

Radiactividad

José M. Fernández-Varea

Facultat de Física (FQA i ICC), Universitat de Barcelona.

Diagonal 645, ES-08028 Barcelona, Catalunya.

jose@fqa.ub.edu

ÍNDICE

1. Introducción
2. Radiactividad
 - 2.1. Estructura nuclear
 - 2.2. Actividad
 - 2.3. Constante de decaimiento
3. Modos de decaimiento radiactivo
 - 3.1. Desintegraciones alfa
 - 3.2. Desintegraciones beta
 - 3.3. Transiciones electromagnéticas
 - 3.4. Fisión espontánea
 - 3.5. Otros procesos y fenómenos
 - 3.6. Radiación fluorescente
4. Ley de decaimiento radiactivo
 - 4.1. Cadenas de decaimiento radiactivo
 - 4.2. Producción de radionucleidos por irradiación
5. Radiactividad natural
 - 5.1. Series radiactivas
 - 5.2. Otros radionucleidos naturales
 - 5.3. Radiación cósmica

Agradecimientos

Referencias

1 Introducción

El descubrimiento de la radiactividad a finales del siglo XIX trajo consigo una gran actividad investigadora para entender los nuevos fenómenos y también para aplicarlos en diferentes campos. Muy pronto comenzaron a emplearse los radionucleidos (núcleos inestables) con fines terapéuticos. Hoy en día seguimos recurriendo a numerosos emisores α , β y γ tanto en medicina nuclear como en diversas modalidades de radioterapia.

El uso intensivo (¡y creciente!) de radionucleidos en física médica [1] hace necesario entender la fenomenología básica del decaimiento de los núcleos inestables. El objetivo de este tema es precisamente repasar los principales conceptos involucrados. Por supuesto disponemos de excelentes libros de texto donde profundizar en los aspectos fundamentales de la física nuclear. Destacamos aquí el de Krane [2], que se ha convertido en referencia estándar de esta materia. Personalmente encuentro el libro de Wong [3] sumamente interesante. En estas u otras obras, por ejemplo [4], el lector puede encontrar capítulos dedicados a la radiactividad. El texto de Podgorsak [5] presenta el tema de la radiactividad de manera novedosa. Libros dedicados a los detectores de radiación [6] también abordan, aunque más superficialmente, los procesos nucleares que conducen a la emisión de radiaciones ionizantes.

La información disponible en internet es muy abundante. Por ejemplo, en la referencia [7] se da una concisa pero muy completa descripción de los procesos radiactivos. La base de datos elaborada por el grupo de trabajo Decay Data Evaluation Project, con información extensa sobre el decaimiento de más de 220 radionucleidos, puede descargarse en forma de documentos pdf [8] o generarse mediante el software asociado `nucleide` [8]. Por otro lado, el Lawrence Berkeley National Laboratory (EE UU) y la Universidad de Lund (Suecia) hospedan páginas web con bases de datos relacionados con la estructura y propiedades nucleares, el decaimiento de radionucleidos, etc [9]. A su vez, el National Nuclear Data Center (EE UU) mantiene un conjunto similar de bases de datos [10], entre las que destacamos `NuDat 2.7`; pueden descargarse ficheros ps o pdf con la información sobre el decaimiento nuclear en formato MIRD (Medical Internal Radiation Dose). Finalmente merece la pena citar el programa `Radiological Toolbox` [11], desarrollado por el Oak Ridge National Laboratory para la Comisión Reguladora Nuclear de los EE UU con el objetivo de facilitar el acceso a datos relevantes en protección radiológica.

2 Radiactividad

2.1 Estructura nuclear

Los núcleos atómicos son agregados de nucleones, i.e. protones y neutrones. Podemos identificar cada especie nuclear o nucleido por el número Z de protones y el número N de neutrones que lo constituye. A menudo conviene más dar los valores de Z y de $A = Z + N$. Denotaremos los nucleidos con la notación A_ZX_N , donde X es la especie química, o AX , ya que no hay ambigüedad posible. Se denominan *isótopos* los nucleidos que pertenecen a un mismo elemento químico (igual Z) pero tienen distintos valores de A (y por tanto de N). Por otro lado, son *isóbaros* aquellos núcleos con igual A pero diferente Z .

Las fuerzas nucleares de corto alcance mantienen a los nucleones confinados en un pequeño volumen aproximadamente esférico de radio

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (1)$$

con $r_0 = 1.2$ fm. Los núcleos, como sistemas ligados cuánticos que son, tienen un espectro de energías formado por niveles discretos (estado fundamental y niveles excitados) y un continuo. Los niveles nucleares suelen “etiquetarse” como I^π , siendo I el spin nuclear (i.e. el momento angular total) y π la paridad (par o impar). Las propiedades nucleares se pueden entender recurriendo a

modelos como el de la gota líquida o el modelo de capas [2–4].

Determinadas combinaciones de Z y N dan lugar a núcleos estables, típicamente con $N \gtrsim Z$. En cambio otros números de neutrones y protones no forman sistemas estables. La estabilidad nuclear puede entenderse a partir de la energía de ligadura $E_B(Z, N)$, definida como la energía requerida para extraer los Z protones y N neutrones del núcleo. Despreciando las energías de ligadura de los electrones atómicos, E_B está dada por [2, 4]

$$E_B(Z, N) = [Z M_H + N m_n - M(Z, N)] c^2, \quad (2)$$

donde $M(Z, N)$ es la masa del átomo neutro, mientras que M_H y m_n son las masas del átomo de hidrógeno y del neutrón libre, respectivamente. En el caso de los nucleidos estables, E_B crece linealmente con A si se trata de núcleos ligeros (debido al alcance finito de las fuerzas nucleares), llega a un valor máximo de aproximadamente 8.5 MeV/nucleón en $A \approx 56$ y decrece suavemente para $A > 56$ (debido a la repulsión coulombiana entre los protones). Basándose principalmente en el modelo de la gota líquida, von Weizsäcker propuso la fórmula semiempírica¹ [2, 4]

$$E_B(Z, N) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta \quad (3)$$

con

$$\delta = \begin{cases} + a_p A^{-3/4} & \text{si } Z \text{ y } N \text{ son pares,} \\ 0 & \text{si } A \text{ es impar,} \\ - a_p A^{-3/4} & \text{si } Z \text{ y } N \text{ son impares.} \end{cases} \quad (4)$$

Los parámetros de esta expresión toman los valores [4] $a_v = 15.75$ MeV, $a_s = 17.8$ MeV, $a_c = 0.71$ MeV, $a_a = 23.7$ MeV y $a_p = 33.5$ MeV.

Los núcleos inestables se denominan *nucleidos radiactivos* o *radionucleidos* y tienden a transformarse en una descendencia estable o inestable. Los radionucleidos se transforman, incluyéndose las desintegraciones, mediante uno o varios mecanismos que se detallarán más adelante. En la figura 1 se muestran aquellos por los que los radionucleidos pueden desintegrarse. El “mapa de los nucleidos” (*chart of the nuclides* en inglés) es una representación (N, Z) más elaborada (¡y muy decorativa!), con información en colores de la estabilidad de los nucleidos y los modos de desintegración; podemos descargar una versión pdf de [12] o generar un fichero ps con el software *chartist* [13] (ver figura 2).

El término *radiactividad* se refiere a aquellas transformaciones espontáneas que involucran cambios en el núcleo de los átomos. La energía liberada en esas transformaciones se emite en forma de varios tipos de radiación, tanto ionizante (fotones, electrones, etc) como no ionizante (neutrinos). La radiactividad es un proceso estocástico. Todo el átomo se ve involucrado en él ya que las transformaciones nucleares pueden afectar también a la estructura electrónica del átomo y provocar la emisión de radiación fluorescente.

2.2 Actividad

La actividad, \mathcal{A} , de una cantidad de radionucleido en un estado particular de energía² en un instante determinado es el cociente entre $d\mathcal{N}$ y dt , donde $d\mathcal{N}$ es el valor esperado del número de transformaciones nucleares espontáneas que parten de ese estado de energía en el intervalo de tiempo dt [14]. Por tanto

$$\mathcal{A} = \left| \frac{d\mathcal{N}}{dt} \right|. \quad (5)$$

¹El término de Coulomb a veces se escribe $-a_c Z(Z - 1)/A^{1/3}$ para contabilizar correctamente la repulsión entre los Z protones.

²Si no se dice lo contrario se trata del estado fundamental.

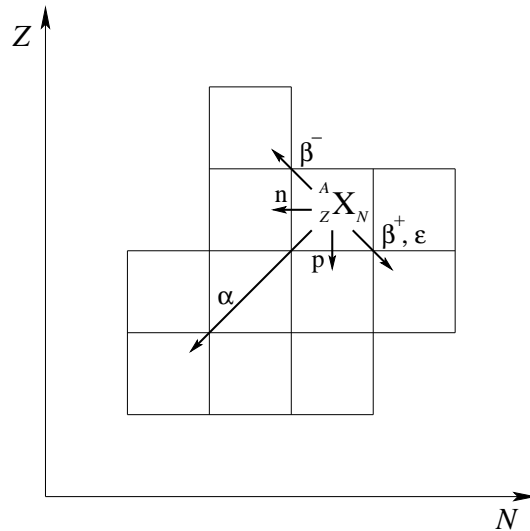


Figura 1: Representación esquemática de cómo cambian N y Z en los modos de desintegración más comunes.

La unidad de actividad en el sistema internacional es el becquerel, $1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ s}^{-1}$ (i.e. 1 transformación nuclear/s). Como 1 Bq es una actividad muy pequeña es habitual usar los múltiplos kBq, MBq, GBq i TBq. Por otro lado, históricamente se empleaba la unidad (ahora obsoleta) curio, definido como $1 \text{ Ci} \equiv$ actividad de 1 g de Ra = 3.7×10^{10} Bq (exactamente), y solían emplearse los submúltiplos mCi y μCi .

' *Experimental Chart of Nuclides*

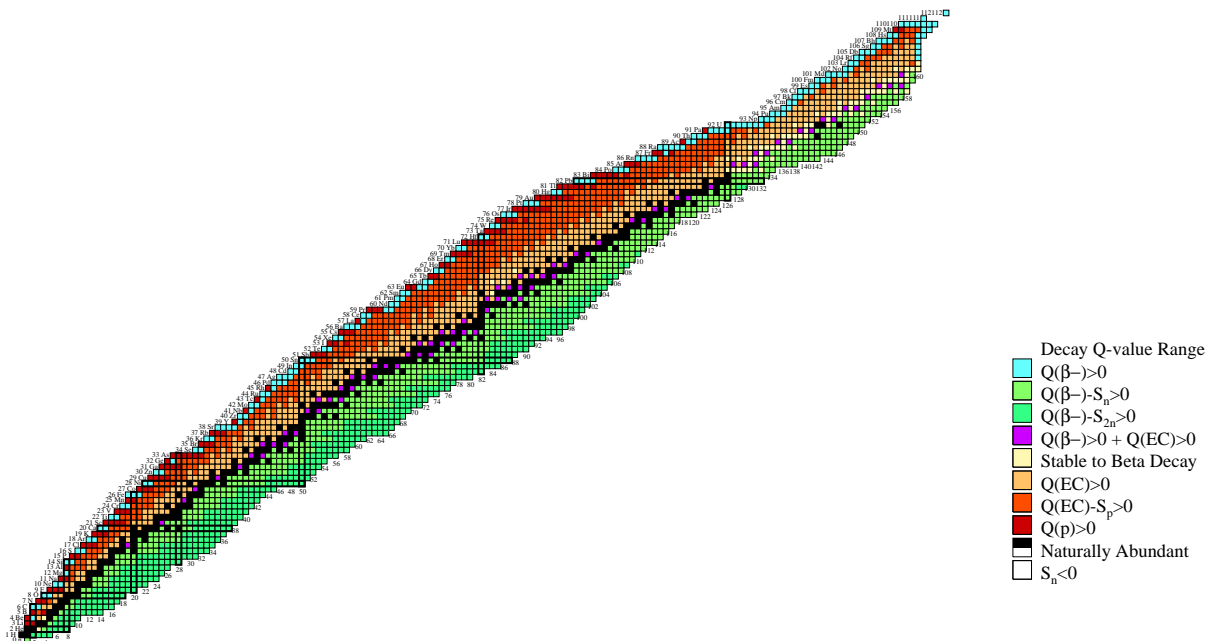


Figura 2: Mapa de los nucleidos. Se han resaltado los nucleidos con N o Z igual a los *números mágicos* 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126. (Figura generada con `chartist` [13].)

