

**SEM0501**

# Dinâmica Aplicada às Máquinas

Aula #8 — Movimento plano geral e relativo de corpos rígidos

Laboratório de

**Prof. Dr. Thiago Boaventura**

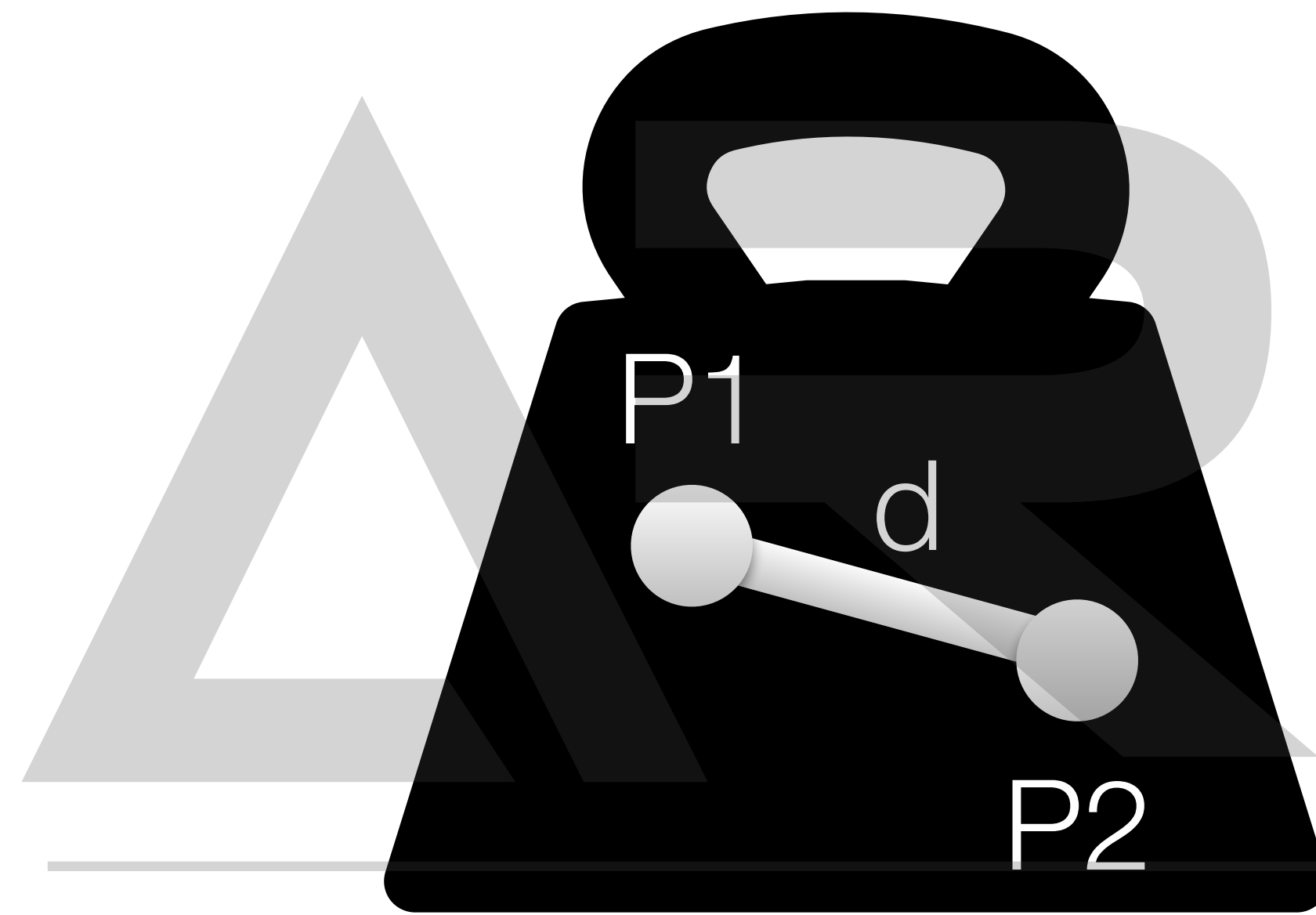
[tboaventura@usp.br](mailto:tboaventura@usp.br)

São Carlos, 09/09/19



# Aula passada...

---

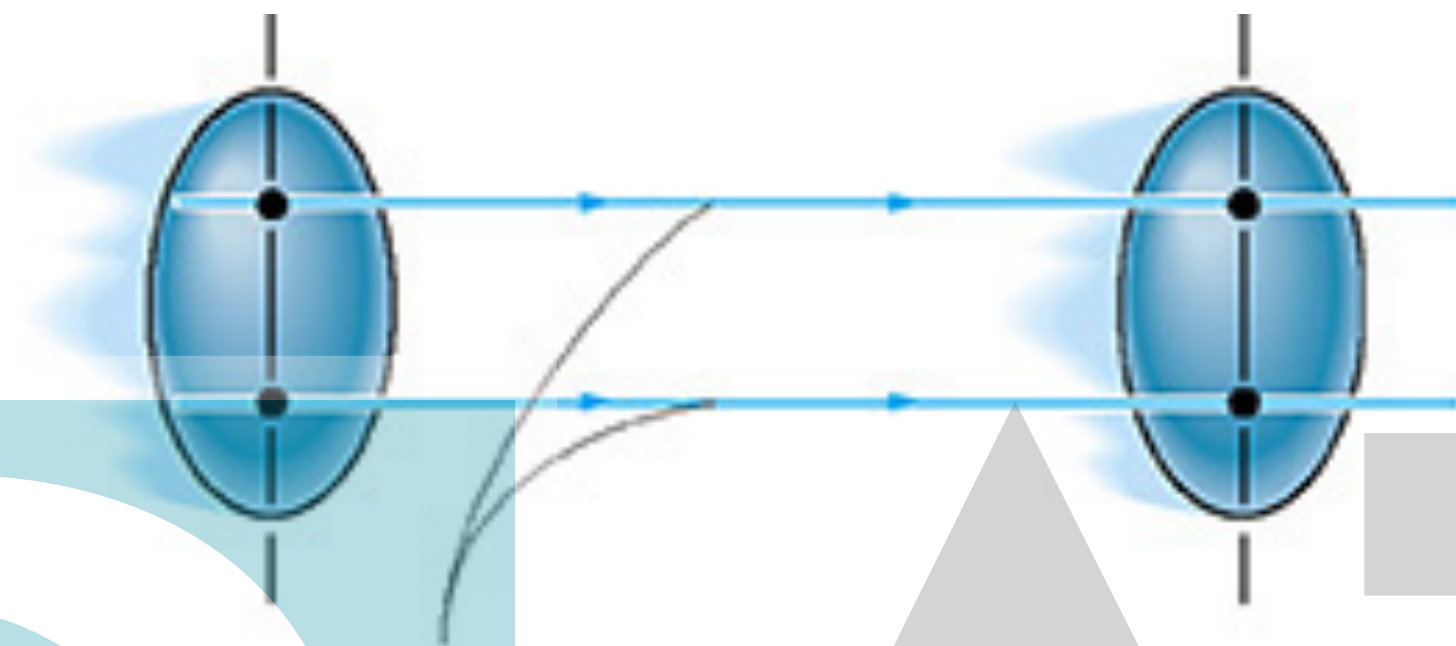


modelo  
idealizado!

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

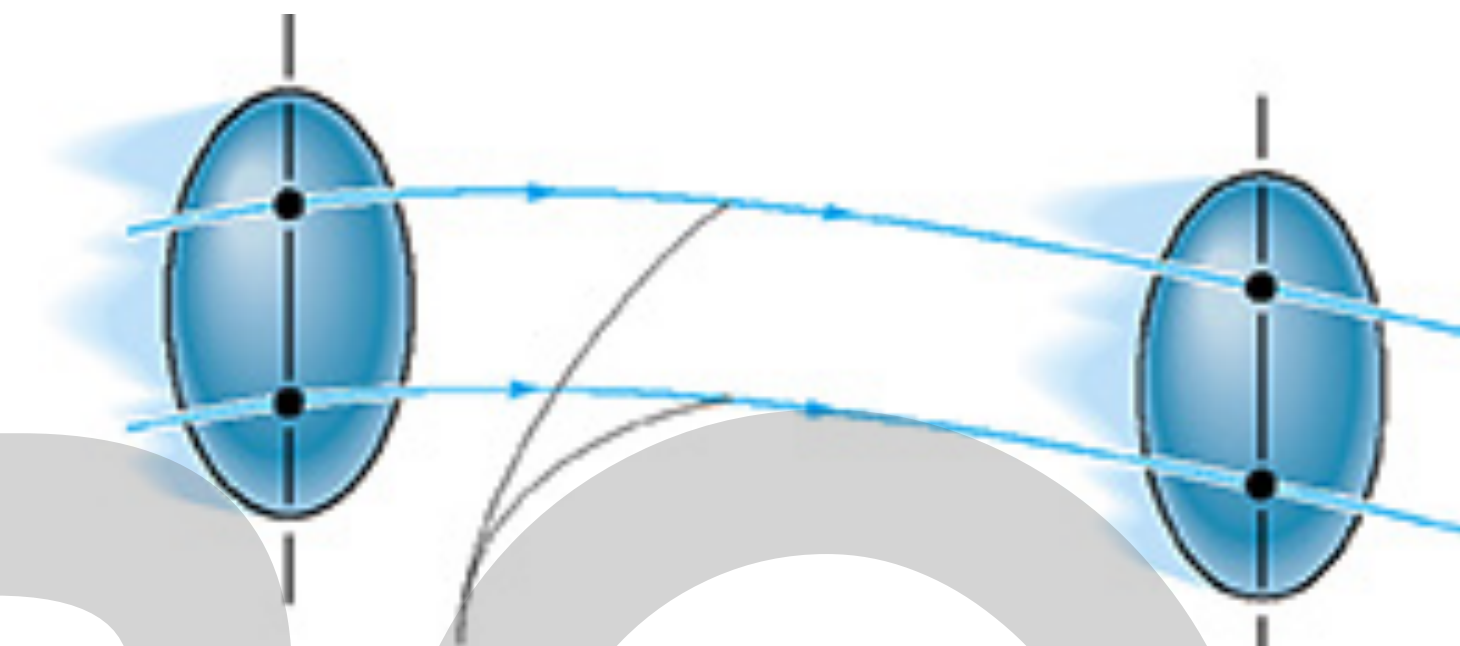
**distância** entre diferentes  
partículas permanece **invariável**

# Aula passada...



Trajétória de translação retilínea

(a)



Trajétória de translação curvilínea

(b)



Rotação em torno de um eixo fixo

(c)

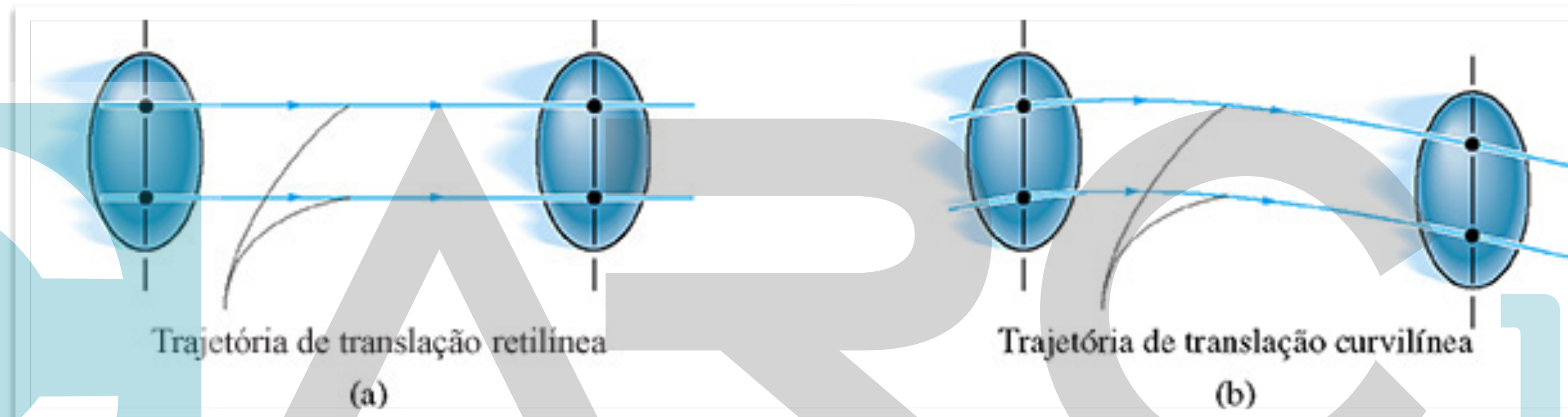


Movimento plano geral

(d)

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Aula passada...



