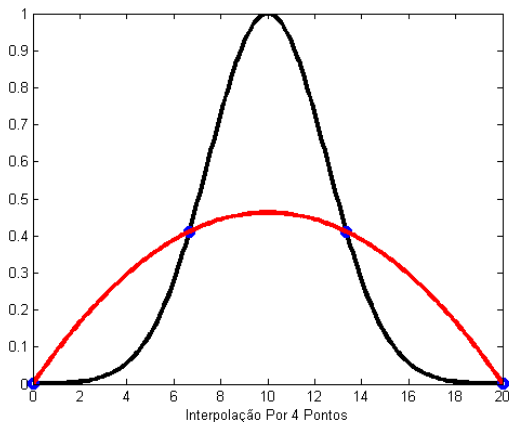
Modelagem: Interpolação

Intrepolação por três pontos



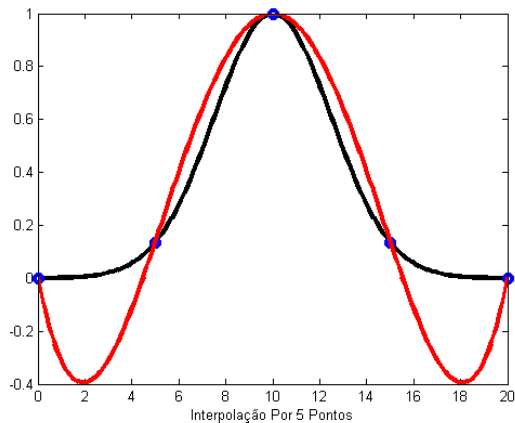
Modelagem: Interpolação

Intrepolação por quatro pontos



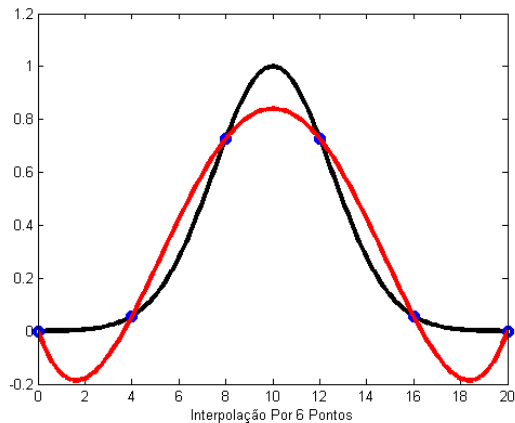
Modelagem: Interpolação

Intrepolação por cinco pontos



Modelagem: Interpolação

Intrepolação por seis pontos



Modelagem: Bézier

Curva de Bézier:

Dado um conjunto : $P_0 = \{(x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)\}$.

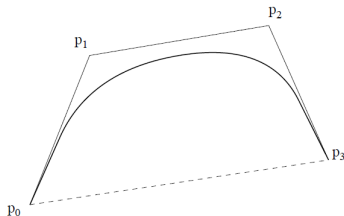


Figura: Polígono de Controle

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{n,i}(t), \text{ onde:}$$

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0, 1].$$

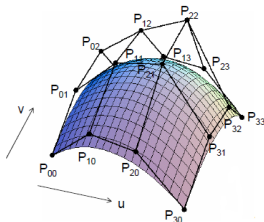
Modelagem: Bézier

Curva de Bézier - Propriedades:

- 1 **É polinomial**. Se a quantidade de pontos de controle é $(n + 1)$, o grau do polinômio é n .
- 2 Acompanha a forma do polígono de controle. Está no **fecho convexo** dos pontos de controle.
- 3 Influência **global** de cada ponto de controle.
- 4 **Pontos extremos** da curva e do polígono coincidem.
- 5 **Tangente** nos pontos extremos coincidem com os segmentos extremos do polígono de controle.
- 6 A curva **não oscila** mais que o polígono de controle.
- 7 São **invariantes** sob transformações afins.