2.3 Constante de decaimiento

La *constante de decaimiento* o decadencia, λ , de un radionucleido en un estado particular de energía es el cociente entre dp y dt , donde dp es la probabilidad de que un núcleo determinado experimente una transformación nuclear espontánea desde dicho estado de energía en el intervalo de tiempo dt [14]. Por tanto

$$\lambda = \frac{dp}{dt}. \quad (6)$$

En el sistema internacional las constantes de decaimiento se expresan en s^{-1} .

La constante de decaimiento puede determinarse experimentalmente. También es posible calcularla a partir de modelos teóricos empleando la *regla de oro de Fermi*, que da la probabilidad de transición por unidad de tiempo desde un estado inicial a un estado final.

Dado un conjunto de radionucleidos idénticos, el tiempo $T_{1/2}$ que debe transcurrir para que su número se reduzca a la mitad se llama *período*. Como veremos más adelante, su relación con la constante de decaimiento es

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (7)$$

3 Modos de decaimiento radiactivo

A continuación se resumen los diversos modos por los que los radionucleidos decaen. En la medida de lo posible, los ejemplos ilustrativos de cada proceso descrito estarán relacionados con la física médica.

Para un radionucleido dado, la información completa de su esquema de decaimiento incluye niveles nucleares (energía, momento angular total, paridad), probabilidades de cada canal de decaimiento, probabilidades y energías de los diferentes tipos de radiación emitidos (partículas alfa, electrones, positrones, fotones, etc), así como las probabilidades y energías de las radiaciones fluorescentes que emita a continuación el átomo descendiente. Como ya se ha comentado, en [8–10] podemos encontrar información exhaustiva sobre el decaimiento de muchos radionucleidos.

Para entender las consideraciones energéticas que hacen posible o prohíben un determinado proceso de decaimiento, conviene introducir el valor Q del mismo. Dado un proceso o reacción



donde 1 es el “proyectil”, 2 el “blanco” inicialmente en reposo³ y 3, 4, ... los productos resultantes, se define su valor Q como [2, 5]

$$Q \equiv [m_1 + m_2 - (m_3 + m_4 + \dots)]c^2. \quad (9)$$

Q es, por tanto, la energía disponible en la reacción (8). Cuando $Q > 0$ el proceso es exotérmico, mientras que es endotérmico si $Q < 0$. Los procesos exotérmicos pueden tener lugar espontáneamente, pero los endotérmicos necesitan ser activados por un proyectil cuya energía cinética supere un cierto umbral.

3.1 Desintegración alfa

En esta forma de desintegración, el núcleo “padre” libera una partícula alfa, que está formada por dos protones y dos neutrones,



³En este capítulo nos centramos sobre todo en el decaimiento espontáneo por lo que 2 es un radionucleido y no hay proyectil 1.

El núcleo “hijo” (descendiente) nace en algún nivel excitado \mathcal{E}_j o en el estado fundamental ($\mathcal{E}_0 = 0$). El valor Q del proceso es

$$Q_\alpha = [m_X - (m_Y + m_\alpha)]c^2 = [M_X - (M_Y + M_{\text{He}})]c^2. \quad (11)$$

A partir de esta expresión y empleando la relación (2) y la fórmula semiempírica de masas (3) se obtiene que la desintegración alfa es energéticamente posible (i.e. $Q_\alpha > 0$) para $A \gtrsim 150$.

Las ecuaciones de conservación de la energía,

$$Q_\alpha = \mathcal{E}_j + E_Y + E_\alpha, \quad (12)$$

y de la cantidad de movimiento implican que la partícula alfa es emitida con una energía cinética bien definida

$$E_\alpha = \frac{Q_\alpha - \mathcal{E}_j}{1 + \frac{m_\alpha}{M_Y}} \quad (13)$$

mientras que la energía de retroceso del núcleo descendiente es

$$E_Y = \frac{Q_\alpha - \mathcal{E}_j}{1 + \frac{M_Y}{m_\alpha}}. \quad (14)$$

Como $m_\alpha \approx 4$ u y $M_Y \sim 200$ u vemos que E_α es un 2% menor que $Q_\alpha - \mathcal{E}_j$. Valores típicos de E_α están entre aproximadamente 3 y 10 MeV, que son energías no relativistas.

La constante de desintegración alfa puede obtenerse aproximadamente a partir de la *teoría de Gamow* [2,4]

$$\lambda_\alpha \approx f p, \quad (15)$$

donde f es la frecuencia con que la partícula alfa, que se supone existe preformada dentro del núcleo padre, golpea la barrera de potencial mientras que p es la probabilidad de transmisión a través de la barrera. Cálculos basados en este modelo consiguen reproducir satisfactoriamente un gran número de valores experimentales de $T_{1/2}$ [15].

En las figuras 3 y 4 se presentan los esquemas de desintegración alfa del ^{226}Ra y de su descendiente ^{222}Rn , respectivamente. Obsérvese que estos radionucleidos decaen por emisión α en un 100% de los casos.

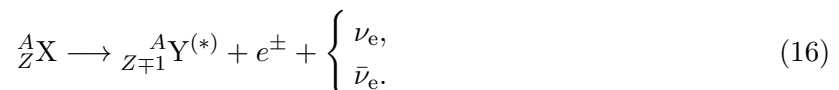
3.2 Desintegración beta

La interacción débil es responsable de varios fenómenos, conocidos colectivamente como desintegración beta, en los que A permanece constante mientras que Z varía en una unidad.

La fórmula semiempírica de masas, ecuación (3), predice que para un valor de A fijado existe una curva de estabilidad con un mínimo. Habrá por tanto un isóbaro estable (puede haber dos si A es par) [2,4]. Para acercarse al mínimo, los núcleos con un exceso de neutrones tenderán a aumentar el número de protones disminuyendo el de neutrones; lo contrario sucederá cuando posean un exceso de protones. Las figuras 5 y 6 ejemplifican este tipo de comportamiento para los isóbaros con $A = 99$ y $A = 192$, respectivamente.

3.2.1 Desintegración β^\pm

Los procesos β^\pm se escriben



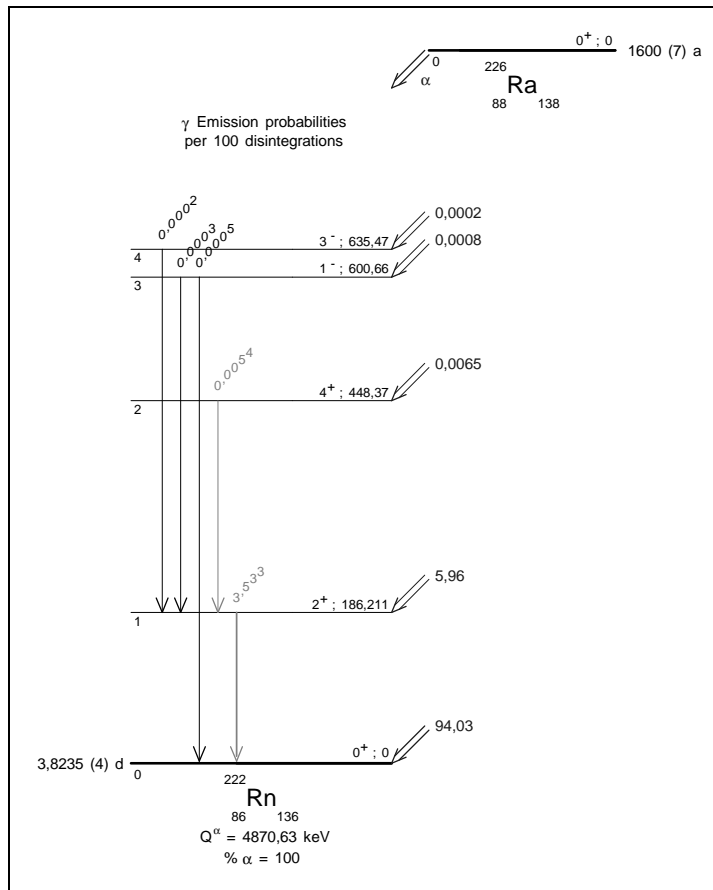


Figura 3: Esquema de decaimiento del ^{226}Ra . (Figura generada con nucleide [8].)

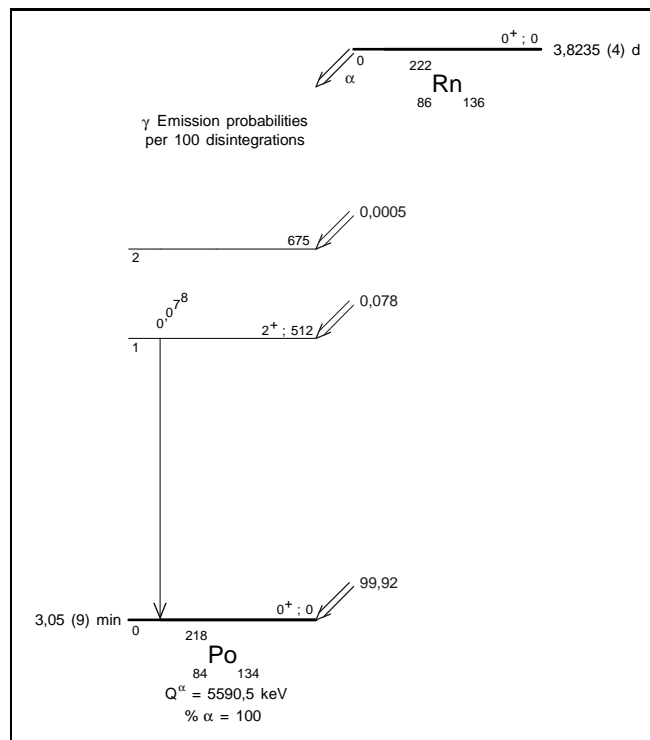


Figura 4: Esquema de decaimiento del ^{222}Rn . (Figura generada con nucleide [8].)

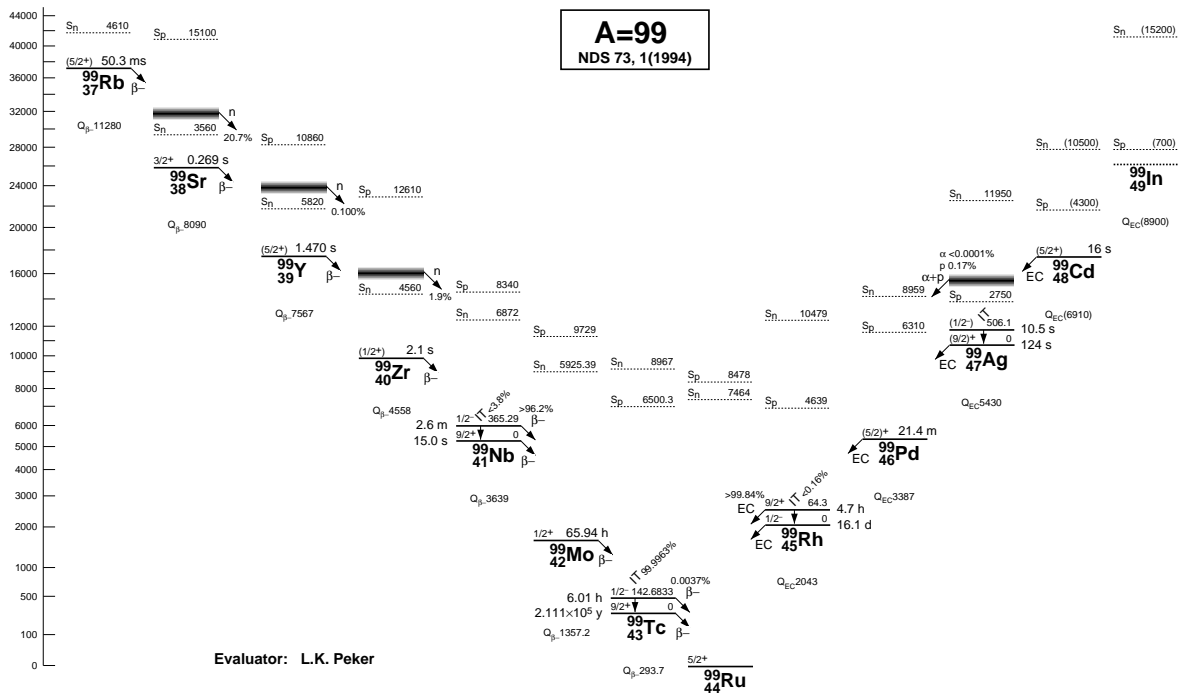


Figura 5: Energías de los isóbaros con $A = 99$ cercanos al nucleido estable ^{99}Ru [16].