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

**na translação, todos os pontos de um corpo rígido se deslocam com a mesma velocidade e aceleração**

# Aula passada...



ARCC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

**aceleração angular variável:**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a d\theta = \omega d\omega$$

# Aula passada...



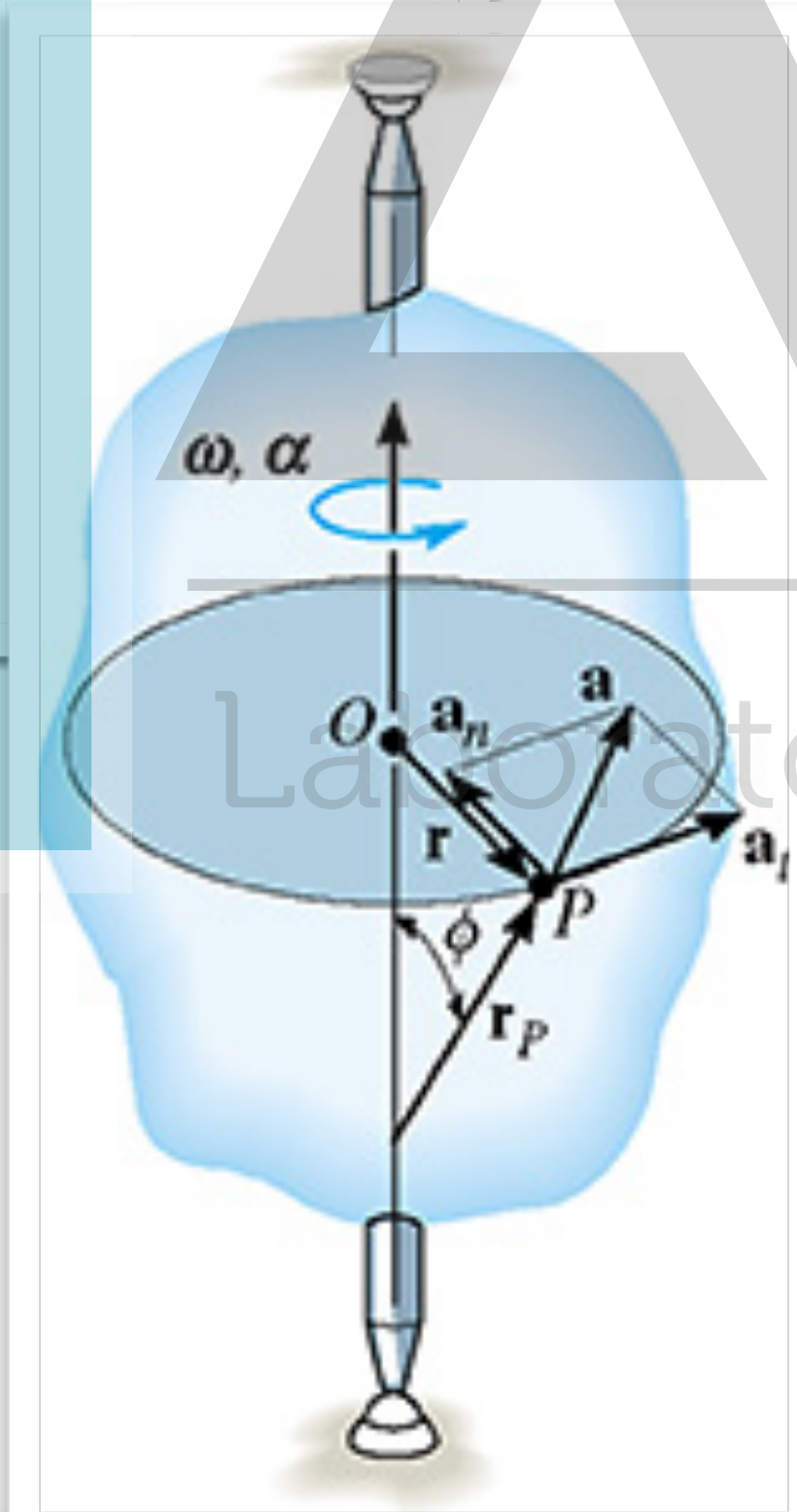
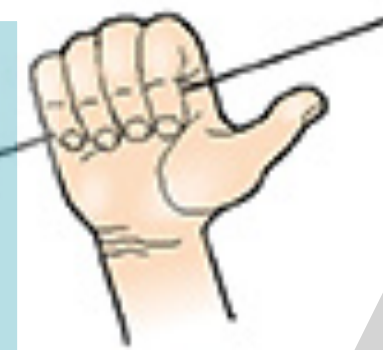
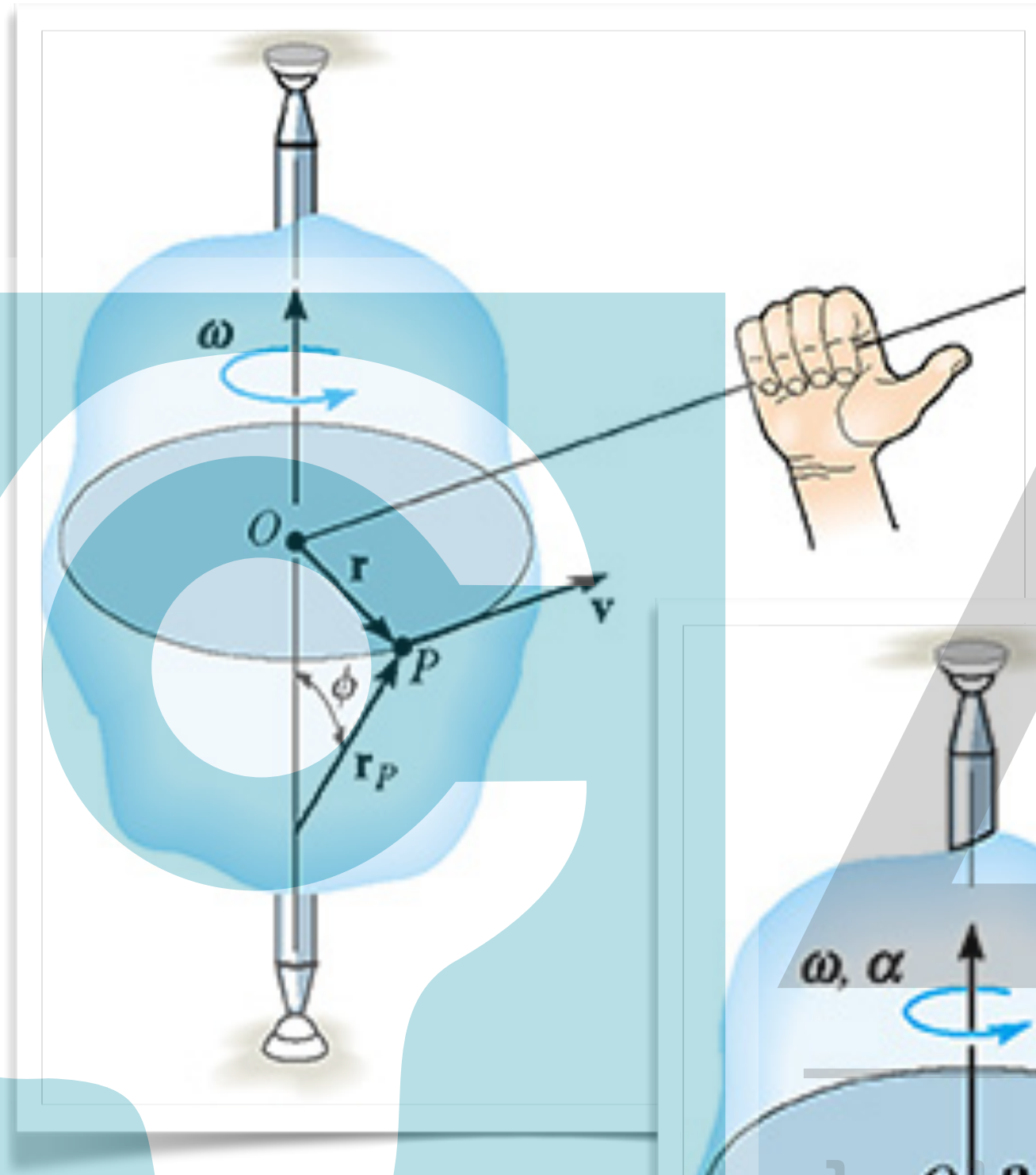
aceleração angular **constante**:  
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c (\theta - \theta_0)$$