Modelagem: Bézier

Superfície de Bézier :



$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m B_{m,j}(v) \left(\sum_{i=0}^n P_i B_{n,i}(u) P_{ij} \right) \text{ onde:}$$
$$\begin{cases} B_{m,j}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j} \\ B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-1} \end{cases}$$

Modelagem: B-Splines

Curva B-Splines :

Uma Curva B-Spline de ordem $k, 2 \leq k \leq n+1$, é definida por :

$P : [t_0, t_{n+k}] \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i N_i^k(t)$$

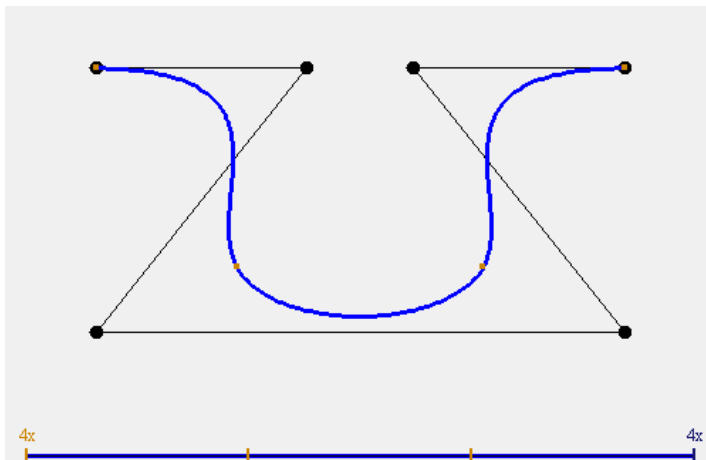
onde p_0, p_1, \dots, p_n são pontos de controle, e as funções $N_i^k(t)$ são definidas recursivamente:

$$\begin{aligned} N_i^1(t) &= \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ N_i^k(t) &= \frac{(t-t_i)N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-t)N_{i+1}^{k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}} \end{aligned} \quad (1)$$

Sendo que $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}$ são os nós da parametrização.

Modelagem: B-Spline

B-Spline - Exemplo:



Modelagem: B-Splines

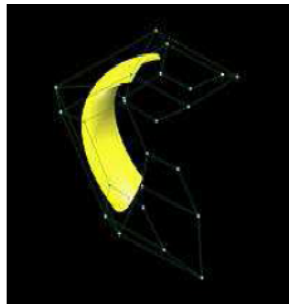
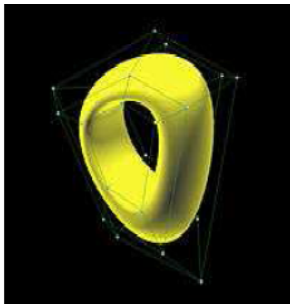
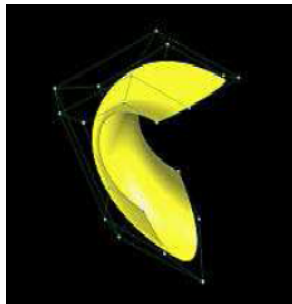
B-Splines - Propriedades:

- 1 **É polinomial**. P é um polinômio de grau k em $[t_i, t_{i+1}]$.
- 2 **A derivada** de ordem $k - 2$ é contínua em $[t_0, t_{n+k}]$.
- 3 $\sum_{i=0}^n N_i^k(t) = 1$ para todo $t \in [t_0, t_{n+k}]$ e $1 \leq k \leq n + 1$.
- 4 $\sum_{i=0}^n N_i^k(t) \geq 0$ para $t \in [t_0, t_{n+k}]$ e $1 \leq k \leq n + 1$.
- 5 Acompanha a forma do polígono de controle. Está no **fecho convexo** dos pontos de controle.
- 6 Influência **local** de cada ponto de controle.
- 7 **Pontos extremos** da curva e do polígono coincidem.
- 8 **Tangente** nos pontos extremos coincidem com os segmentos extremos do polígono de controle.
- 9 A curva **não oscila** mais que o polígono de controle.
- 10 São **invariantes** sob transformações afins.