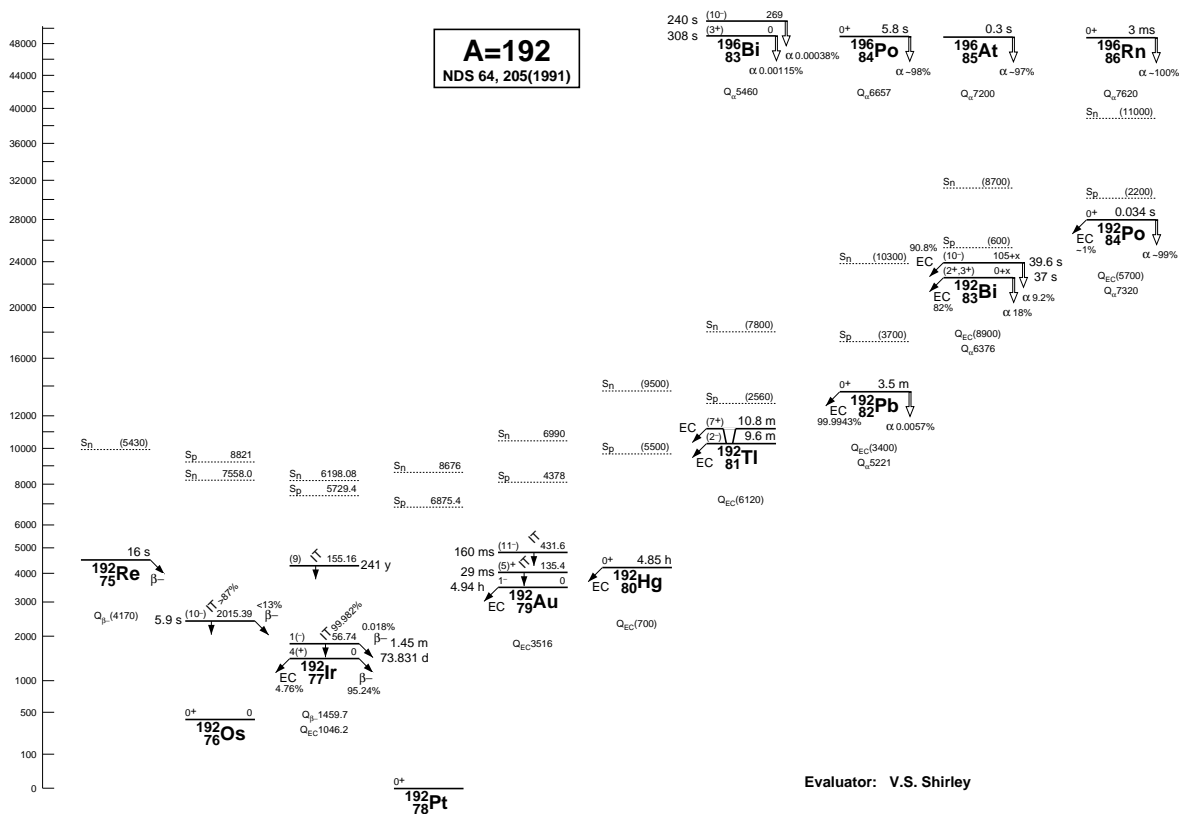


Figura 6: Energías de los isóbaros con $A = 192$ cercanos a los nucleidos estables ^{192}Os y ^{192}Pt [16].

El proceso elemental que tiene lugar en la emisión β^- es

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (17)$$

mientras que en la emisión β^+ tenemos que

$$p \text{ (ligado)} \longrightarrow n + e^+ + \nu_e. \quad (18)$$

En ambos casos el núcleo descendiente se crea en el estado fundamental o un nivel excitado de energía \mathcal{E}_j . Los neutrinos apenas interactúan con la materia, por lo que no se consideran radiaciones ionizantes. Como la masa del neutrino es despreciable frente a la del electrón o las de los núcleos inicial y final, los valores Q de los procesos β^\pm son

$$Q_{\beta^-} = [m_X - (m_Y + m_e)]c^2 = [M_X - M_Y]c^2 \quad (19)$$

y

$$Q_{\beta^+} = [m_X - (m_Y + m_e)]c^2 = [M_X - M_Y - 2m_e]c^2. \quad (20)$$

Si ignoramos la energía de retroceso del núcleo descendiente el balance de energía en las desintegraciones β^\pm se escribe

$$Q_{\beta^\pm} = \mathcal{E}_j + E_{e^\pm} + E_{\nu_e}, \quad (21)$$

donde E_{ν_e} es la energía cinética del neutrino (o antineutrino) electrónico. En consecuencia, el electrón o el positrón son emitidos con energías cinéticas E_{e^\pm} que van desde cero hasta un valor máximo

$$E_{\beta_{\max}} = Q_{\beta^\pm} - \mathcal{E}_j. \quad (22)$$

(E_{ν_e} también está comprendida entre cero y $E_{\beta_{\max}}$.) Valores habituales de $E_{\beta_{\max}}$ están entre algunos keV y varios MeV. La distribución de energía de los electrones o positrones emitidos recibe el nombre de *espectro de Fermi*, que adopta en general la forma [2, 4]

$$p(W) \propto (W^2 - m_e^2 c^4)^{1/2} W (W_{\beta_{\max}} - W)^2 F(Z_f, W) a_n(W), \quad (23)$$

siendo $W = E_{e^\pm} + m_e c^2$ la energía total y $W_{\beta_{\max}} = E_{\beta_{\max}} + m_e c^2$. La función de Fermi $F(Z_f, W)$ da cuenta de la distorsión de la función de onda del electrón o positrón saliente (con velocidad asintótica v_e) debida al potencial del núcleo hijo, cuyo número atómico es Z_f . Cuando $Z_f \lesssim 30$ y $v_e \ll c$ se puede suponer que el núcleo hijo es puntual y emplear la aproximación no relativista para la partícula β^\pm ,

$$F(Z_f, W) = \frac{2\pi\eta}{1 - \exp(-2\pi\eta)}, \quad \eta \equiv \pm \frac{Z_f e^2}{\hbar v_e}, \quad (24)$$

tomando el signo positivo (negativo) si se trata de un electrón (positrón). Para valores mayores de Z_f o si v_e es comparable a c debe usarse $F = F_0 L_0$ [17], donde F_0 es el factor de Fermi relativista para un núcleo puntual [18] y L_0 la corrección de tamaño nuclear finito [17]. El factor $a_n(W)$ depende de los valores de $I_f - I_i$ y $\pi_f \pi_i$ en la transición beta [19]; en el caso particular $|I_f - I_i| \leq 1$ (transiciones permitidas y prohibidas primeras) es $a_n(W) = 1$. Los espectros de Fermi generados con este formalismo están en excelente acuerdo con la mayor parte de medidas experimentales [20]. Una estimación de la energía cinética promedio de la distribución de Fermi es $\bar{E}_{e^\pm} \approx \frac{1}{3} E_{\beta_{\max}}$. Finalmente, a partir de $p(W)$ se obtiene la constante de decaimiento de la desintegración β^\pm ,

$$\lambda_{\beta^\pm} = \int_{m_e c^2}^{W_{\beta_{\max}}} p(W) dW. \quad (25)$$

La referencia [21] presenta gráficas con espectros de Fermi de numerosos emisores beta empleados en física médica. Tablas con espectros también están disponibles en el informe 56 de ICRU [19]. En la figura 7 se han representado los espectros de Fermi, normalizados a la unidad, de algunos emisores beta bien conocidos.

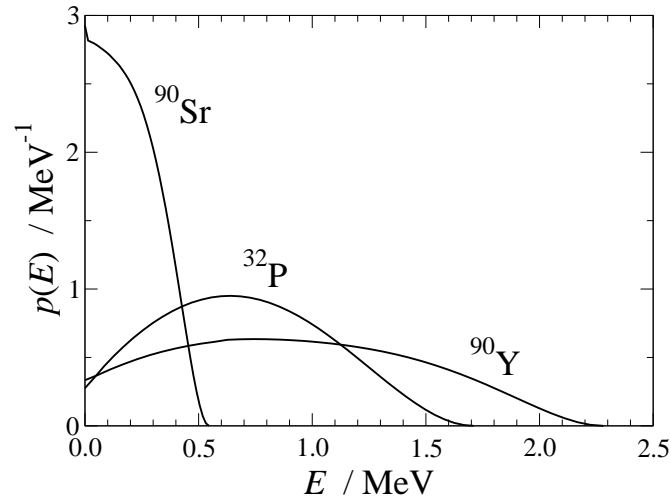


Figura 7: Espectros de Fermi, normalizados a la unidad, de los emisores β^- ^{32}P , ^{90}Sr y ^{90}Y [19].

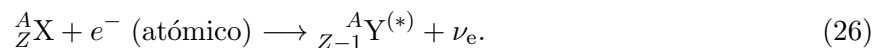
El número de emisores β^\pm tales que el núcleo descendiente es estable o, si es inestable, no es emisor gamma, es bastante reducido; a estos radionucleidos se les denomina *emisores beta puros*. Valores de $E_{\beta\text{max}}$ y períodos de algunos de ellos están en la tabla 1. En cambio es mucho mayor el número de emisores beta donde alguno de los núcleos descendientes emite fotones; a éstos se les llama *emisores beta-gamma* (la emisión gamma se abordará más adelante). Entre los más populares se encuentran el ^{137}Cs y el ^{60}Co , cuyos esquemas de decaimiento pueden verse en las figuras 8 y 9, respectivamente.

Tabla 1: Períodos y energías cinéticas máximas de algunos emisores beta puros [8].