# Aula passada...



movimento de um ponto P:

$$v = \omega r$$

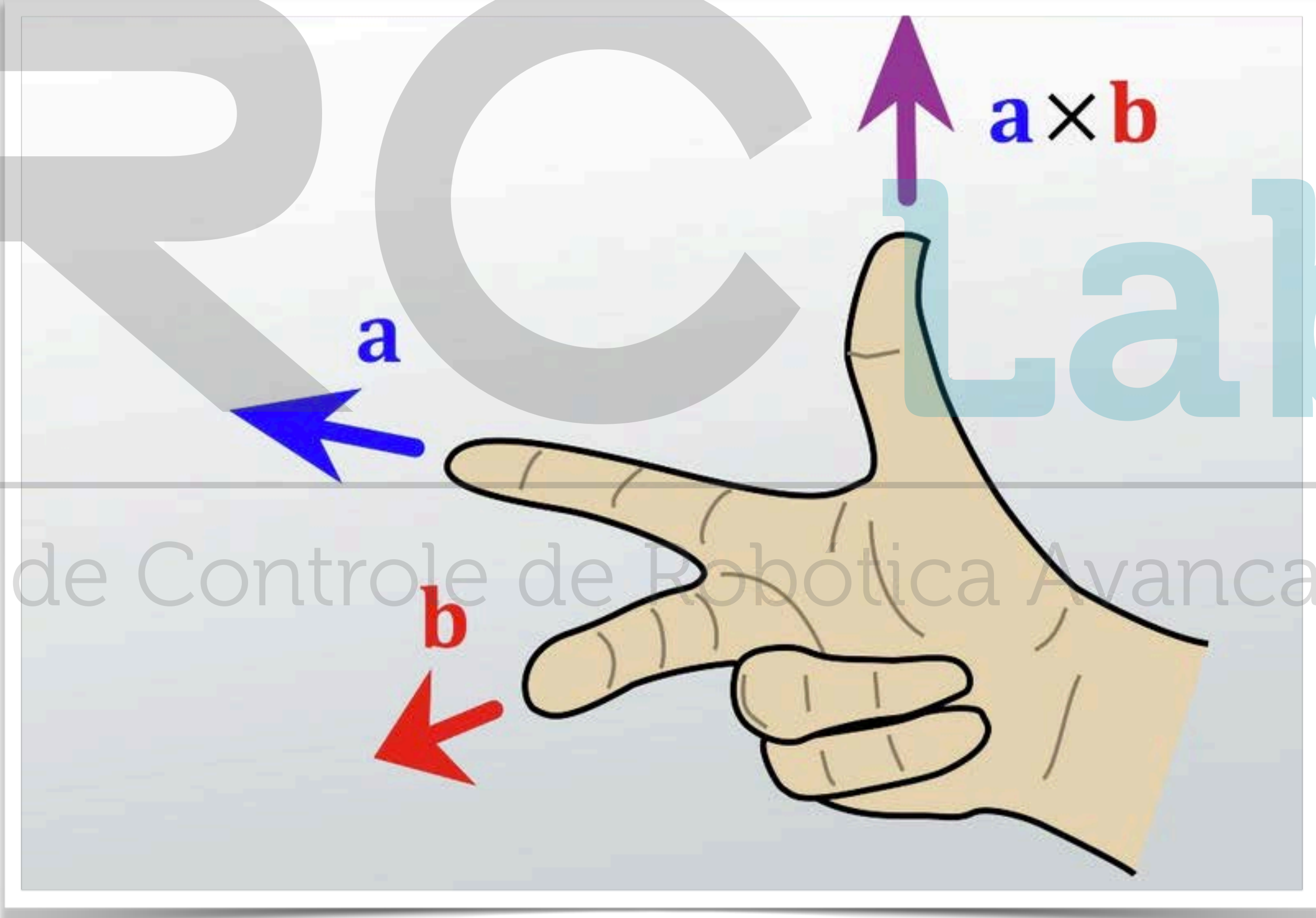
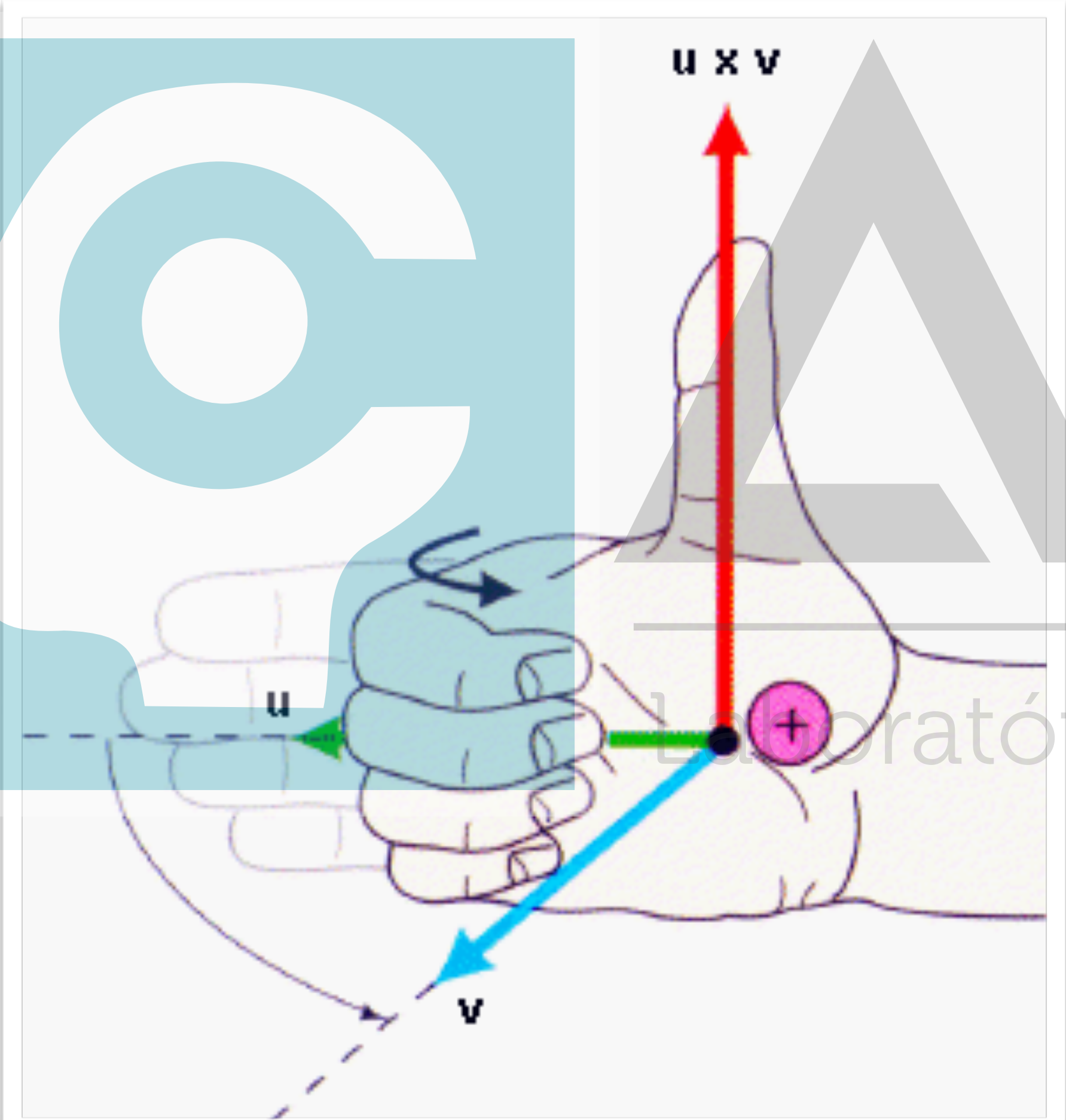
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

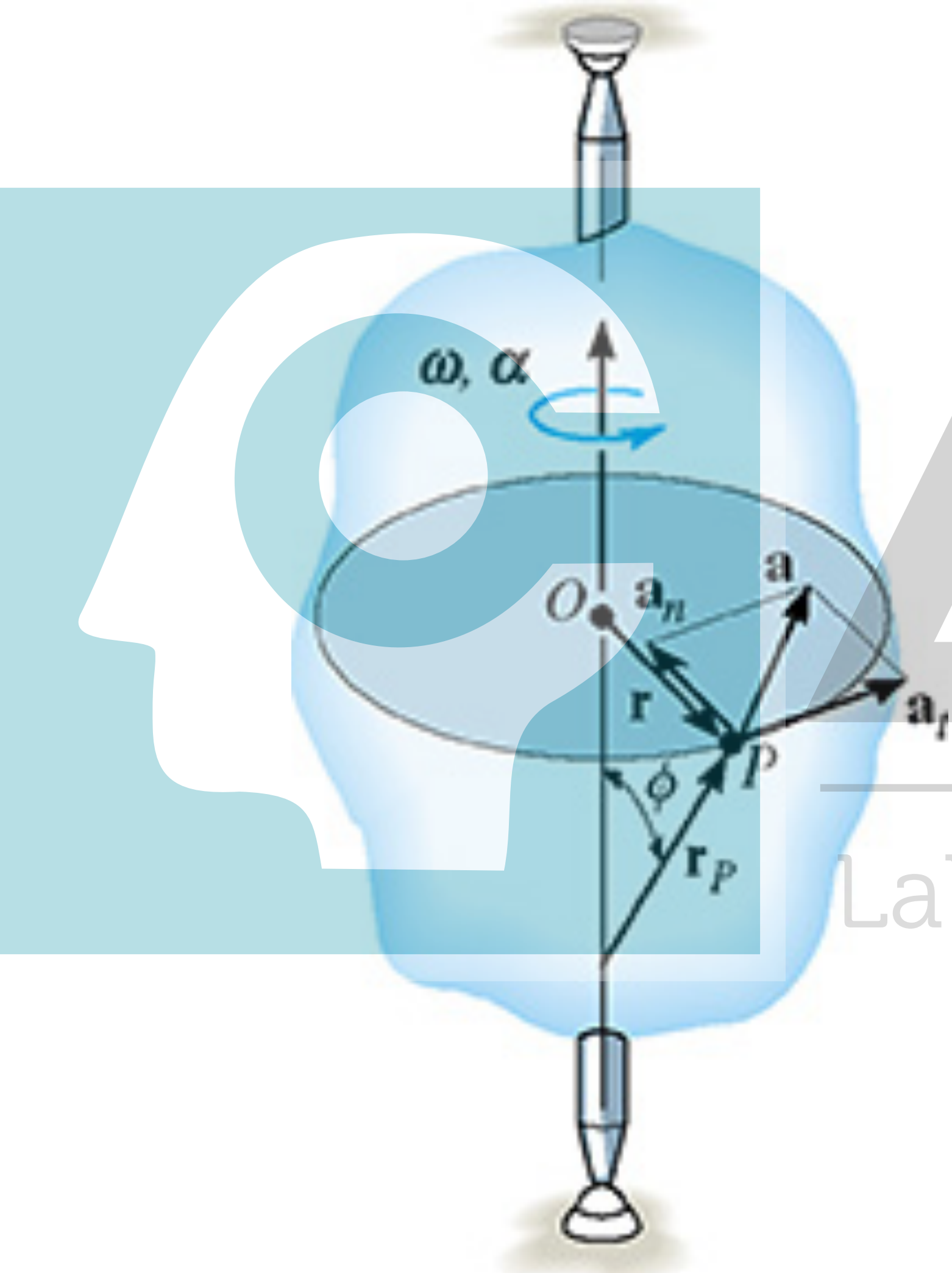
# Produto vetorial

## regra da mão direita





# Produto vetorial



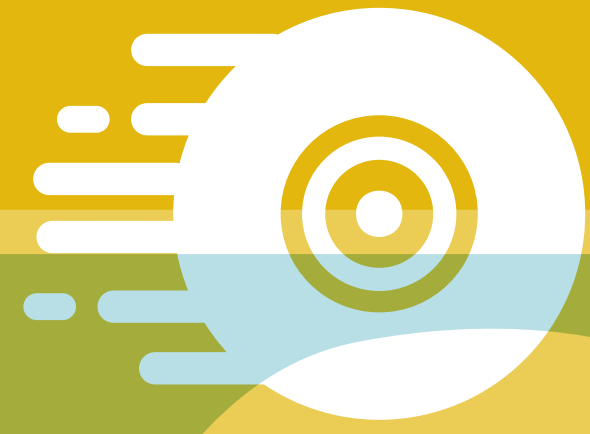
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

$$v = \omega r \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r \qquad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Conteúdo