Modelagem: B-Splines

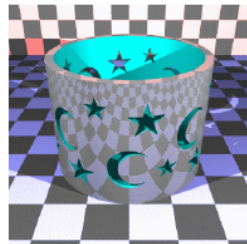
B-Splines - Superfícies:

São definidas de forma idêntica à superfície de Bézier



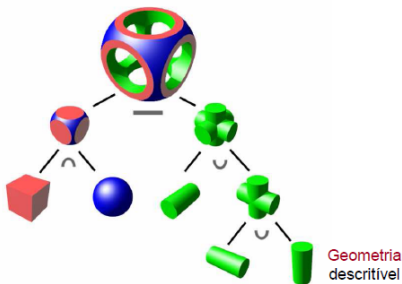
Modelagem: Geometria Complexa

Não Há funções capazes de descrevê-las completamente

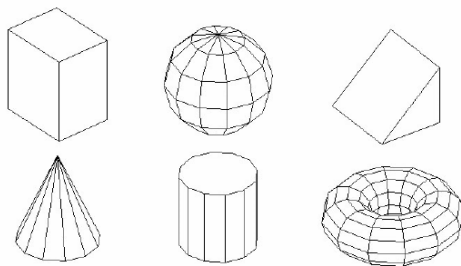


Modelagem: Geometria Complexa

Primitivas Geométricas + Operações Booleanas

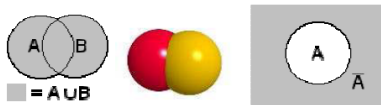


Primitivas Geométricas + Operações Booleanas



Modelagem: Geometria Complexa

Primitivas Geométricas + Operações Booleanas



Modelagem: Geometria Complexa

Primitivas Geométricas + Operações Booleanas

Se f_1 e f_2 são funções implícitas que definem dois sólidos ($f_1(p) \leq 0$ e $f_2(p) \leq 0$). As operações de composição são definidas como:

$$\text{União:} \quad f = f_1 \cup f_2 = \min \{f_1, f_2\}$$

$$\text{Intersecção:} \quad f = f_1 \cap f_2 = \max \{f_1, f_2\}$$

$$\text{Diferença:} \quad f = f_1 \setminus f_2 =_1 \cup \mathbb{C} f_2 = \max \{f_1, -f_2\}$$

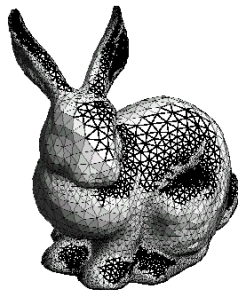
Modelagem: Geometria Complexa

Duas Opções: Malhas, ou Decomposição Espacial



Modelagem: Geometria Complexa

Primeira: Malhas



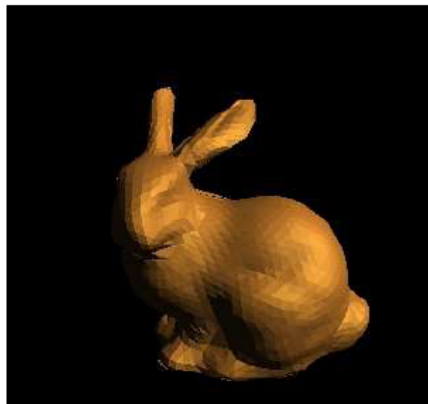
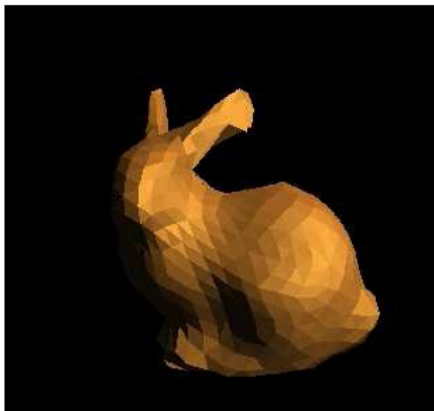
Modelagem: Geometria Complexa

Primeira: Malhas

(lau.u3d)

Modelagem: Geometria Complexa

Primeira: Malhas Poligonais



Área dos polígonos $\rightarrow 0 \Rightarrow$ Forma \rightarrow Superfície Original

Modelagem: Geometria Complexa

Técnicas de Amostragem

- Manual (pelo digitalizador);
- Automática;

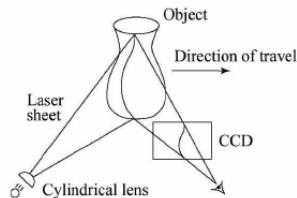
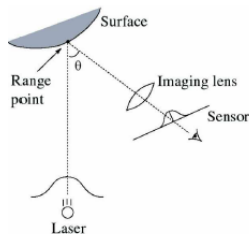


A Volkswagen Beetle becomes the subject of a 1970 simulation project. Ivan Sutherland(left) and assistants plot coordinates for digitizing the car.