Radionucleido	$T_{1/2}$	$E_{\beta\text{max}}$
^3H	12.312 a	18.6 keV
^{14}C	5700 a	156.5 keV
^{32}P	14.284 d	1.711 MeV
^{90}Sr - ^{90}Y	28.80 a / 2.6684 d	545.9 keV / 2.280 MeV

3.2.2 Captura electrónica

En este proceso un electrón atómico, generalmente de una capa profunda con $\ell = 0$ (preferentemente K o L_1), interacciona con el núcleo y es absorbido,



Esto sucede por la conversión de un protón en un neutrón,



El valor Q de la captura electrónica es (despreciando de nuevo la masa del neutrino)

$$Q_\epsilon = [m_X + m_e - m_Y]c^2 = [M_X - M_Y]c^2. \quad (28)$$

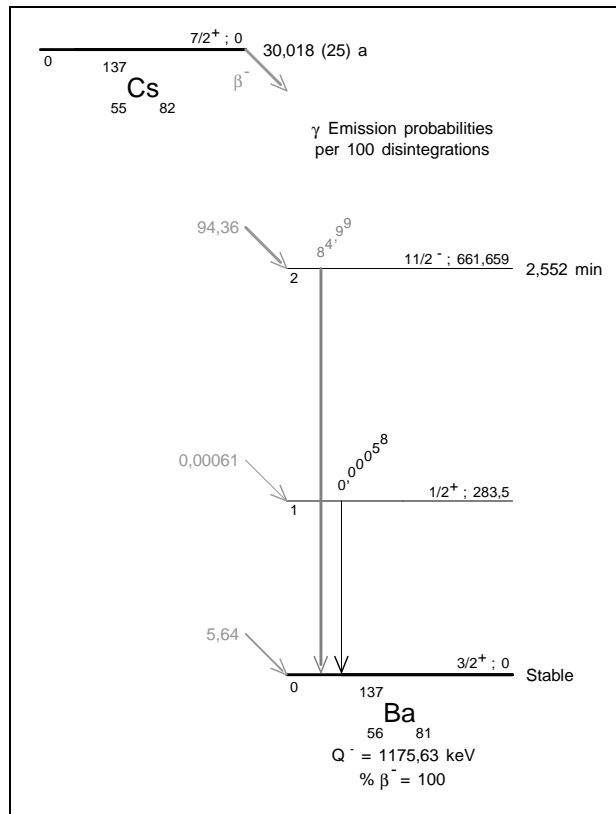


Figura 8: Esquema de decaimiento del ^{137}Cs . (Figura generada con nucleide [8].)

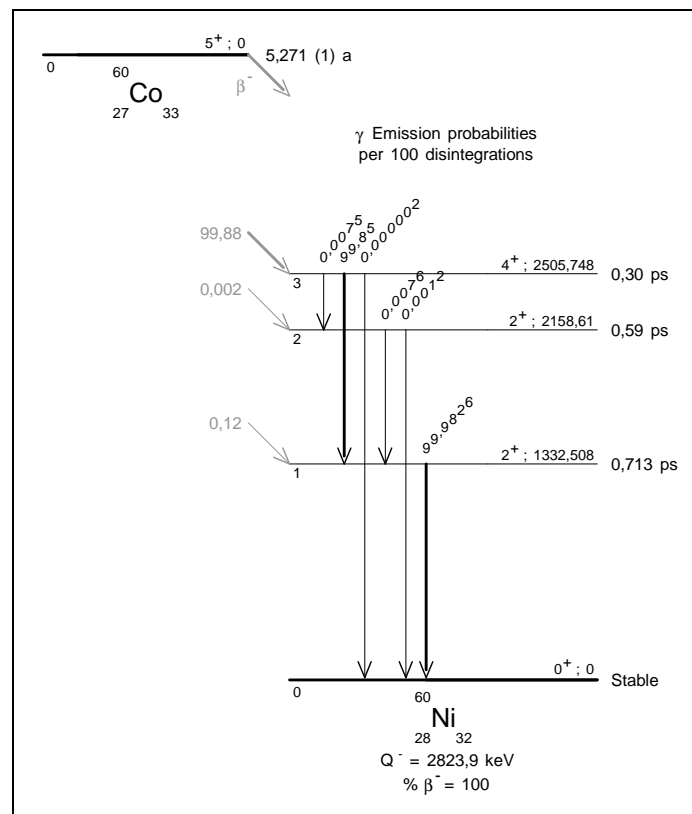


Figura 9: Esquema de decaimiento del ^{60}Co . (Figura generada con nucleide [8].)

Como $Q_\epsilon > Q_{\beta^+}$, la captura compite con la desintegración β^+ cuando ésta es energéticamente viable⁴. El núcleo descendiente queda en el estado fundamental o alguno de los niveles excitados \mathcal{E}_j . Si ignoramos el retroceso de Y tendremos que

$$-U_i + Q_\epsilon = \mathcal{E}_j + E_{\nu_e}, \quad (29)$$

donde U_i es la energía de ligadura del orbital atómico del cual es capturado el electrón. Después de la captura electrónica el átomo excitado se relaja emitiendo radiación fluorescente.

En las figuras 10 y 11 se muestran los esquemas de decaimiento del ^{125}I y del ^{111}In , respectivamente, que proceden exclusivamente vía captura electrónica porque $Q_{\beta^+} < 0$. En cambio el radionucleido ^{18}F constituye un buen ejemplo de la competición entre captura y desintegración β^+ (véase la figura 12). Incluso es posible que un radionucleido decaiga por desintegración β^- y captura electrónica/ β^+ si la serie isobárica incluye dos nucleidos estables. Esto sucede en el ^{40}K o el ^{192}Ir , cuyos esquemas de decaimiento pueden consultarse en las figuras 13 y 14, respectivamente.

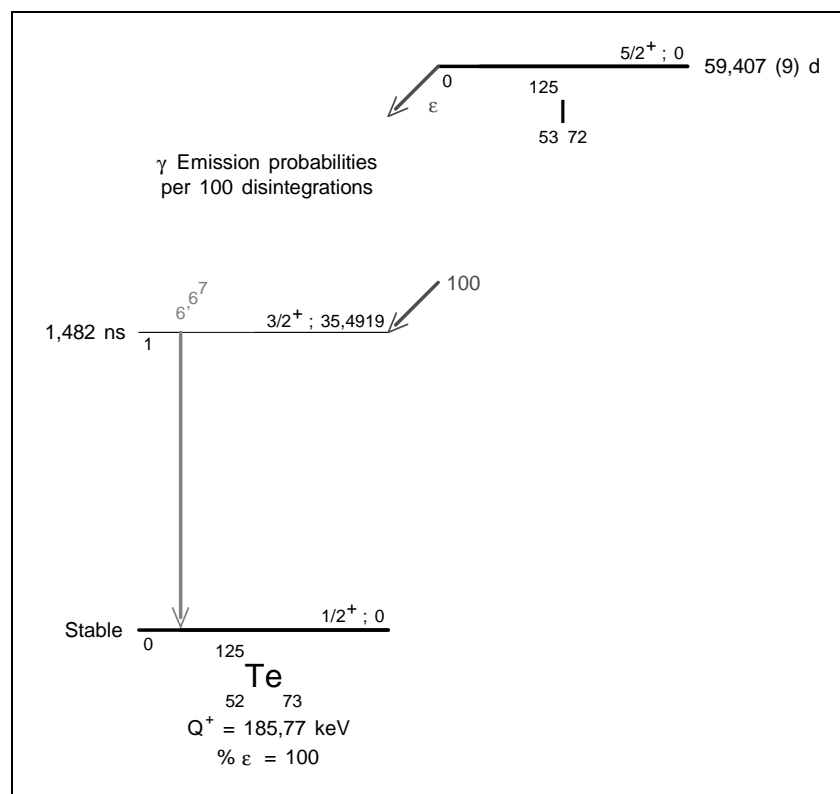


Figura 10: Esquema de decaimiento del ^{125}I . (Figura generada con `nucleide` [8].)

3.3 Transiciones electromagnéticas

Son aquellas transiciones en las que el radionucleido, inicialmente en un estado excitado de energía \mathcal{E}_i , decae a un estado final de energía inferior \mathcal{E}_f de la misma especie, por lo que Z y N permanecen inalterados. Estas transiciones están causadas por el acoplamiento del núcleo con el campo electromagnético. La constante de decaimiento es

$$\lambda_{\text{e.m.}} = \lambda_\gamma + \lambda_e + \lambda_\pi, \quad (30)$$

siendo λ_γ , λ_e y λ_π las probabilidades por unidad de tiempo de emisión gamma, conversión interna y creación de pares interna, respectivamente. Estos tres procesos se describen a continuación.

⁴`nucleide` define unas cantidades $Q^\pm \equiv [M_X - M_Y]c^2$ con lo cual $Q_{\beta^-} = Q^-$, $Q_{\beta^+} = Q^+ - 2m_e c^2$ y $Q_\epsilon = Q^+$.

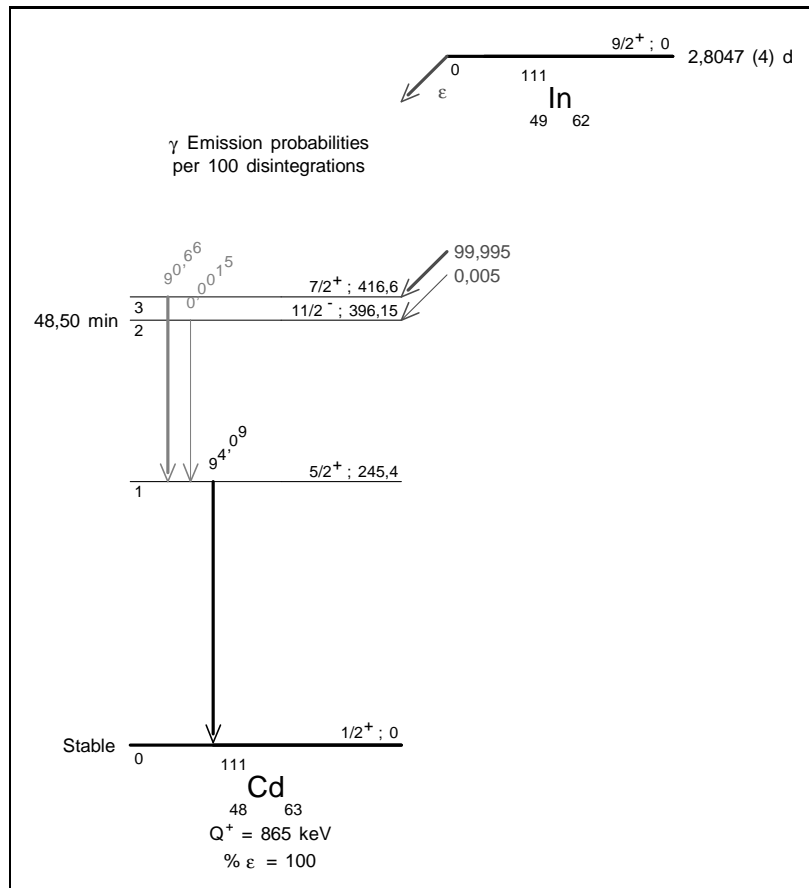


Figura 11: Esquema de decaimiento del ^{111}In . (Figura generada con nucleide [8].)

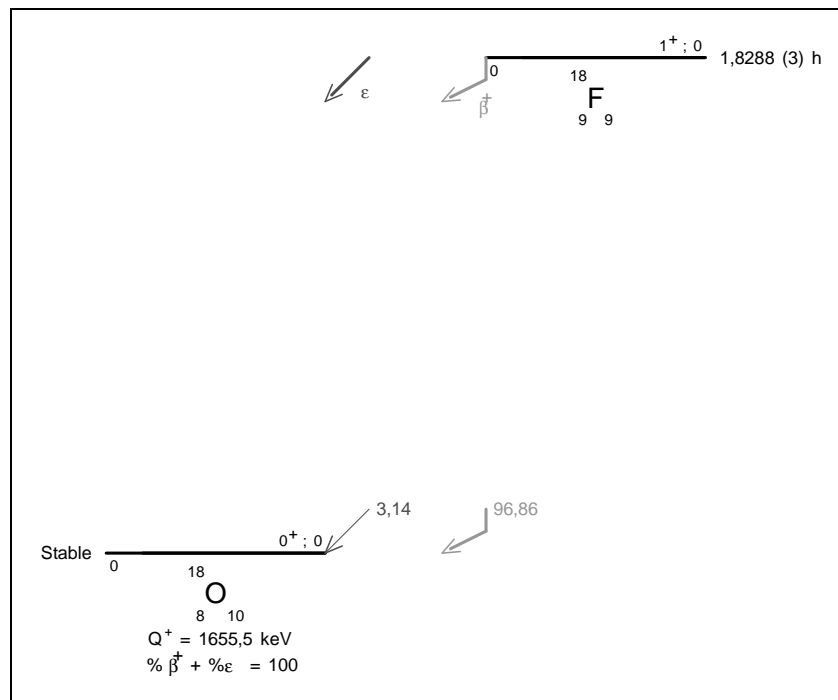


Figura 12: Esquema de decaimiento del ^{18}F . (Figura generada con nucleide [8].)