- Velocidade
- Centro instantâneo de velocidade nula
- Aceleração

Movimento  
plano geral



- Velocidade
- Aceleração

Sistemas de  
eixo em rotação



- “Take-home messages”
- Projeto 2

Conclusão

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Lab

# Conteúdo

- Velocidade

- Centro instantâneo de velocidade nula

- Aceleração

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

ARCC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

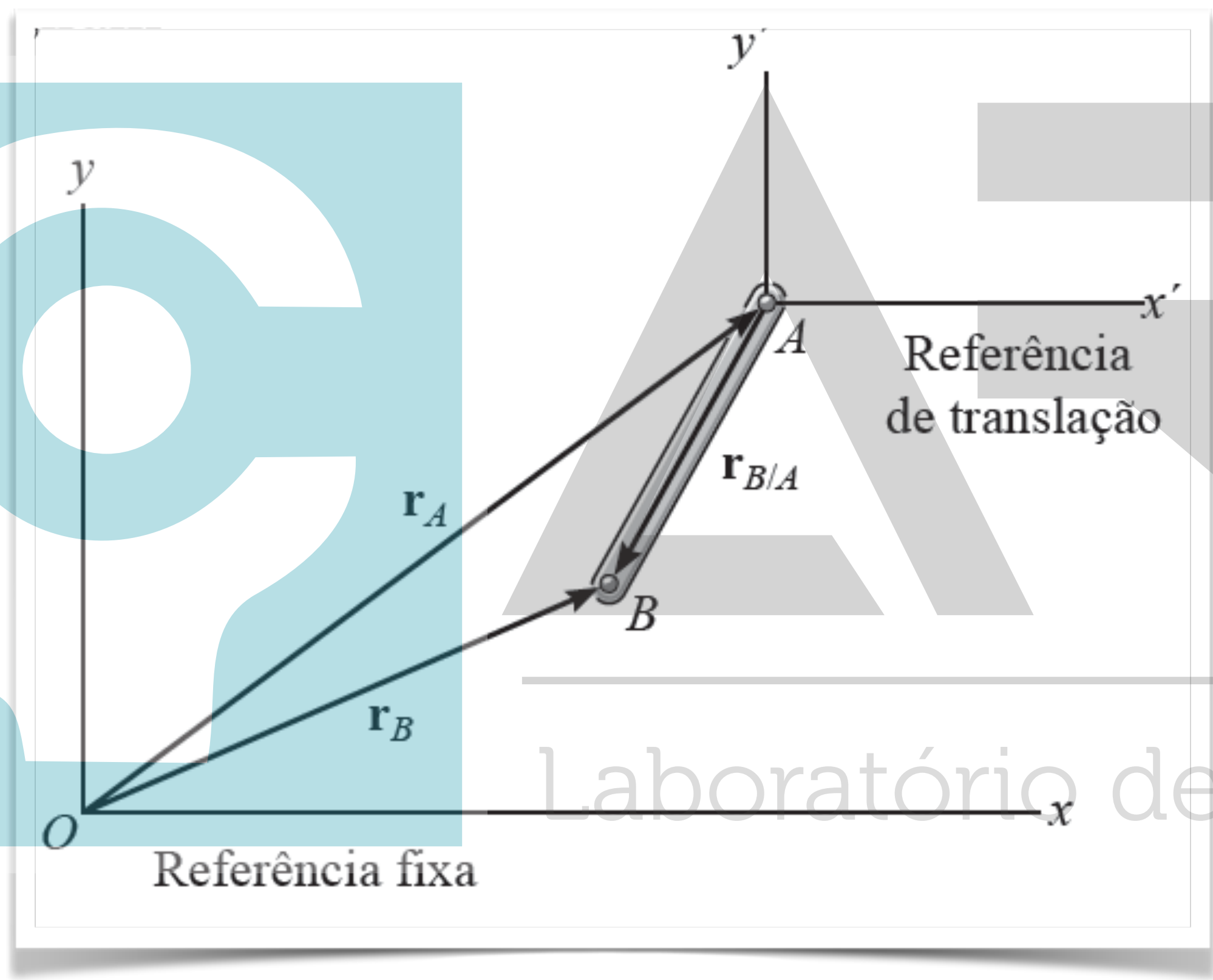
Conclusão

# Posição relativa

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

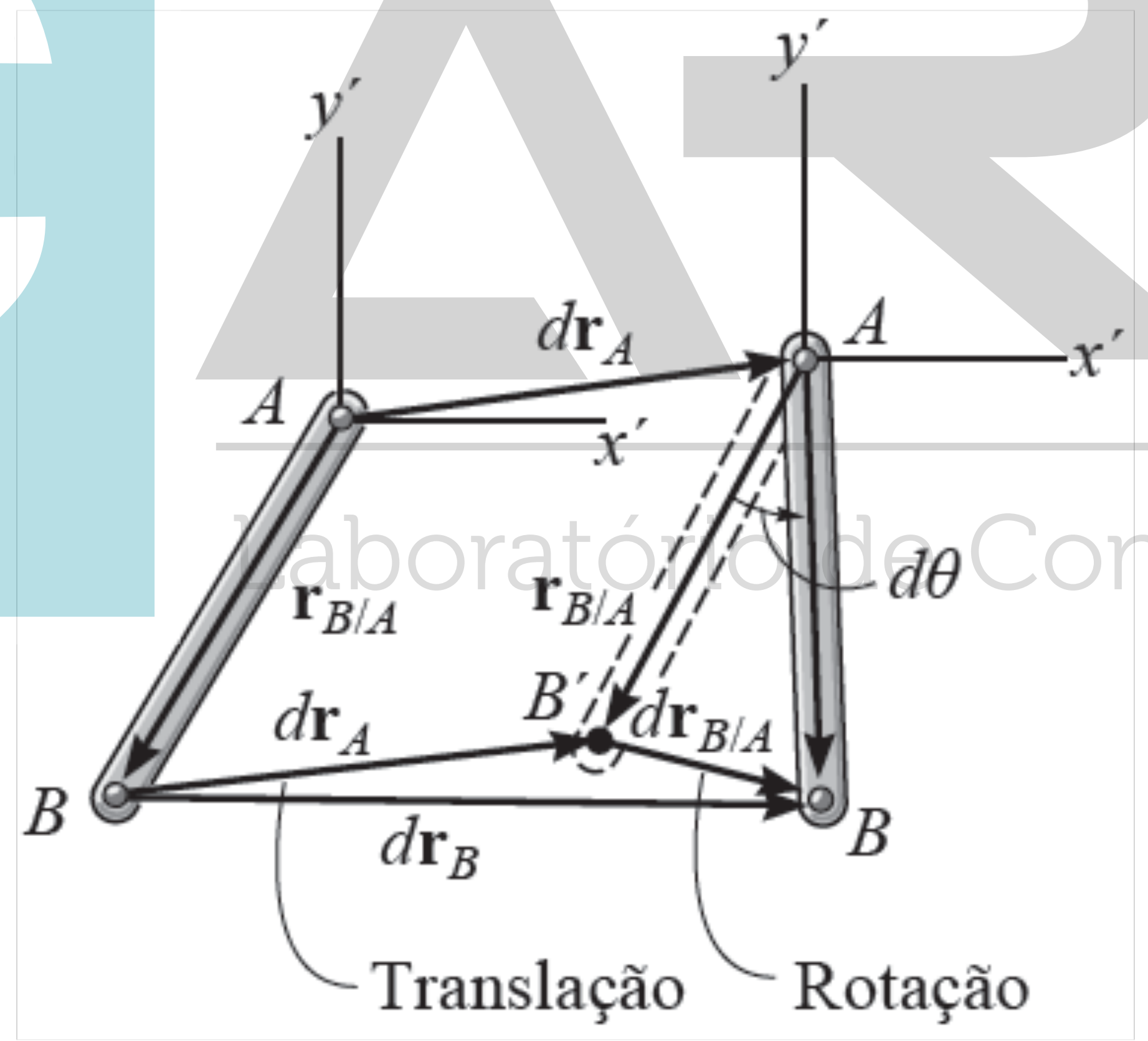
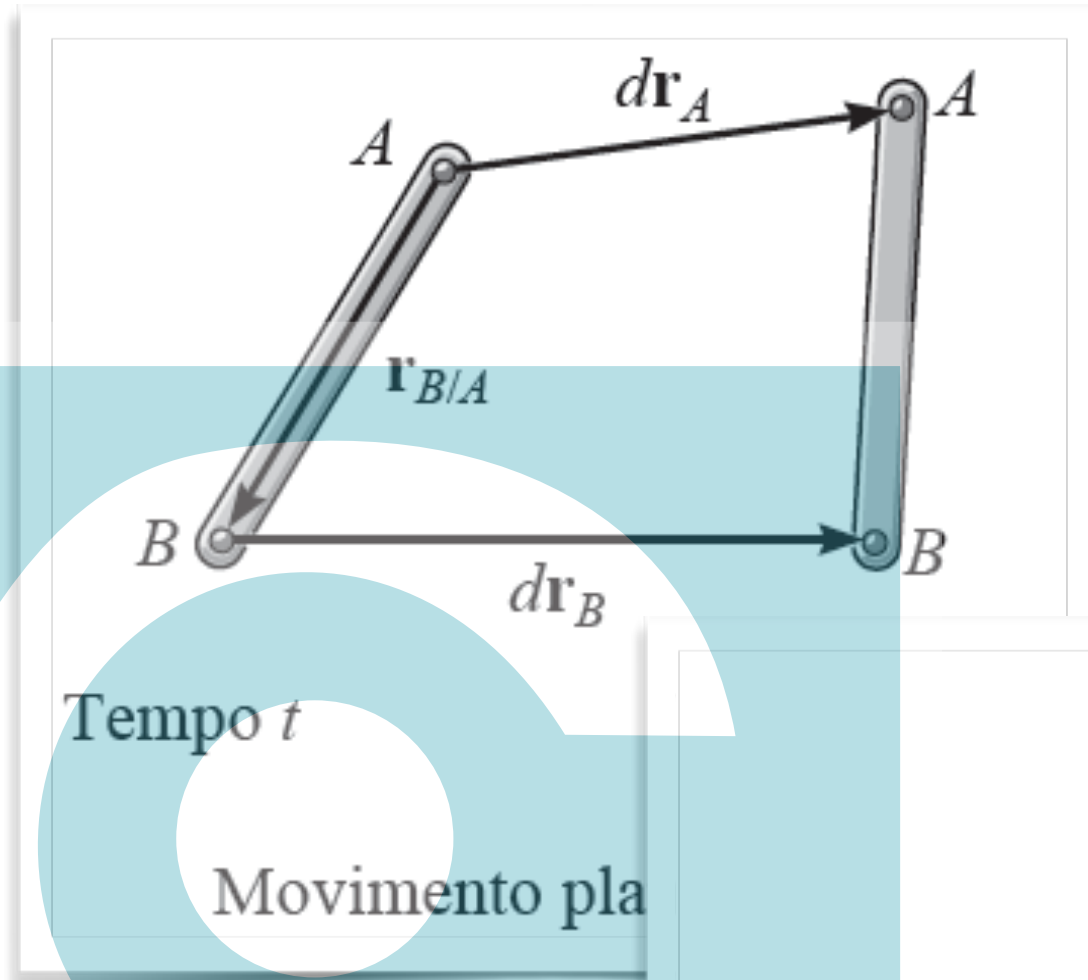
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Velocidade relativa

