IME-USP
MAT230 – Geometria e Desenho Geométrico I
Licenciatura em Matemática – Diurno – 2/2019

RESUMO 3 – *Axiomas da Geometria Euclideana* (cont.)[1]

Para podermos falar da **região interna de polígonos** ou do **interior de ângulos** precisaremos primeiro da noção de semi-plano. Para introduzir tal conceito e fixar as propriedades que o caracterizam, necessitamos introduzir mais um novo postulado.

Postulado da Separação de Planos

PS.1 – Dados uma reta e um plano que a contém, o conjunto de todos os pontos do plano que não pertencem à reta é a união de dois conjuntos disjuntos tais que:
(1) Cada um dos conjuntos é convexo;
(2) Se P está em um dos conjuntos e Q está no outro, então o segmento $\overline{PQ}$ intercepta a reta.

DEF12: Sendo π um plano e *r* uma reta contida em π, cada um dos conjuntos descritos no postulado de separação de planos é chamado de **semiplano** e *r* é chamada de **origem** de cada um deles. Cada um dos semiplanos é chamado também de um **lado de *r* em π**.

DEF13: O **interior do ângulo BÂC** é a intersecção do lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ onde está B com o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ onde está *C.* (Faça um desenho!)

DEF14: O **interior do triângulo ΔABC** é a intersecção dos interiores dos seus três ângulos.

Para tratar de **congruência de figuras geométricas** em geral, necessitamos também poder falar de congruência de ângulos, além da congruência de segmentos já introduzida. Para tanto, será necessário medir ângulos, além de medir comprimentos. O conceito de distância introduzido por postulados nos possibilitou medir comprimentos. Vamos agora precisar de novos postulados para introduzir a **medida angular**.

Postulados de medidas dos ângulos

M.0 – Medida angular é uma função *m* cujo domínio é o conjunto de todos os ângulos e cuja imagem é o intervalo $]\, 0, 180\, [\ \subset \mathbb{R}$.

Obs.: Sendo $< \boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{d} >$ um espaço geométrico, se chamarmos de *A o* conjunto de todos os ângulos nesse espaço, temos, na notação usual de função, que $m: A \to\ ]\,0,180\,[\ (\subset \mathbb{R})$
ou seja, para todo ângulo α, *med* (α) está estritamente entre 0 e 180.

M.1 (Postulado da construção de ângulos) – Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na origem do semiplano H. Para todo número *a* entre 0 e 180, existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{AP}$, com *P* em *H*, tal que *med*(PÂB) = *a.*

[1] Com base no resumo elaborado pela Profa. Iole de Freitas Druck do IME-USP.

M.2 (<u>Postulado da adição de ângulos</u>) – Se D está no interior do BÂC, então
med(BÂC) = med(BÂD) + med(DÂC).

<u>DEF15</u>: Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas opostas (contidas na mesma reta) e $\overrightarrow{AD}$ é outra semirreta, dizemos então que os ângulos DÂB e DÂC formam um **<u>par linear</u>**.

<u>DEF16</u>: Dois ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ são ditos **<u>suplementares</u>** se $med(A\hat{B}C) + med(D\hat{E}F) = 180$. (Observe que esses ângulos não necessitam ter um lado comum).

Os postulados de medida angular anteriores só fixaram propriedades da medida, mas não fixaram nenhum valor para algum ângulo. É o que faz o próximo postulado.

M.3 (<u>Postulado do suplemento</u>) – Se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares.

<u>DEF17</u>: Dizemos que dois ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ são **<u>congruentes</u>** se $med(A\hat{B}C) = med(D\hat{E}F)$. Neste caso, escrevemos $A\hat{B}C \equiv D\hat{E}F$.

<u>DEF18</u>: Em um par linear, se os dois ângulos são congruentes, então chamamos cada um deles de **<u>ângulo reto</u>.**

Exercício: Usando os postulados e definições dadas, prove que um ângulo reto tem 90 como medida.