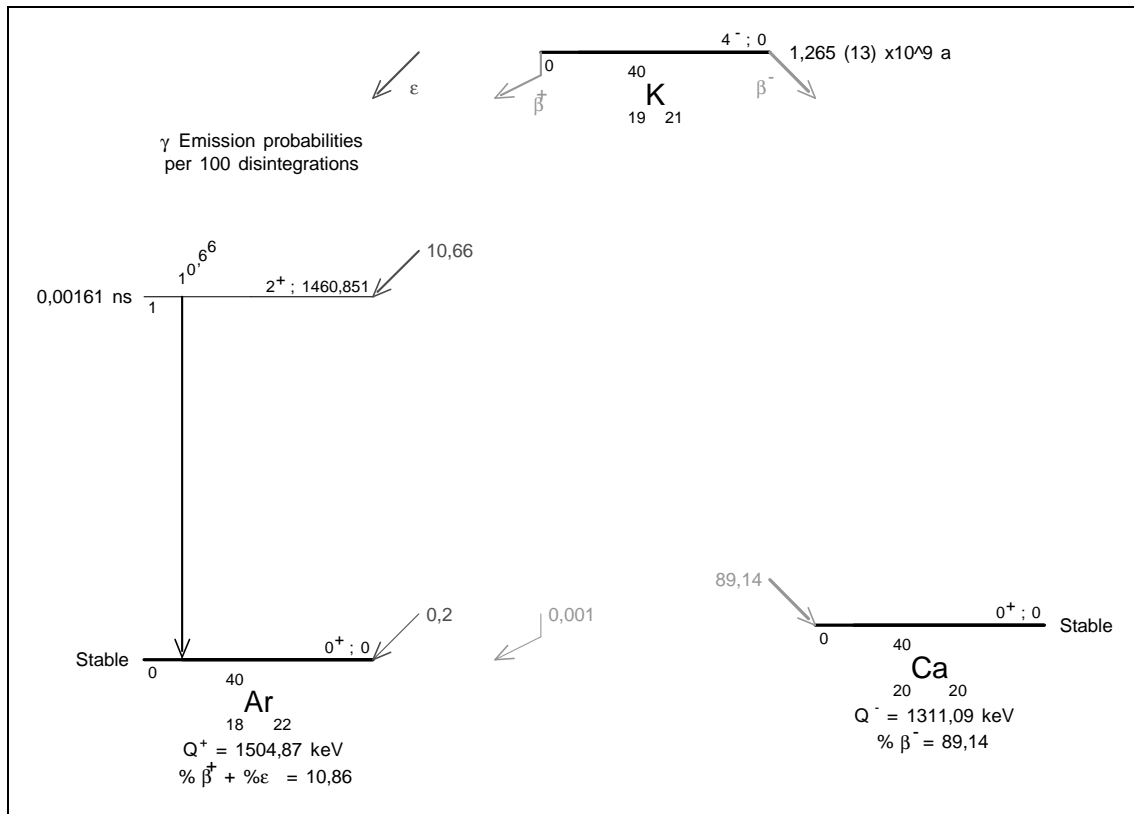


Figura 13: Esquema de decaimiento del ^{40}K . (Figura generada con nucleide [8].)

3.3.1 Emisión gamma

En este caso el núcleo excitado emite un fotón,



A su vez el núcleo descendente puede estar excitado y decaer por emisión gamma. Evidentemente $Q_\gamma = 0$. El balance de energía es

$$\mathcal{E}_i + Q_\gamma = \mathcal{E}_f + E_X + E_\gamma, \quad (32)$$

de manera que el fotón es emitido con una energía bien definida

$$E_\gamma = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f - E_X. \quad (33)$$

Al imponer la conservación de la cantidad de movimiento la energía cinética de retroceso del átomo resulta ser

$$E_X \approx \frac{(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f)^2}{2M_X c^2}. \quad (34)$$

Valores comunes de E_γ están entre aproximadamente 10 keV y unos pocos MeV. La energía de retroceso es despreciable excepto cuando E_γ es grande y el núcleo es ligero, llegando a valer algunas decenas de eV.

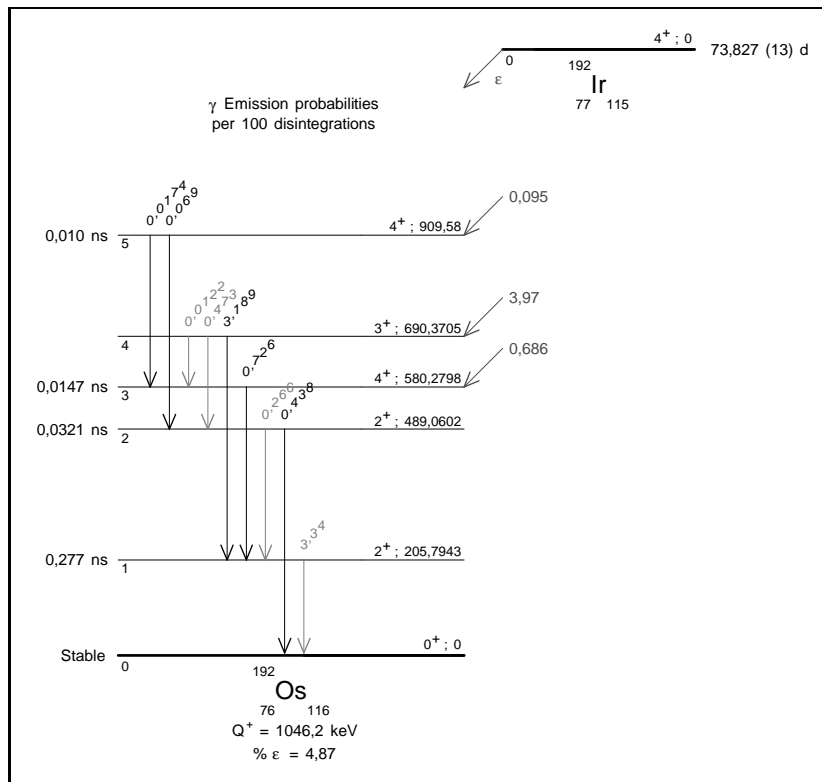
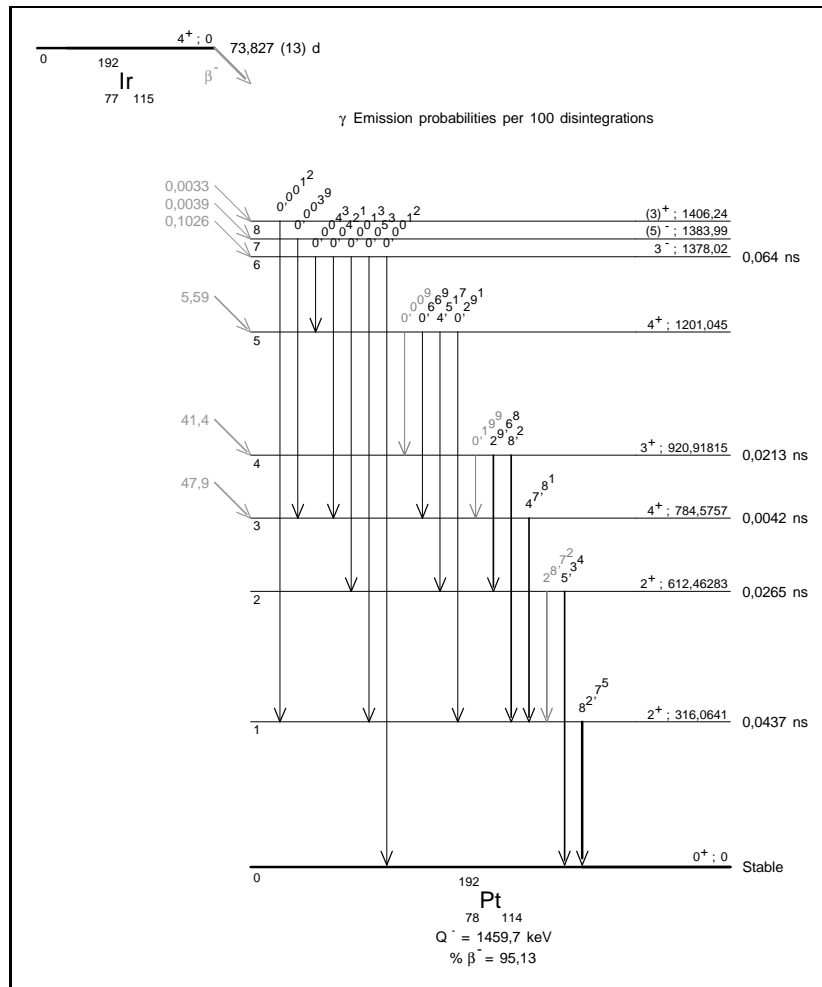


Figura 14: Esquema de decaimiento del ^{192}Ir . (Figura generada con nucleide [8].)

La probabilidad de una transición gamma depende fuertemente del momento angular y la paridad de los niveles inicial y final involucrados, dando lugar a las denominadas *reglas de selección*. Consideremos una transición

$$I_i^{\pi_i} \longrightarrow I_f^{\pi_f}. \quad (35)$$

Efectuando un desarrollo multipolar del campo de radiación, las diferentes transiciones se denominan dipolar eléctrica (E1), dipolar magnética (M1), cuadrupolar eléctrica (E2), etc. atendiendo al momento angular $L \geq 1$ que se lleva el fotón. Es decir: E1, M1, E2, ... $\equiv \{EL, ML\}$. Debe cumplirse que

$$|I_f - I_i| \leq L \leq I_f + I_i, \quad (36)$$

por lo que las transiciones $0^+ \longrightarrow 0^+$ están prohibidas. En cuanto a la paridad, se ha de cumplir que

$$\pi_f \pi_i = \begin{cases} (-1)^L & \text{para } EL, \\ (-1)^{L+1} & \text{para } ML. \end{cases} \quad (37)$$

En consecuencia no puede haber a la vez transiciones EL y ML con igual L (multipolaridad).

Los *estimadores de Weisskopf* [2–4] permiten deducir las desigualdades

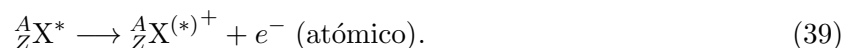
$$\lambda_\gamma(E1) \gg \lambda_\gamma(M1) > \lambda_\gamma(E2) \gg \dots \quad (38)$$

para las probabilidades de emisión gamma por unidad de tiempo de las diferentes multipolaridades. En consecuencia, la multipolaridad más probable corresponde a $L_{\min} = \max\{|I_f - I_i|, 1\}$.

Como se ha visto en la figura 9, que muestra la desintegración β^- del ^{60}Co , prácticamente en el 100% de los casos el ^{60}Ni es creado en su tercer nivel excitado y decae emitiendo consecutivamente dos fotones con energías de 1.173 MeV y 1.333 MeV (la transición directa al estado fundamental está prohibida). Por otro lado, en la figura 15 se representa la desintegración β^- del ^{131}I . El núcleo descendiente queda en el alguno de los numerosos niveles excitados y al decaer pueden emitirse fotones de varias energías.

3.3.2 Conversión interna

Puede suceder que el núcleo excitado transfiera el exceso de energía directamente a un electrón atómico, habitualmente de una capa profunda con $\ell = 0$, que es liberado.



Esta vez $Q_{\text{IC}} = 0$ (nótese que en el estado final el átomo está ionizado). La ecuación de conservación de la energía exige que sea

$$\mathcal{E}_i - U_i + Q_{\text{IC}} = \mathcal{E}_f + E_X + E_e, \quad (40)$$

por lo cual el electrón es emitido con una energía cinética bien definida

$$E_e = E_\gamma - U_i; \quad (41)$$

de nuevo U_i es la energía de ligadura del orbital atómico involucrado. Valores habituales de E_e están entre unos pocos keV y alrededor de 1 MeV. Al igual que en la captura electrónica, el átomo queda con una vacante en una capa interna y se relaja emitiendo radiación fluorescente.