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{B/A}$$

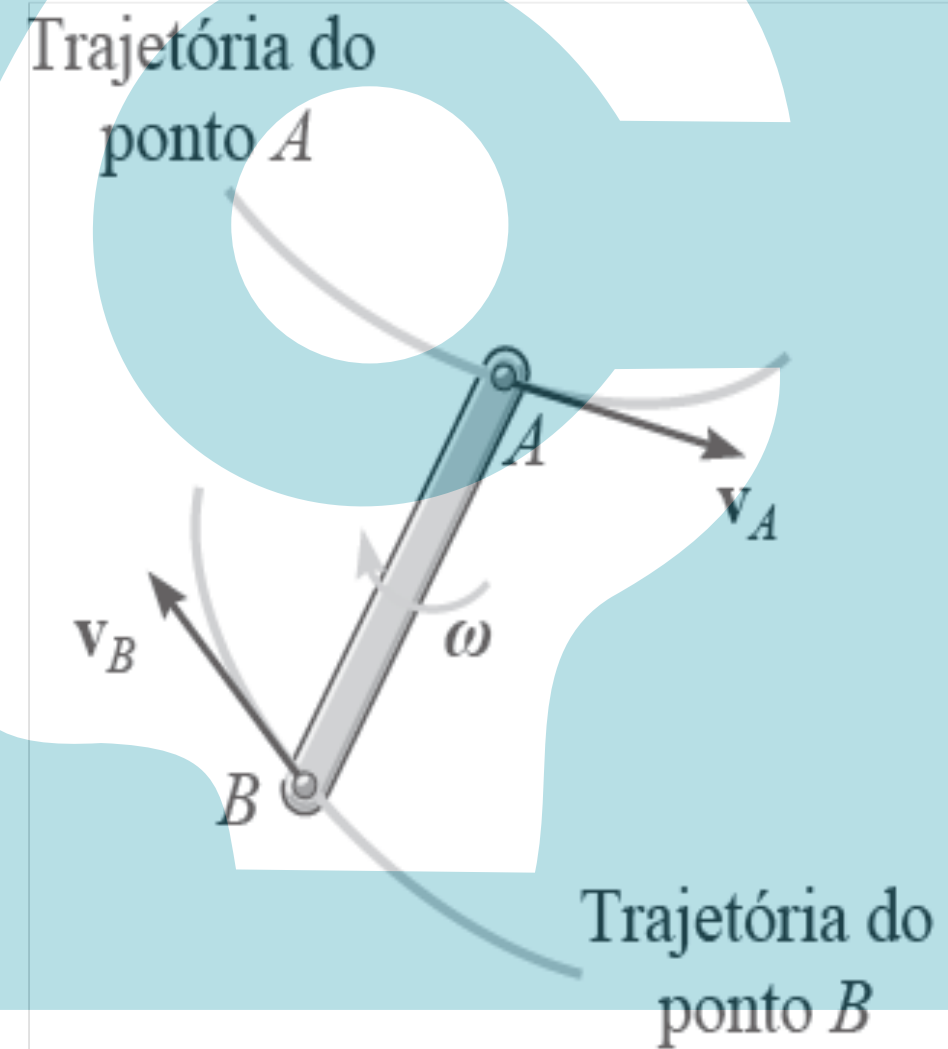
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Velocidade relativa

Movimento plano geral

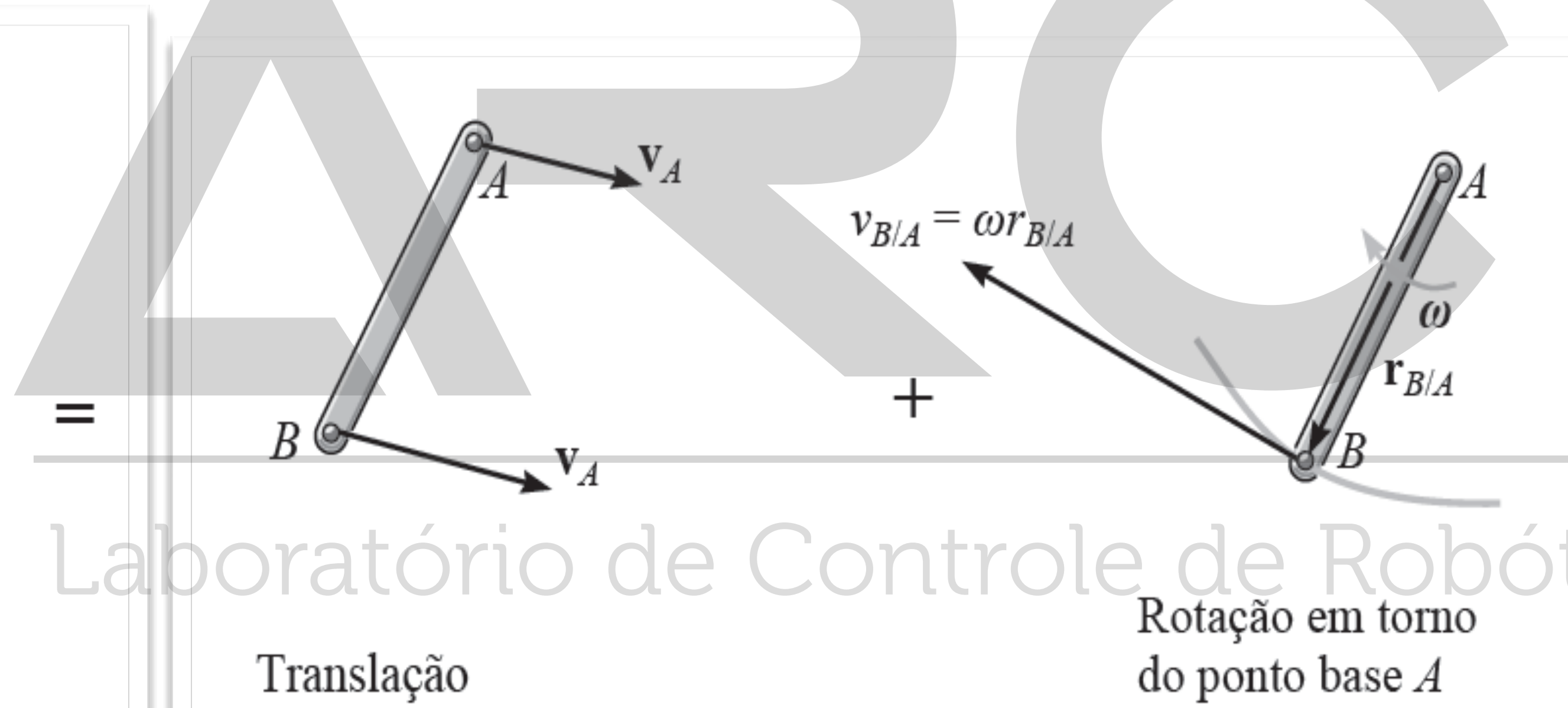
Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



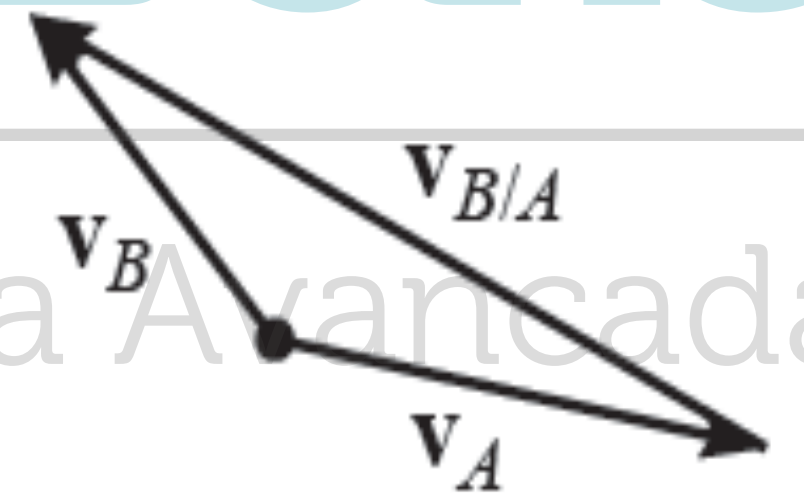
Movimento no plano geral

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$



Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



# Velocidade relativa

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Equação 16.16 no livro está errada!