Modelagem: Geometria Complexa

Técnicas de Amostragem

- Automática;

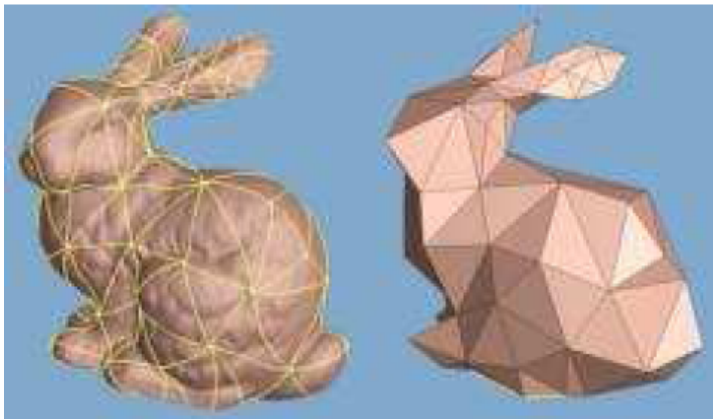


Problemas: concavidade e costura



Modelagem: Geometria Complexa

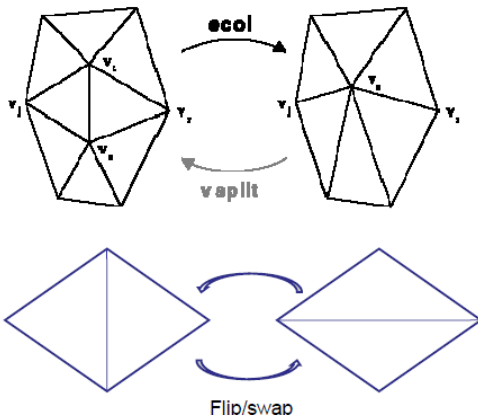
Níveis de Resolução



Modelagem: Geometria Complexa

Níveis de Resolução

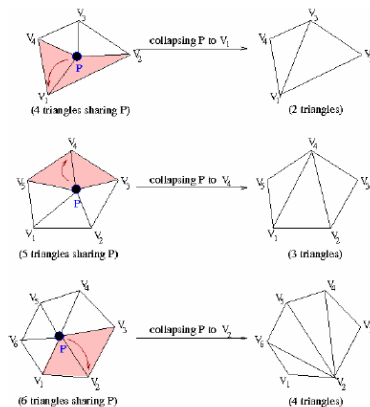
Colapso de Arestas e Flip



Modelagem: Geometria Complexa

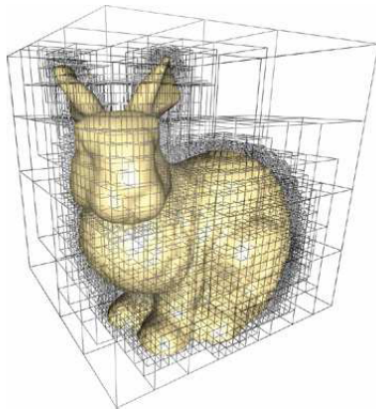
Níveis de Resolução

Colapso de Vértices



Modelagem: Geometria Complexa

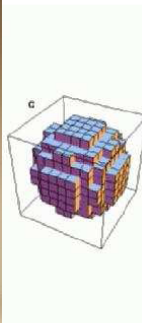
Segunda Opção: Decomposição Espacial



Modelagem: Geometria Complexa

Segunda Opção: Decomposição Espacial

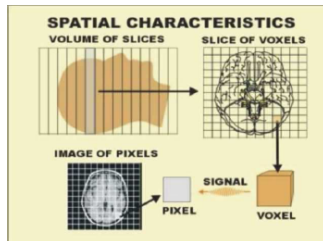
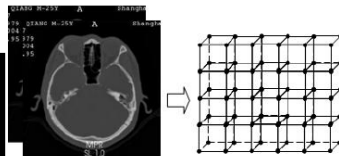
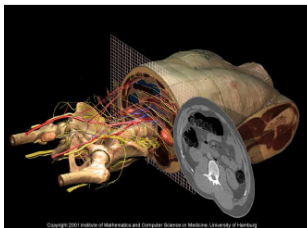
Realismo é mais difícil de ser alcançado