La probabilidad por unidad de tiempo de conversión interna suele darse en términos de λ_γ mediante la relación

$$\lambda_e = \alpha \lambda_\gamma, \quad (42)$$

donde α es el *coeficiente de conversión interna*, que se desglosa en contribuciones de las diferentes capas atómicas,

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \dots \quad (43)$$

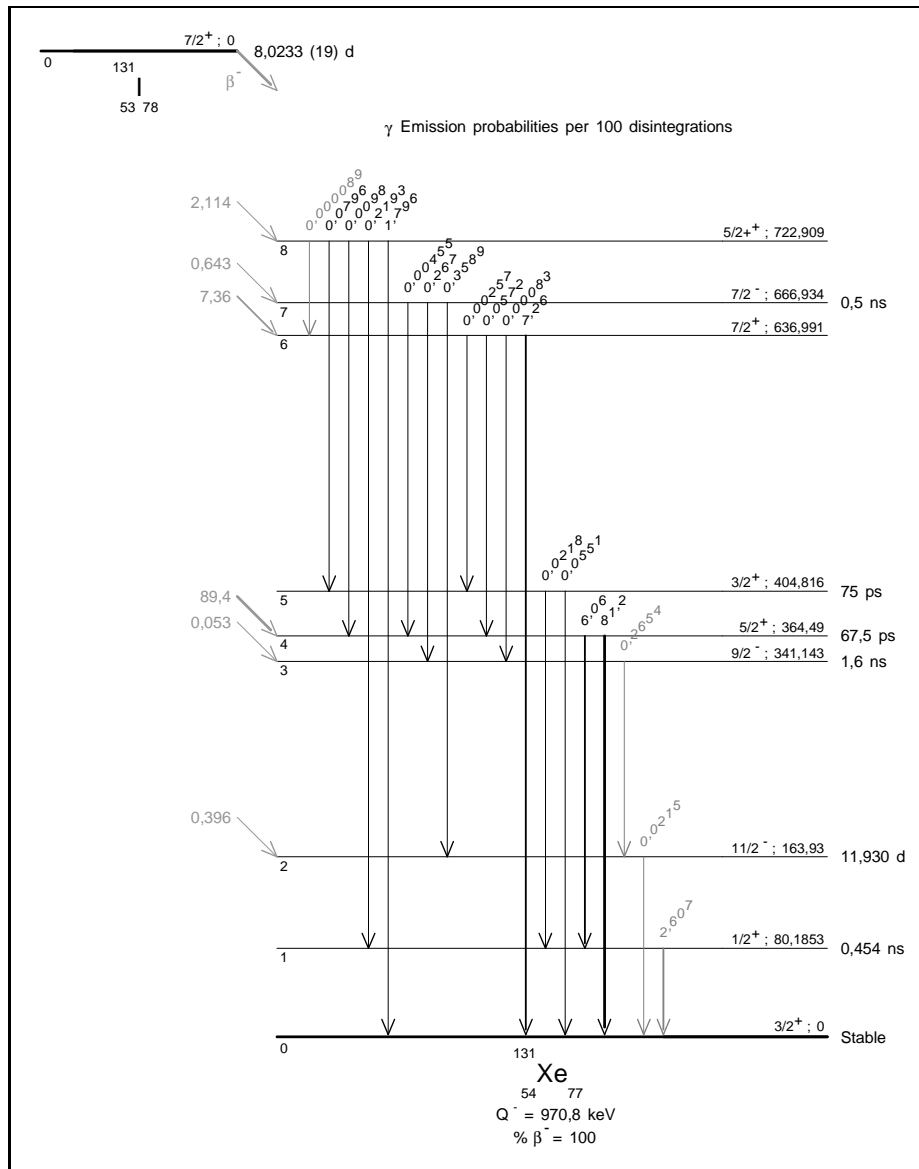


Figura 15: Esquema de decaimiento del ^{131}I . (Figura generada con `nucleide` [8].)

Para una capa atómica con número cuántico principal n se tiene que el correspondiente coeficiente de conversión interna es aproximadamente proporcional a Z^3/n^3 y decrece con la energía de la transición [2,4], de modo que la conversión interna cobra importancia para niveles de energía bajos de núcleos pesados, siendo lo más probable que el electrón emitido lo sea desde la capa K . Algunos ejemplos de radionucleidos que experimentan conversión interna están en la tabla 2.

Tabla 2: Energías cinéticas de los electrones emitidos en la conversión interna de algunos radionucleidos [8].

Radionucleido	E / keV
^{125}I	3.7, 31, 35
^{131}I	45.6, 75, ...
^{137}Cs	624, 656, 661

3.3.3 Creación de pares interna

En este caso la energía de la transición se invierte en producir un par electrón-positrón,



Ahora es

$$Q_\pi = -2m_e c^2 \quad (45)$$

y el balance de energía del proceso conduce a la relación

$$E_{e^-} + E_{e^+} = E_\gamma - 2m_e c^2 \quad (46)$$

que han de cumplir las energías cinéticas E_{e^-} y E_{e^+} de los leptones emitidos. Vemos que el proceso sólo es posible si $E_\gamma > 2m_e c^2$.

La probabilidad por unidad de tiempo de creación de pares interna suele escribirse

$$\lambda_\pi = \alpha_\pi \lambda_\gamma. \quad (47)$$

Al ser $\alpha_\pi \sim 10^{-4} - 10^{-3}$, la creación de pares interna es mucho menos probable que los demás procesos de decaimiento electromagnético, siendo apreciable cuando la emisión de un fotón está prohibida, como sucede en las transiciones $0^+ \longrightarrow 0^+$.

3.4 Fisión espontánea

Algunos núcleos muy pesados ($A \gtrsim 240$) son inestables, tendiendo a fisiónar espontáneamente en dos fragmentos de fisión y liberando además unos pocos neutrones rápidos [2],



Los fragmentos de fisión presentan una distribución de masas (y energías) asimétrica, con máximos en $A \sim 100$ y $A \sim 140$, y suelen ser a su vez emisores beta-gamma. La distribución de energía cinética de los neutrones emitidos se ajusta bien a la forma funcional

$$p(E) \propto \sqrt{E} \exp(-E/T), \quad (49)$$

donde T es un parámetro ajustable.

El ${}^{252}\text{Cf}$ ($T_{1/2} = 2.6470$ a) es el ejemplo paradigmático de radionucleido que fisiona espontáneamente (un 3.086% de los decaimientos). La distribución de energía de los neutrones liberados (3.7675 por fisión, en promedio) sigue la ecuación (49) con $T = 1.3$ MeV.

3.5 Otros procesos y fenómenos

Existen otros procesos y fenómenos relacionados con las transformaciones nucleares que, aunque presentan probabilidades en general pequeñas, debemos mencionar por completitud.

Como se ha explicado antes, los núcleos con un exceso de protones o neutrones tienden a decaer por emisión β^\pm o captura electrónica. Cuando el exceso es muy grande, llega a ser más favorable la emisión de un protón,

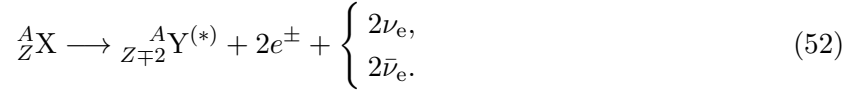


o un neutrón,



según sea el caso. Esto les sucede a radionucleidos (Z, N) que están fuera de las denominadas “líneas de goteo” (*drip lines* en inglés), para las que la energía de separación de un protón o neutrón es cero.

La desintegración doble beta es un proceso de segundo orden inducido por la interacción débil en la que se emiten dos electrones o dos positrones



Las constantes de decaimiento asociadas son muy pequeñas, y los correspondientes períodos son del orden de 10^{20} años. Esto hace muy difícil su observación excepto cuando la desintegración beta ordinaria está prohibida.

También es de segundo orden la emisión de dos fotones,



que cobra importancia cuando la emisión de un sólo fotón está prohibida.

Finalmente cabe citar la radiación de frenado interna, fenómeno que acompaña a la desintegración beta. Consiste en la emisión de un fotón de radiación de frenado por el electrón (o positrón) mientras es acelerado en el campo coulombiano del núcleo descendiente; no se debe confundir con la radiación de frenado ordinaria. La energía $E_{\beta_{\max}}$ se distribuye entre el electrón, el neutrino y el fotón.

3.6 Radiación fluorescente

Como ya se ha dicho, en los procesos de captura electrónica y conversión interna se libera un electrón atómico, preferentemente de una capa profunda (K o L), y el átomo queda en un estado excitado. En el subsiguiente reajuste de la distribución de carga electrónica, la vacante se cubre mediante la transición de un electrón desde una capa más externa, emitiéndose radiación fluorescence, es decir, un rayo x característico o un electrón Auger. La migración de vacantes continúa hacia capas aún más externas con la emisión de otros rayos x característicos y/o electrones Auger. En el tema 1 de este módulo se da información adicional sobre las probabilidades y energías asociadas a estos procesos de relajación atómica.

La figura 16 presenta las radiaciones ionizantes emitidas (en promedio) tras el decaimiento de un núcleo de ${}^{111}\text{In}$ por captura electrónica. Además de rayos γ y electrones de conversión interna aparece una cantidad apreciable de rayos x característicos y electrones Auger y Coster–Kronig cuyo origen es atómico.

4 Ley de decaimiento radiactivo

Consideremos un conjunto de \mathcal{N} radionucleidos idénticos. Nuestro objetivo es entender cómo varía \mathcal{N} con el tiempo. Es intuitivo que debe ser

$$d\mathcal{N}(t) \propto -\mathcal{N} dt. \quad (54)$$

Introduciendo la constante de decaimiento λ ,

$$d\mathcal{N}(t) = -\lambda \mathcal{N} dt. \quad (55)$$

Esta ecuación diferencial admite la solución

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(0) \exp(-\lambda t), \quad (56)$$

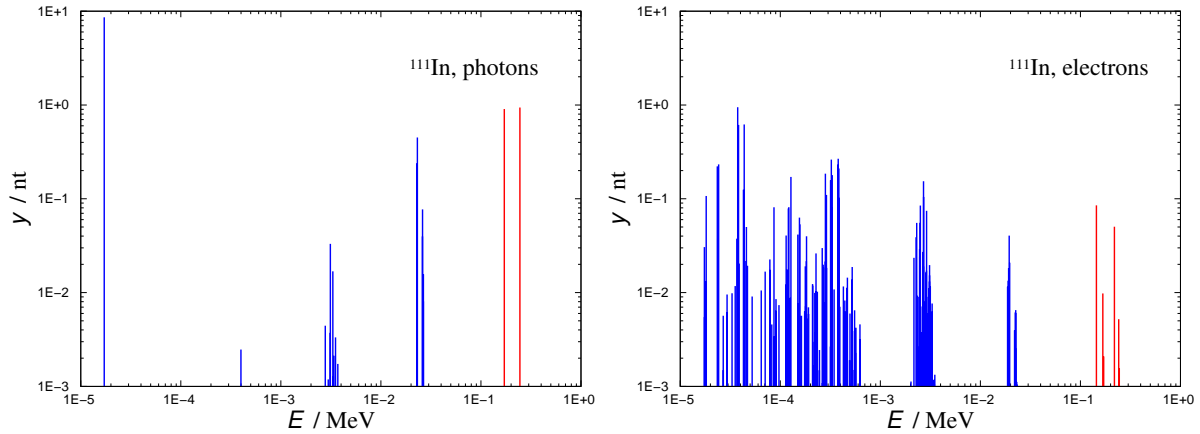


Figura 16: Radiaciones ionizantes emitidas, en promedio, en el decaimiento del ^{111}In . (a) Rayos γ y rayos x característicos. (b) Electrones de conversión interna y electrones Auger y Coster–Kronig. Las líneas rojas indican rayos γ y electrones de conversión interna mientras que las azules son radiaciones fluorescentes del Cd (rayos x característicos, electrones Auger y Coster–Kronig).

donde $\mathcal{N}(0)$ es el número de nucleidos sin transformar en $t = 0$. De esta ley de decaimiento exponencial vemos que el período $T_{1/2}$, definido en la ecuación (7), cumple la relación

$$\mathcal{N}(t = T_{1/2}) = \mathcal{N}(0)/2. \quad (57)$$

No debemos confundir el período con la vida media $\tau \equiv \lambda^{-1}$, para la cual $\mathcal{N}(t = \tau) = \mathcal{N}(0)/e$.