# Conteúdo

- Velocidade
- Centro instantâneo de velocidade nula
- Aceleração

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

ARCC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



# Centro instantâneo de velocidade nula

Movimento  
plano geral

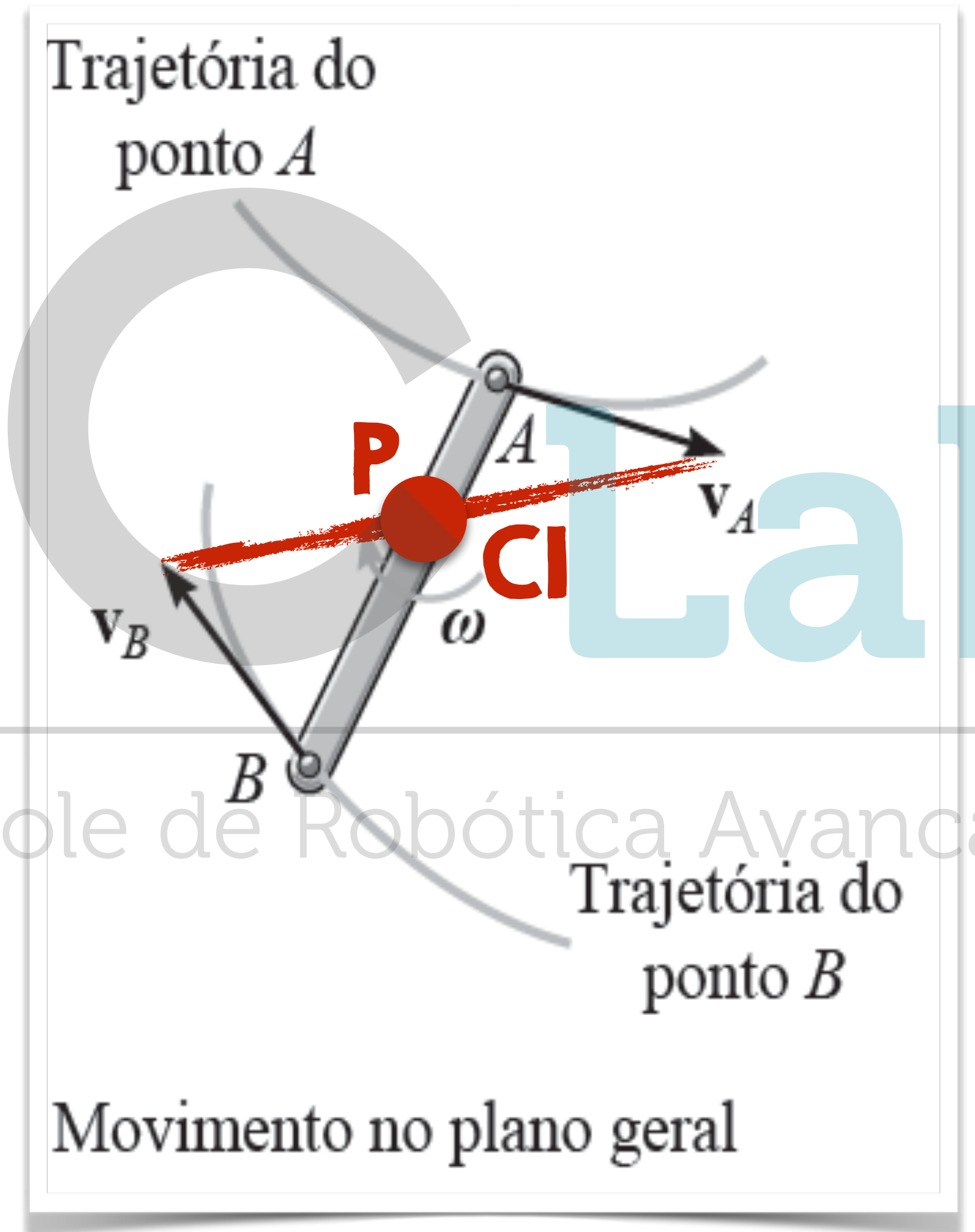
$$\mathbf{v}_P = 0 \quad \mathbf{v}_{CI} = 0$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Sistemas de  
eixo em rotação

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/CI}$$

Conclusão

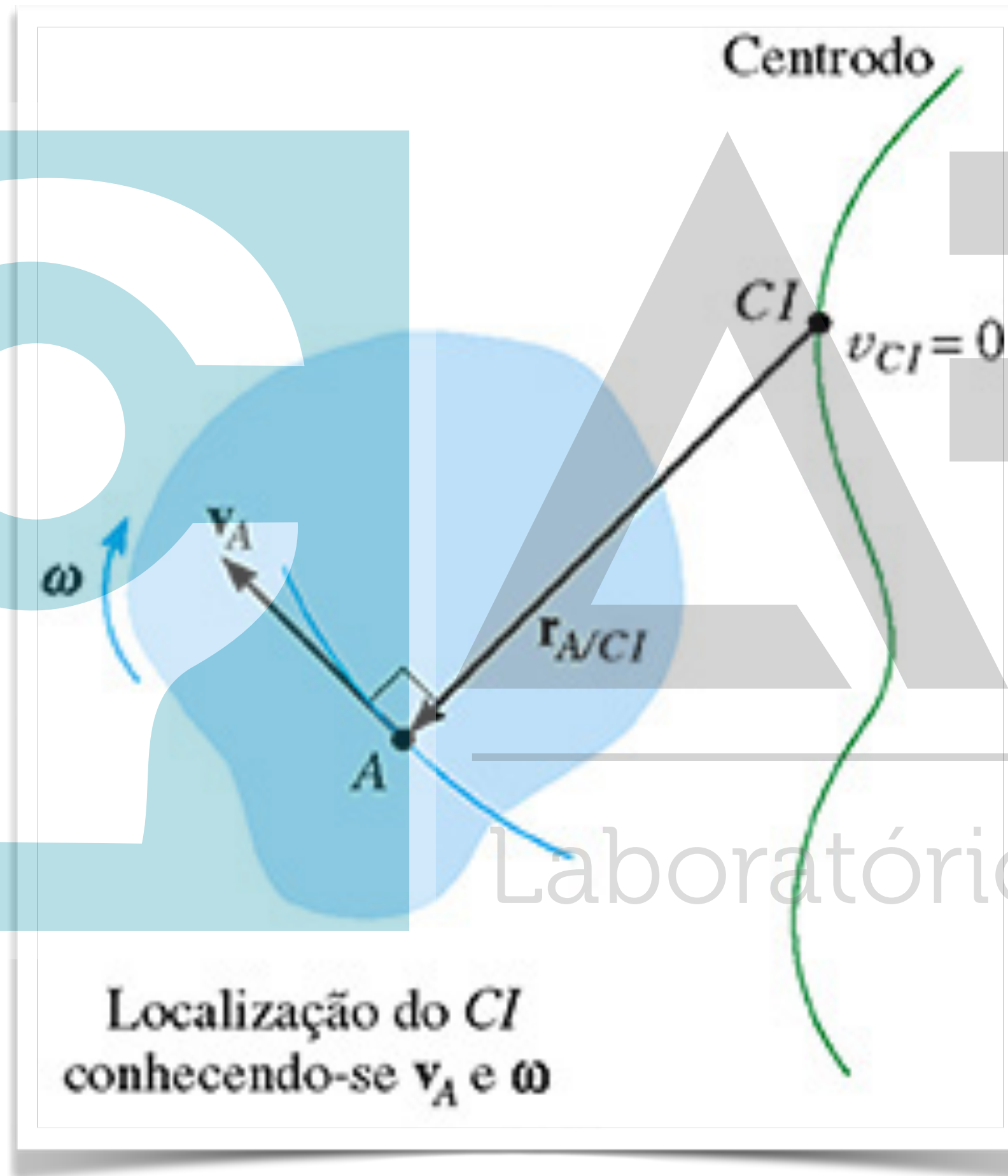


# Localização do CI

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



**direção:** perpendicular à  
velocidade

**intensidade:**

$$v = \omega r$$

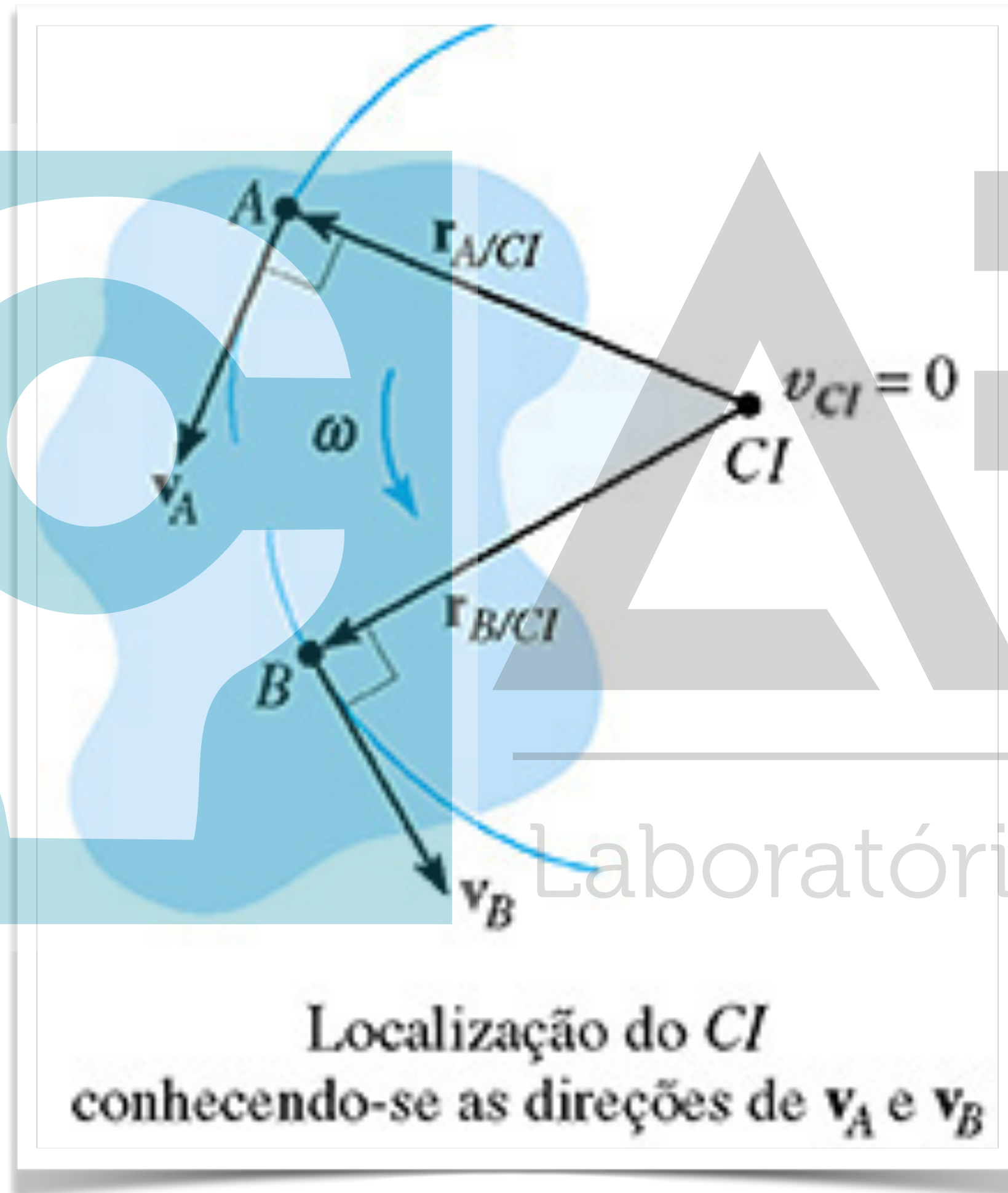
$$r_{A/CI} = \frac{v_A}{\omega}$$

# Localização do CI

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



ponto de interseção dos  
vetores de posição

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Centro instantâneo de velocidade nula

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$



Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Centro instantâneo de velocidade nula