Modelagem: Geometria Complexa

Segunda Opção: Decomposição Espacial

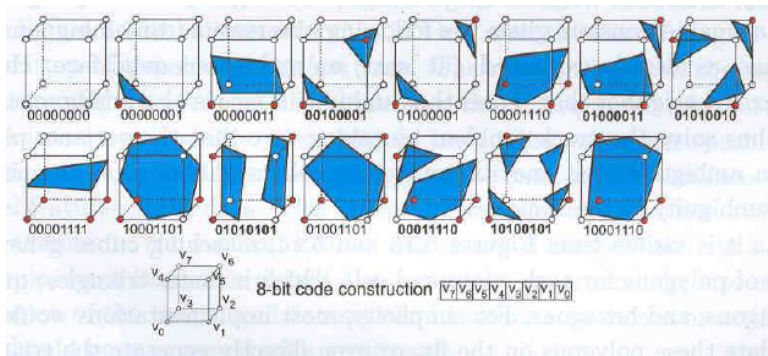
Imagens Médicas 3D.



Modelagem: Geometria Complexa

Segunda Opção: Decomposição Espacial

Marching Cubes;

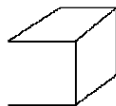
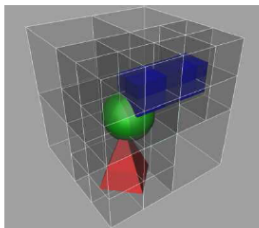


8 vértices $\rightarrow 2^8$ possibilidades $\rightarrow 15$ casos

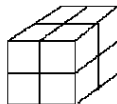
Modelagem: Geometria Complexa

Segunda Opção: Decomposição Espacial

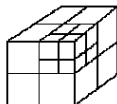
Representação por Octree;



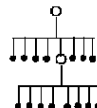
(root)



(1 level)



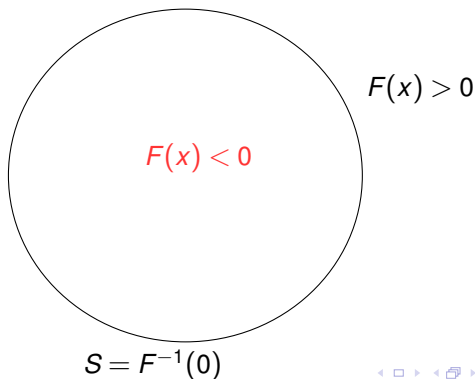
(2 levels)



Poligonalização

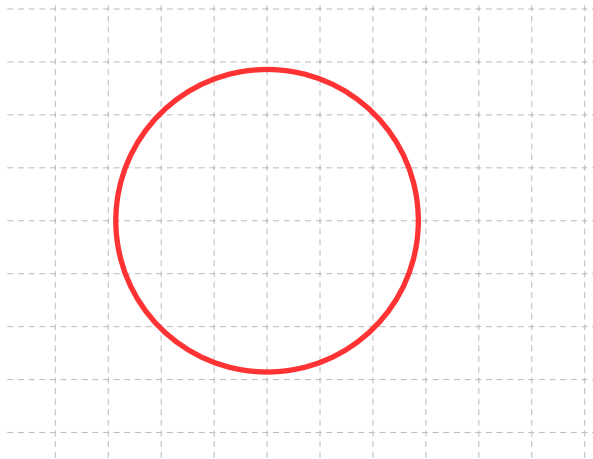
Objetivo

Aproximar por polígonos (triângulos) uma superfície implícita $S = F^{-1}(0)$, onde F é contínua e 0 é valor regular de F .