De la ley de decaimiento exponencial también obtenemos que la relación entre la actividad, ecuación (5), y la constante de decaimiento es

$$\mathcal{A} = \lambda \mathcal{N}. \quad (58)$$

4.1 Cadenas de decaimiento radiactivo

- Si tenemos que $1 \rightarrow 2$ (2 estable) con $\mathcal{N}_1(0) \equiv \mathcal{N}_0$ y $\mathcal{N}_2(0) = 0$

$$\mathcal{N}_1(t) = \mathcal{N}_0 \exp(-\lambda_1 t) \quad (59)$$

$$\mathcal{N}_2(t) = \mathcal{N}_0 [1 - \exp(-\lambda_1 t)] \quad (60)$$

ya que $\mathcal{N}_1(t) + \mathcal{N}_2(t) = \mathcal{N}_0$.

- En el caso más general de cadena lineal $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n$ (n estable)

$$d\mathcal{N}_1/dt = -\lambda_1 \mathcal{N}_1$$

$$d\mathcal{N}_2/dt = \lambda_1 \mathcal{N}_1 - \lambda_2 \mathcal{N}_2$$

$$\vdots$$

$$d\mathcal{N}_i/dt = \lambda_{i-1} \mathcal{N}_{i-1} - \lambda_i \mathcal{N}_i \quad (61)$$

$$\vdots$$

$$d\mathcal{N}_n/dt = \lambda_{n-1} \mathcal{N}_{n-1}.$$

Si $\mathcal{N}_1(0) \equiv \mathcal{N}_0$ y $\mathcal{N}_2(0) = \dots = \mathcal{N}_n(0) = 0$, la solución es (*ecuaciones de Bateman*) [2, 22, 23]

$$\mathcal{N}_i(t) = \mathcal{N}_0 \sum_{j=1}^i c_j^{(i)} \exp(-\lambda_j t) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (62)$$

donde

$$c_j^{(i)} = \left[\prod_{k=1}^{i-1} \lambda_k \right] \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i (\lambda_k - \lambda_j) \right]^{-1}, \quad c_1^{(1)} \equiv 1 \quad (63)$$

y

$$\mathcal{N}_n(t) = \mathcal{N}_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{N}_k(t). \quad (64)$$

• Caso particular importante $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (3 estable):

$\mathcal{N}_1(t)$ está dado por la ecuación (59), mientras que

$$\mathcal{N}_2(t) = \mathcal{N}_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)] \quad (65)$$

y $\mathcal{N}_3(t) = \mathcal{N}_0 - [\mathcal{N}_1(t) + \mathcal{N}_2(t)]$. El máximo de actividad de 2 se alcanza en

$$t_{\max} = \ln(\lambda_2/\lambda_1) (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}. \quad (66)$$

Como

$$\frac{\lambda_2 \mathcal{N}_2(t)}{\lambda_1 \mathcal{N}_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ 1 - \exp[-(\lambda_2 - \lambda_1)t] \right\}, \quad (67)$$

se comprueba fácilmente que

$$\lambda_2 \mathcal{N}_2(t_{\max}) = \lambda_1 \mathcal{N}_1(t_{\max}). \quad (68)$$

La figura 17 muestra los cocientes $\mathcal{N}_i(t)/\mathcal{N}_0$ ($i = 1, 2, 3$) para $\lambda_2 = 0.2 \lambda_1$ y $\lambda_2 = 5.0 \lambda_1$.

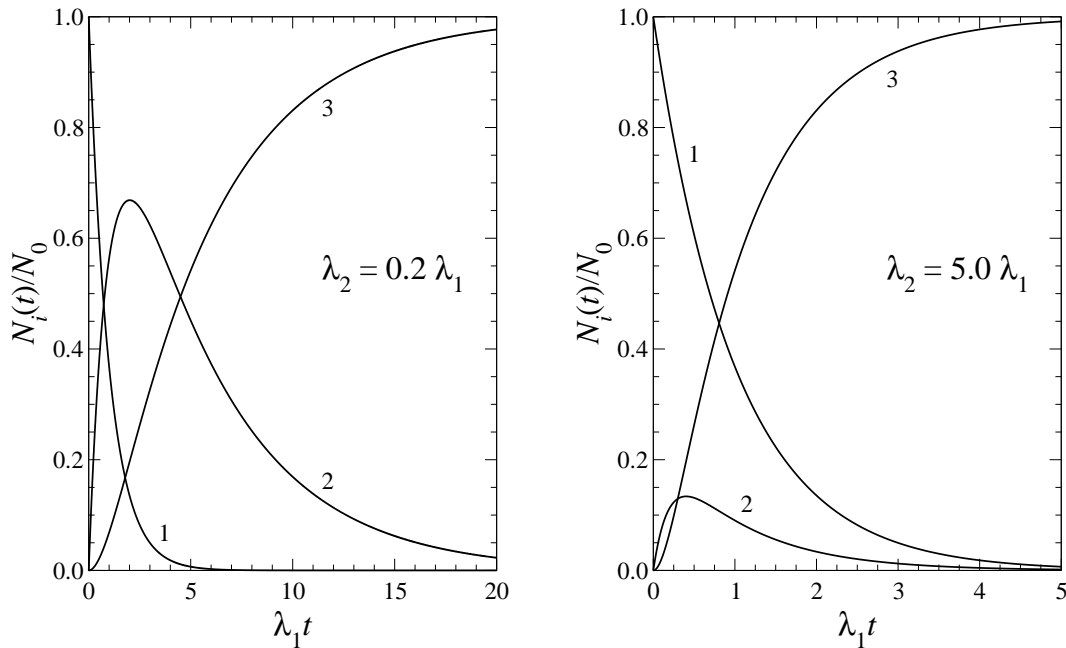


Figura 17: $\mathcal{N}_i(t)/\mathcal{N}_0$ ($i = 1, 2, 3$) en función de $\lambda_1 t$ para (a) $\lambda_2 = 0.2 \lambda_1$ y (b) $\lambda_2 = 5.0 \lambda_1$.

- La situación más interesante se presenta cuando $\lambda_2 \gg \lambda_1$: para tiempos $t \gg \lambda_2^{-1}$ se llega al denominado *equilibrio secular*

$$\lambda_2 \mathcal{N}_2(t) = \lambda_1 \mathcal{N}_1(t), \quad (69)$$

y por tanto $\mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_1(t)$.

En la figura 18 se han representado los cocientes $\mathcal{N}_i(t)/\mathcal{N}_0$ ($i = 1, 2, 3$) y $\mathcal{A}_2(t)/\mathcal{A}_1(t)$ para una cadena de decaimientos con $\lambda_2 = 20 \lambda_1$, que da lugar a un equilibrio secular aproximado.

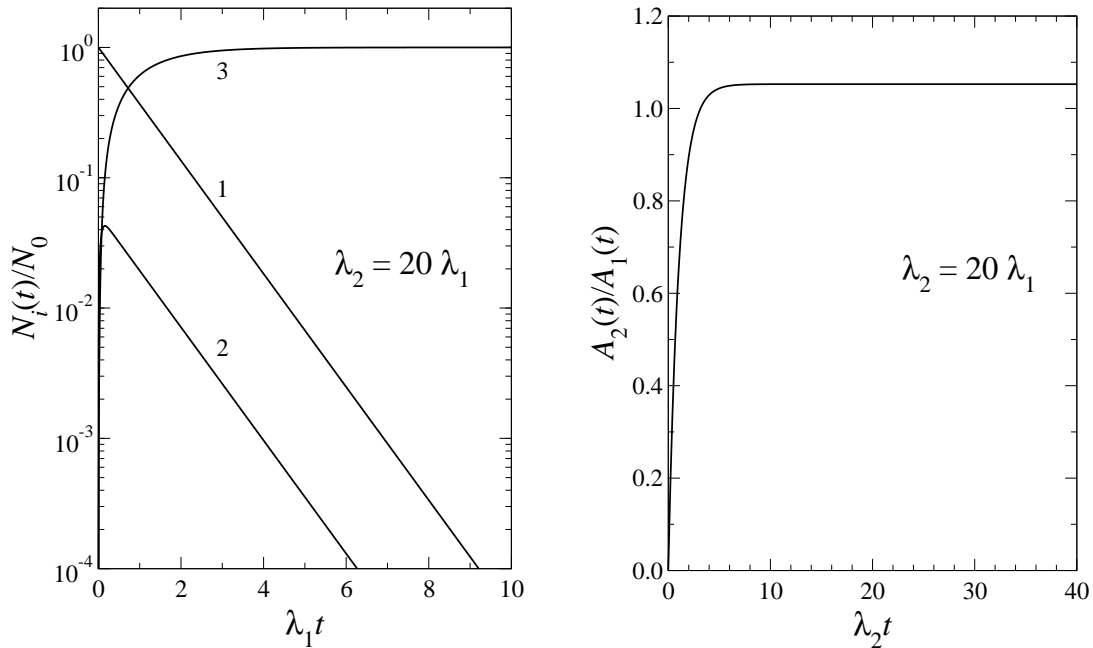
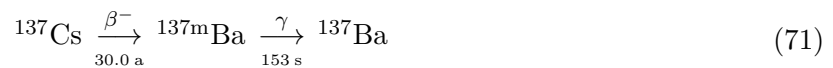


Figura 18: Cadena $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (3 estable) con $\lambda_2 = 20 \lambda_1$. (a) $\mathcal{N}_i(t)/\mathcal{N}_0$ ($i = 1, 2, 3$) en función de $\lambda_1 t$. (b) $\mathcal{A}_2(t)/\mathcal{A}_1(t)$ en función de $\lambda_2 t$.

Ejemplos:



con $E_{\beta_{\text{max}}} = 1.215 \text{ MeV}$ y $E_{\gamma} = 0.143 \text{ MeV}$.



con $E_{\beta_{\text{max}}} = 0.514 \text{ MeV}$ y $E_{\gamma} = 0.662 \text{ MeV}$.



con $E_{\beta_{\text{max},1}} = 0.546 \text{ MeV}$ y $E_{\beta_{\text{max},2}} = 2.280 \text{ MeV}$.

En ocasiones se necesita conocer la evolución temporal de varios tipos de núcleo que forman parte de una cadena de decaimiento no lineal (i.e. con ramificaciones) o cuyas condiciones iniciales no son las implícitas en las ecuaciones de Bateman, $\mathcal{N}_i(0) = \mathcal{N}_0 \delta_{i1}$. En estos casos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se resuelve recurriendo a métodos matriciales [23, 24].

4.2 Producción de radionucleidos por irradiación

En diversas aplicaciones el radionucleido de interés decae muy rápidamente. Este es el caso del ^{18}F y otros emisores β^+ usados en PET. Estos radionucleidos deben obtenerse a partir de una reacción nuclear empleando para ello un ciclotrón o un reactor nuclear. Reacciones típicas son (p, n) , (p, α) , (d, n) , $(\alpha, .)$ y $(n, .)$. Supongamos la secuencia



donde B es el radionucleido de interés y C es estable. Sea σ la sección eficaz de la reacción $A(a,b)B$ y $\dot{\Phi}$ la tasa de fluencia de los proyectiles a. El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que rige la evolución temporal de las especies nucleares A y B es

$$d\mathcal{N}_A/dt = -\dot{\Phi}\sigma\mathcal{N}_A \equiv -\bar{\lambda}_A\mathcal{N}_A, \quad (74)$$

$$d\mathcal{N}_B/dt = \bar{\lambda}_A\mathcal{N}_A - \lambda_B\mathcal{N}_B, \quad (75)$$

formalmente idéntico al sistema de ecuaciones (61) por haber introducido una variable $\bar{\lambda}_A \equiv \dot{\Phi}\sigma$ que juega un papel análogo a una hipotética constante de decaimiento de A.