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$



# Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Conteúdo

- Velocidade
- Centro instantâneo de velocidade nula
- **Aceleração**

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

ARCC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

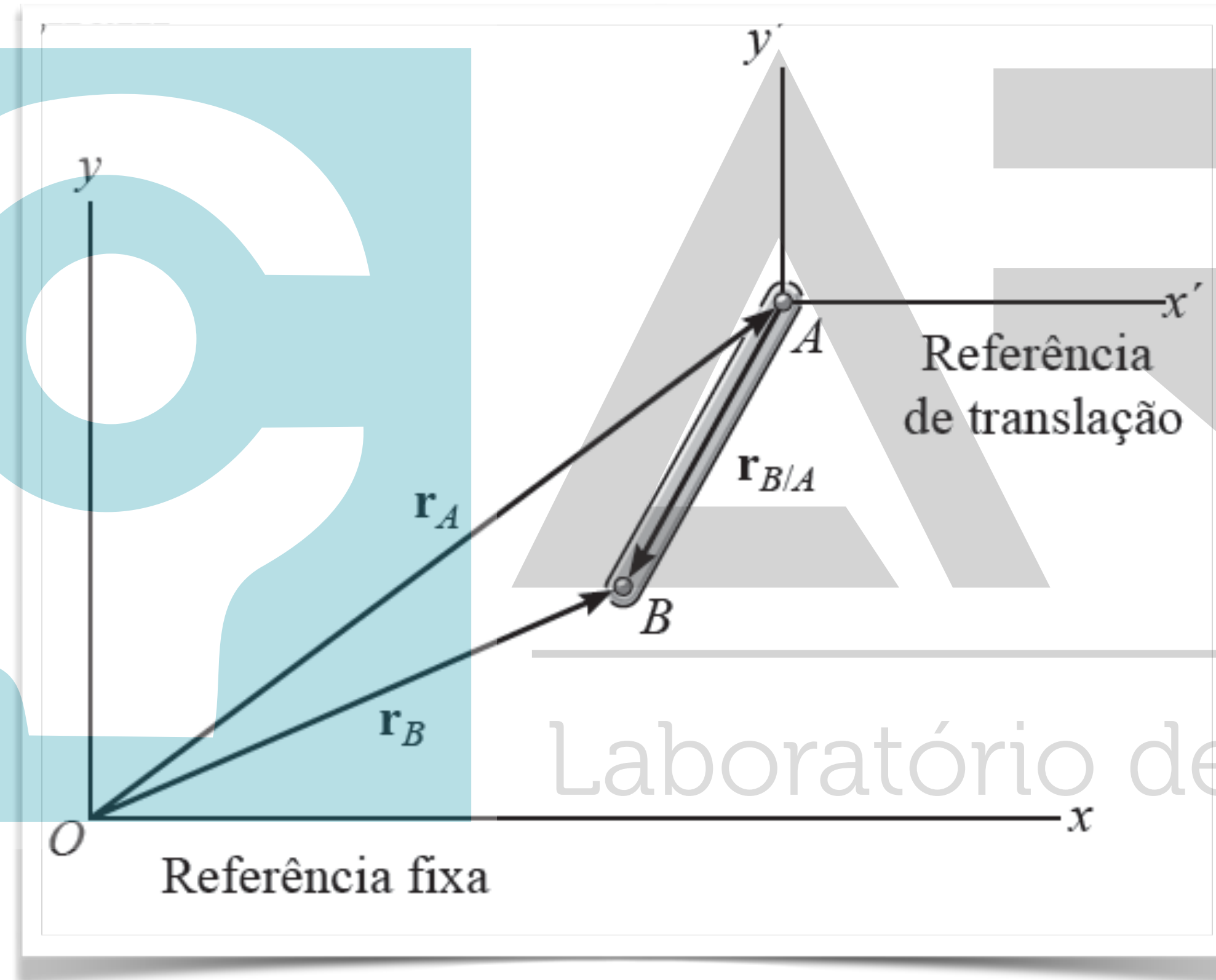
Conclusão

# Aceleração

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

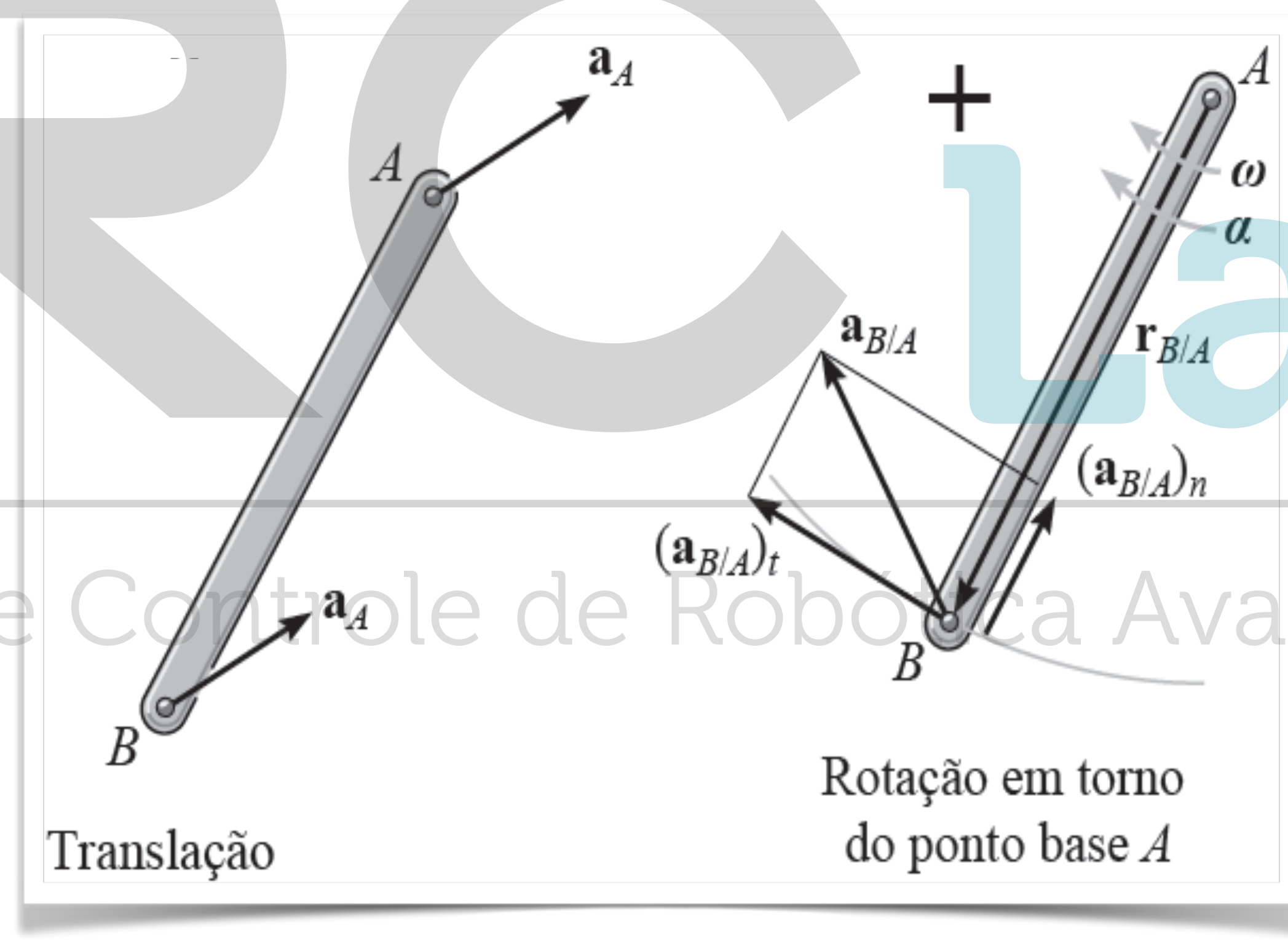
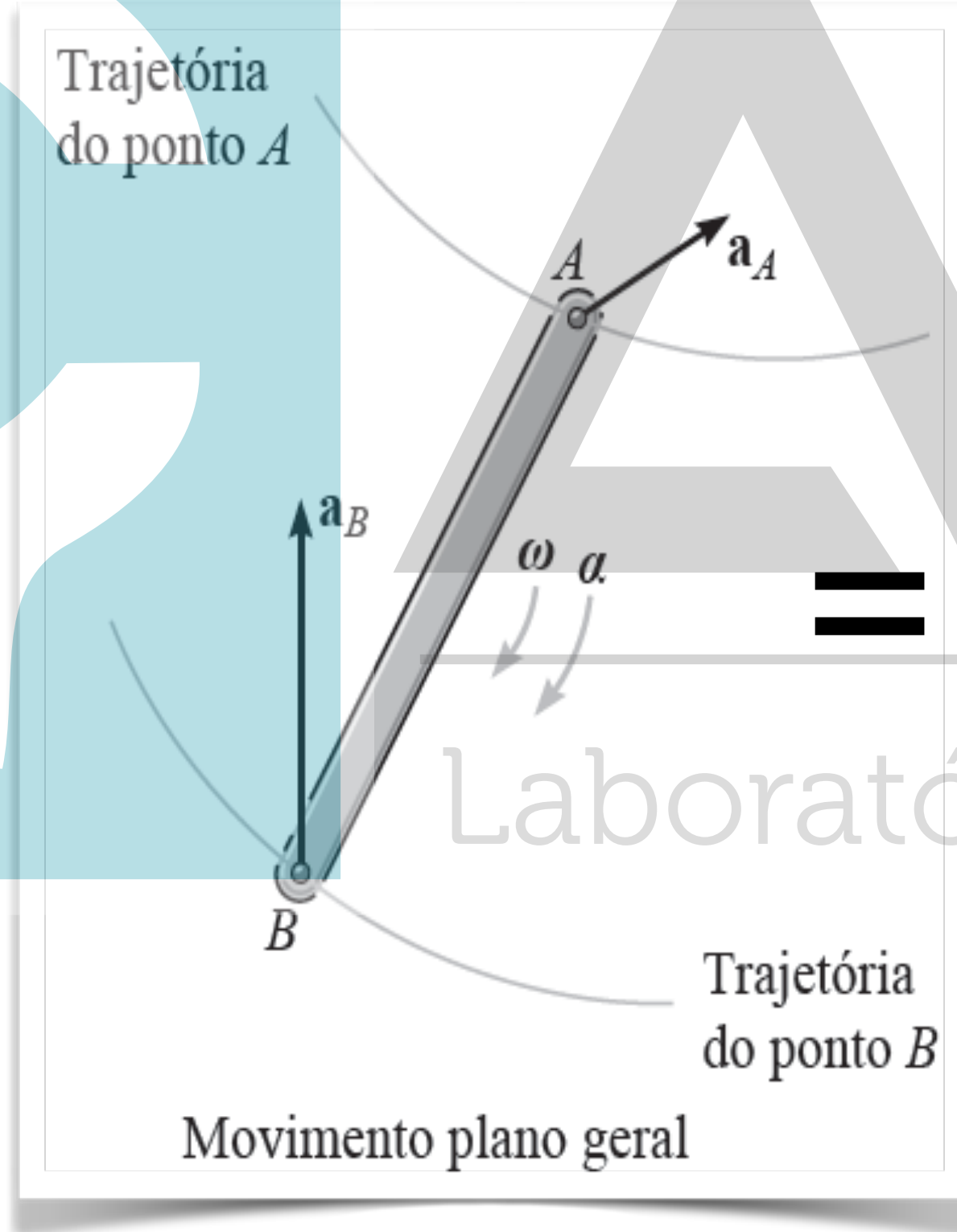
# Aceleração