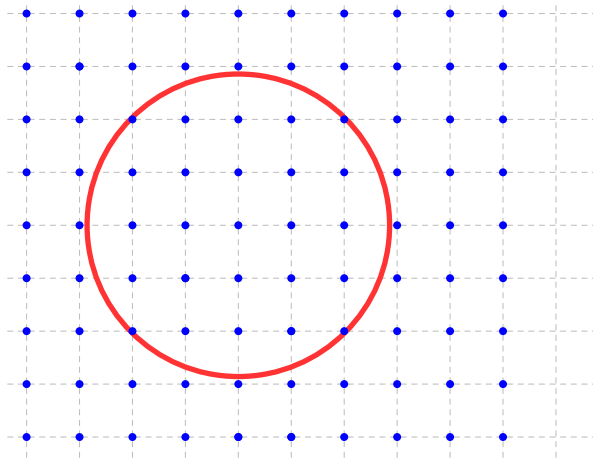
Poligonalização

Algoritmo:



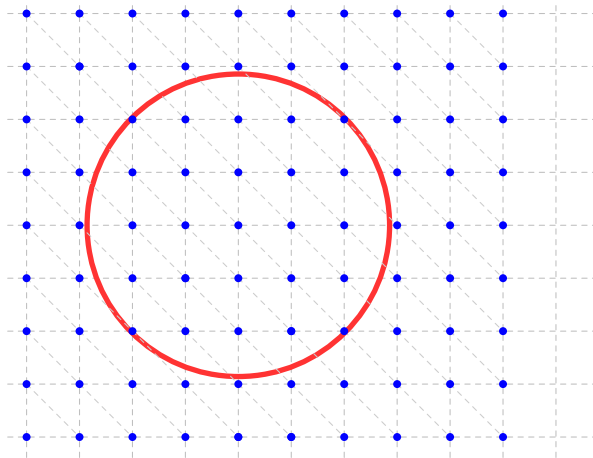
Polgonalização

Algoritmo:



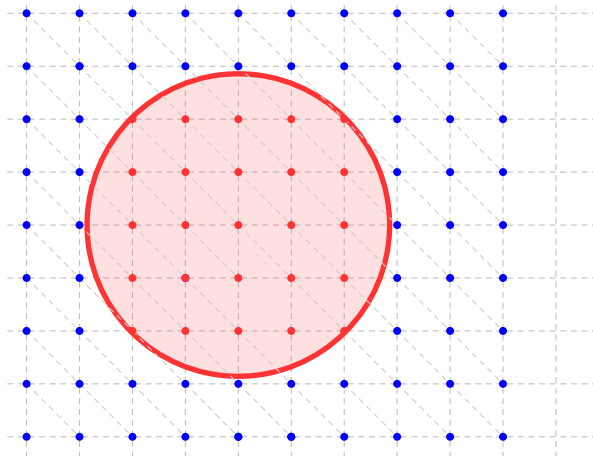
Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Passo 1: Fazer uma triangulação no domínio



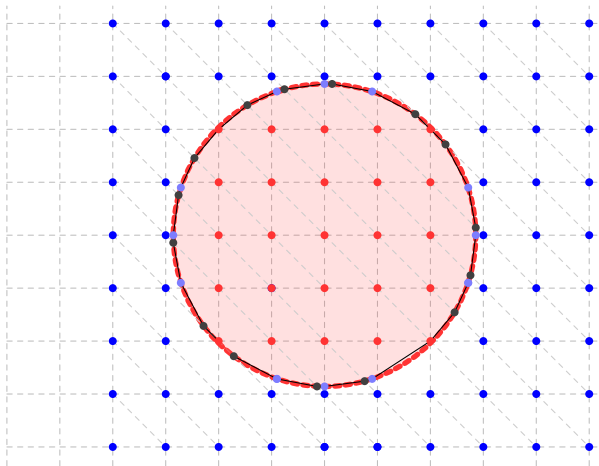
Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Passo 2: Avaliar F em todos os vértices do Grid



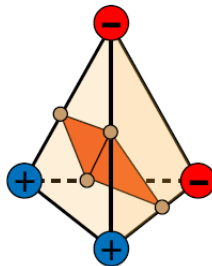
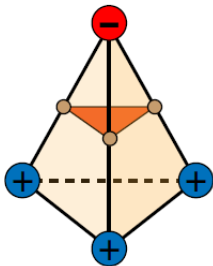
Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Passo 3: Aproximar linearmente nos simplexos onde F muda de sinal.