En estas situaciones siempre es $\lambda_B \gg \bar{\lambda}_A$ debido a la pequeñez de las secciones eficaces. Podemos entonces hacer la aproximación $\mathcal{N}_A(t) \approx \mathcal{N}_A(0) \equiv \mathcal{N}_0$, con lo que

$$d\mathcal{N}_B/dt = \bar{\lambda}_A\mathcal{N}_0 - \lambda_B\mathcal{N}_B \quad (76)$$

que tiene solución

$$\mathcal{N}_B(t) = \frac{\dot{\Phi}\sigma\mathcal{N}_0}{\lambda_B} [1 - \exp(-\lambda_B t)]. \quad (77)$$

El máximo número de radionucleidos B se alcanza después de un tiempo de irradiación infinito,

$$\mathcal{N}_B(t = \infty) = \frac{\dot{\Phi}\sigma\mathcal{N}_0}{\lambda_B}, \quad (78)$$

y la correspondiente actividad asintótica es $\mathcal{A}_B(t = \infty) = \lambda_B\mathcal{N}_B(t = \infty) = \dot{\Phi}\sigma\mathcal{N}_0$. Sin embargo el tiempo de irradiación óptimo es $\sim 1-2 T_{1/2}(B)$, pues se consigue que \mathcal{A}_B sea sólo ligeramente inferior a $\mathcal{A}_B(t = \infty)$.

5 Radiactividad natural

5.1 Series radiactivas y otros radionucleidos naturales

Muchos minerales de la corteza terrestre contienen pequeñas cantidades de radionucleidos con $A \gtrsim 200$. Éstos forman parte de largas cadenas de emisores α y β^- . Las cuatro series posibles se indican en la tabla 3. Como el miembro más longevo de la serie del neptunio tiene un período muy inferior a la edad de la Tierra, esta serie ya se ha extinguido. La serie radiactiva del ^{238}U se representa esquemáticamente en la figura 19. Uno de los miembros de esta serie es el ^{222}Rn , responsable de una fracción apreciable de la dosis efectiva anual que recibimos [25].

Algunos radionucleidos no pertenecen a ninguna de las series de desintegraciones antes citadas, pero al tener un período muy largo (comparable a la edad del universo) existen en la naturaleza en cantidades apreciables. El ^{40}K tiene $T_{1/2} = 1.265 \times 10^9$ a, decayendo a ^{40}Ar o ^{40}Ca (ver figura 13).

Tabla 3: Series radiactivas [2].

Nombre	Tipo	Núcleo final	Miembro de mayor $T_{1/2}$	
			Núcleo	$T_{1/2}$ /a
Torio	$4n$	^{208}Pb	^{232}Th	1.41×10^{10}
Neptunio	$4n + 1$	^{209}Bi	^{237}Np	2.14×10^6
Uranio	$4n + 2$	^{206}Pb	^{238}U	4.47×10^9
Actinio	$4n + 3$	^{207}Pb	^{235}U	7.04×10^8

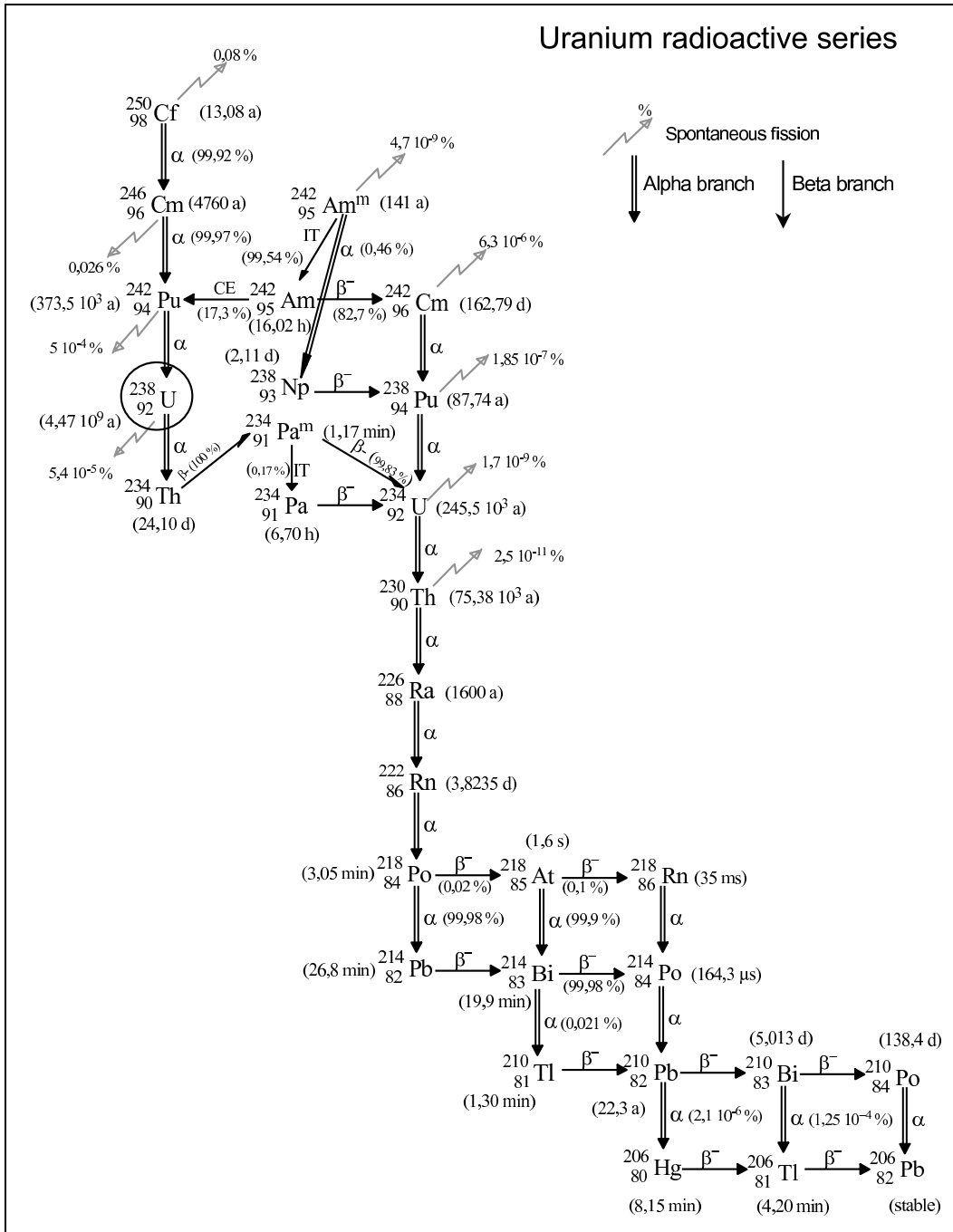


Figura 19: Serie radiactiva del ^{238}U . (Figura generada con nucleide [8].)

5.2 Radiación cósmica

La superficie de nuestro planeta es bombardeada constantemente por radiación ionizante de origen extraterrestre a la que, por razones históricas, llamamos *radiación cósmica*. Una gran parte de esta radiación proviene del sol, mientras que el origen del resto está en objetos más lejanos, incluso fuera de nuestra galaxia. En ambos casos, la componente mayoritaria son protones y partículas α (recordemos que hidrógeno y helio son con diferencia los elementos más abundantes del universo), aunque podemos encontrar iones más pesados. También llegan electrones, fotones y positrones, así como otras partículas cargadas (μ^\pm , etc). Por otro lado, en reacciones nucleares con moléculas de las capas altas de la atmósfera terrestre se produce cierta cantidad de neutrones que acaba llegando a la superficie de la Tierra. El intervalo de energías de todas estas radiaciones es muy amplio, entre los MeV y EeV (10^{18} eV).

Las referencias [26,27] contienen información más detallada sobre la composición, distribuciones de energía y otras propiedades de la radiación cósmica.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a Antonio Brosed por haber confiado en mi para elaborar este tema, a sabiendas de mi desconocimiento de la física nuclear. También deseo agradecer a Antonio Lallena, Mario Centelles y Sébastien Hubert sus valiosos comentarios al texto.

Referencias

- [1] J.J. Pedroso de Lima, *Eur. J. Phys.* **19** (1998) 485.
- [2] K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1988).
- [3] S.S.M. Wong, *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1998) 2nd edition.
- [4] V. Devanathan, *Nuclear Physics* (Alpha Science International Ltd., Oxford, 2006).
- [5] E.B. Podgorsak, *Radiation Physics for Medical Physicists* (Springer, Berlin, 2010) 2nd edition.
- [6] G.F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement* (John Wiley & Sons, New York, 2000) 3rd edition.
- [7] M.-M. Bé, N. Coursol, B. Duchemin, F. Lagoutine, J. Legrand, K. Debertain and E. Schönfeld, *Table of Radionuclides. Introduction* (CEA, Saclay, 2011).
http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Introduction_2011.pdf
- [8] M.-M. Bé, V. Chisté, C. Dulieu, E. Browne, C. Baglin, V. Chechev, N. Kuzmenco, R. Helmer, F. Kondev, D. MacMahon and K.B. Lee, *Table of Radionuclides (Vol. 3 - A = 3 to 244)* (Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, 2006).
<http://www.bipm.org/fr/publications/monographie-ri-5.html>
<http://www.nucleide.org/>
http://www.nucleide.org/DDEP_WG/DDEPdata.htm
- [9] <http://ie.lbl.gov/toi.html>
- [10] <http://www.nndc.bnl.gov/>
<http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>
<http://www.nndc.bnl.gov/mird/>
<http://www-nds.iaea.org/>

- [11] K.F. Eckerman and A.L. Sjoeren, *Radiological Toolbox User's Guide* (Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, 2013).
<https://www.nrc.gov/docs/ML1314/ML13149A163.pdf>
<https://www.ornl.gov/crpk/software>
- [12] <http://ie.lbl.gov/decay.html>
- [13] Chartist Version 3.0
<http://ie.lbl.gov/programs/chartist/chartist.htm>
- [14] ICRU, *Fundamental Quantities and Units for Ionizing Radiation (Revised)* ICRU Report 85 (ICRU, Bethesda, MD, 2011).
- [15] B. Buck, A.C. Merchant and S.M. Perez, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **18** (1992) 143; *Phys. Rev. C* **45** (1992) 2247; *At. Data Nucl. Data Tables* **54** (1993) 53.
- [16] <http://ie.lbl.gov/toia.html>
<http://ie.lbl.gov/toi/sumframe.htm>
- [17] E. Garcia-Toraño and A. Grau-Malonda, *Comput. Phys. Commun.* **36** (1985) 307.
- [18] D.H. Wilkinson, *Nucl. Instrum. Meth. A* **275** (1989) 378.
- [19] ICRU, *Dosimetry of External Beta Rays for Radiation Protection* ICRU Report 56 (ICRU, Bethesda, MD, 1997).
- [20] X. Mougeot, *Phys. Rev. C* **91** (2015) 055504.
- [21] W.G. Cross, H. Ing and N. Freedman, *Phys. Med. Biol.* **28** (1983) 1251.
- [22] D.S. Pressyanov, *Am. J. Phys.* **70** (2002) 444.
- [23] L. Moral and A.F. Pacheco, *Am. J. Phys.* **71** (2003) 684.
- [24] M. Amaku, P.R. Pascholati and V.R. Vanin, *Comput. Phys. Commun.* **181** (2010) 21.
- [25] UNSCEAR 2000 Report, *Sources and Effects of Ionizing Radiation, Volume I: Sources* (UNSCEAR, 2000).
<http://www.unscear.org/docs/reports/gareport.pdf>
- [26] Particle Data Group, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **33** (2006) 1.
<http://pdg.web.cern.ch/pdg/>
- [27] A.D. Erlykin and A.W. Wolfendale, *Eur. J. Phys.* **20** (1999) 409.