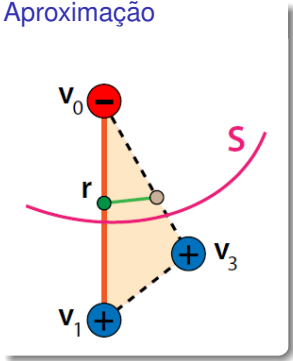
Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Casos possíveis em \mathbb{R}^3 : 2 casos (a menos de permutações) de configuração de sinal da função F em cada tetraedro.



Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

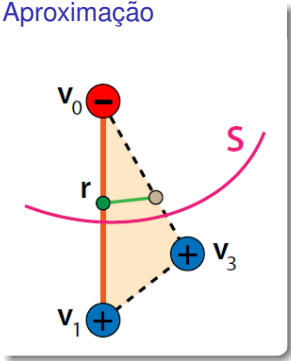
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

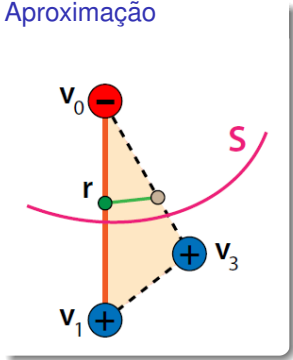
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

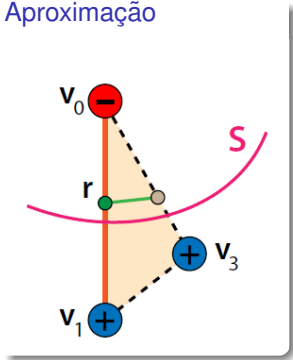
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

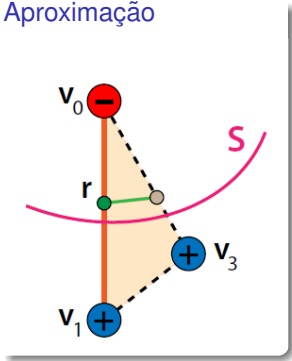
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

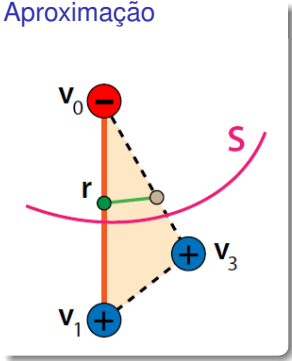
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

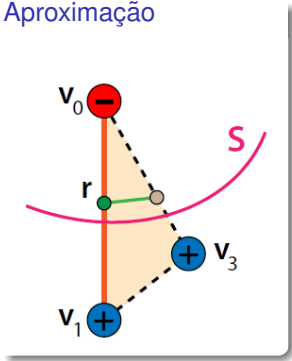
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

Marching Tetrahedra: Bloomenthal, 1998

Aproximação



Seja $r = F^{-1}(0)$ na aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$;

$$r = (1 - t)v_0 + tv_1$$

Basta encontrar o valor de t ; Fazendo:

$$0 = F(r) = F((1 - t)v_0 + tv_1)$$

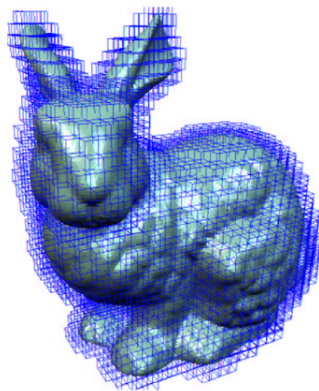
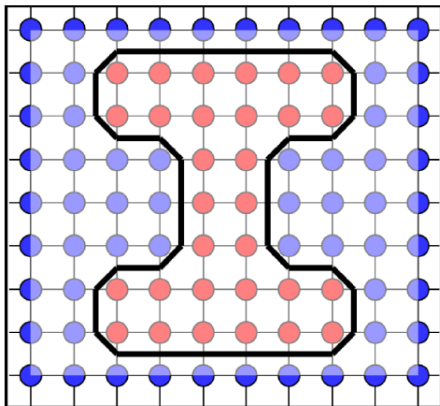
$$\approx (1 - t)F(v_0) + tF(v_1)$$

Portanto:

$$t = \frac{F(v_0)}{F(v_0) - F(v_1)}$$

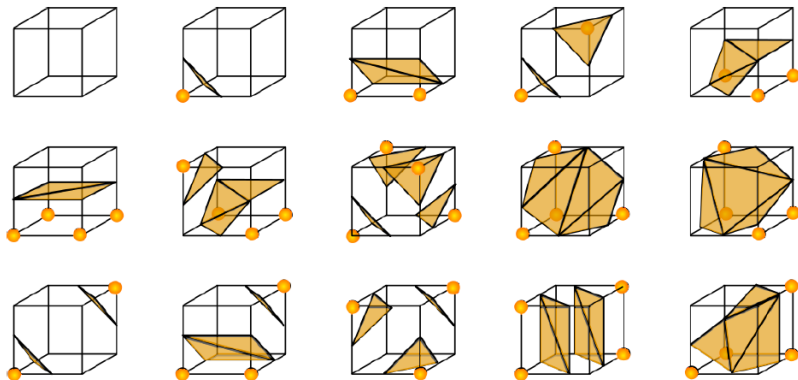
Marching Cubes: Lorensen & Cline, 1987

Faz uma decomposição celular do domínio de F , isto é, particiona o domínio em cubos.



Marching Cubes: Lorensen & Cline, 1987

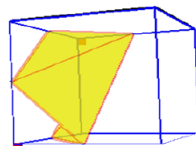
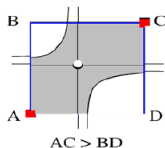
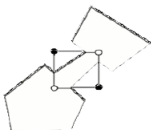
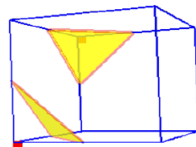
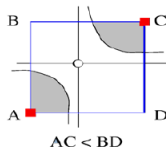
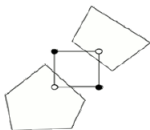
15 casos (a menos de permutações) de configuração de sinal da função F em cada cubo.



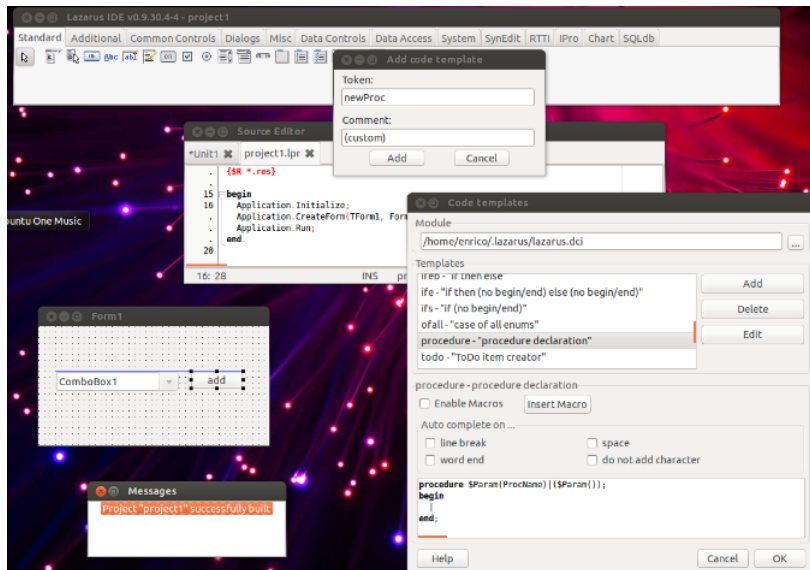
Marching Cubes: Lorensen & Cline, 1987

Problemas:

- Ambiguidades
- Dificuldade de implementação



Atividade - Curvas Implícitas



FIM