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$





# Aceleração

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

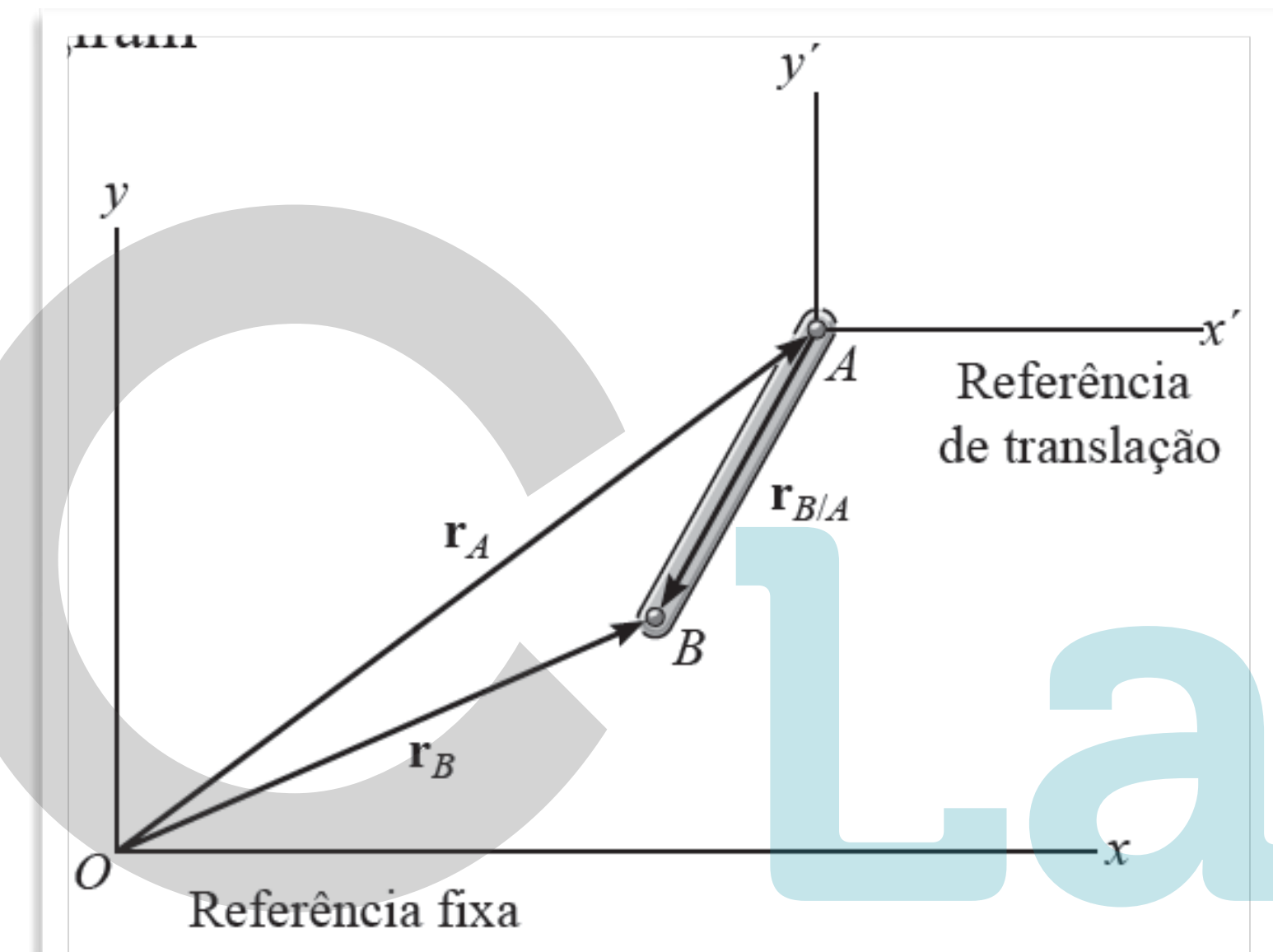
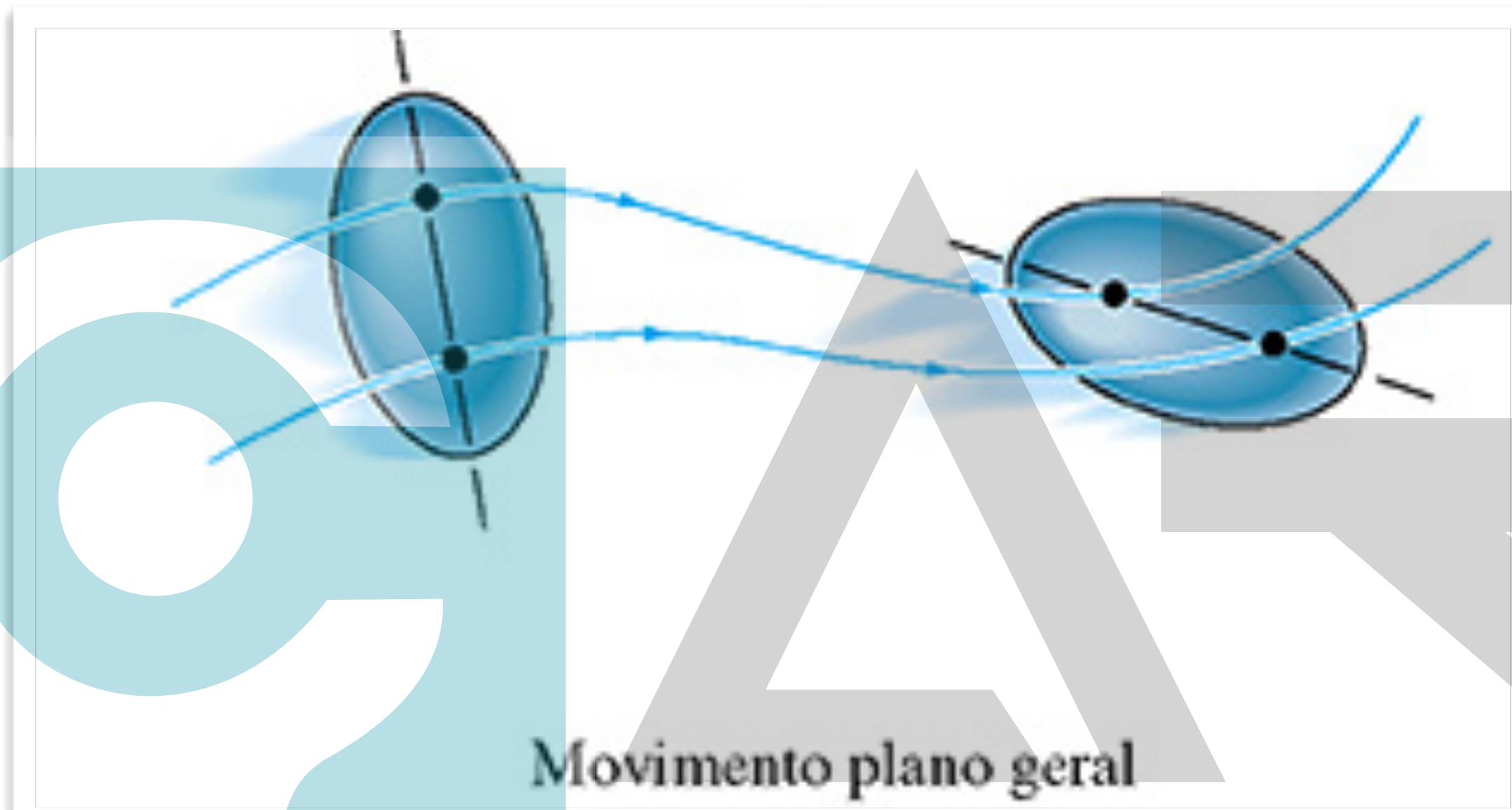
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

# Até então...

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

e se o

eixo de

referência

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

também girar?

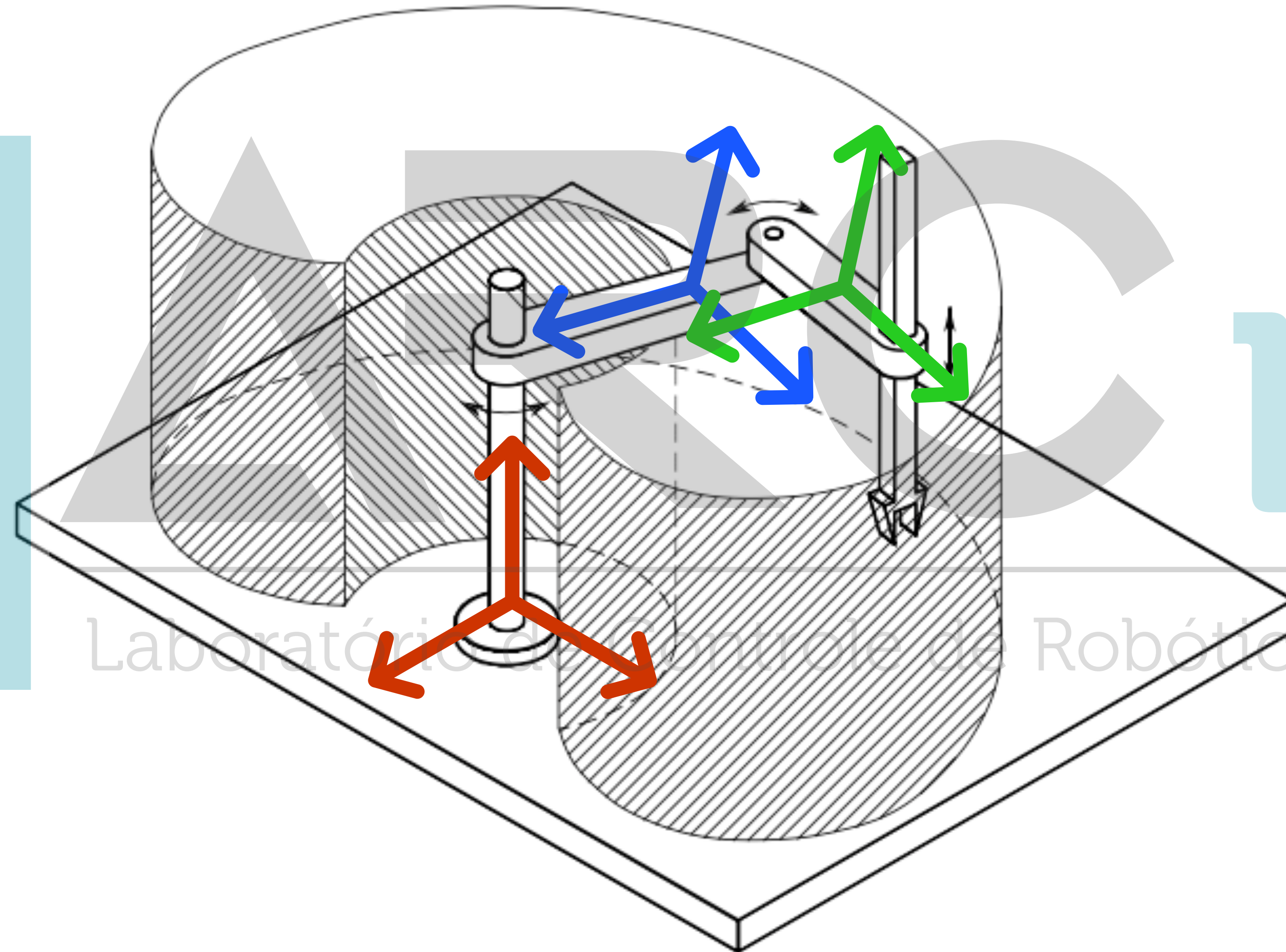


# Movimentos em robótica

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

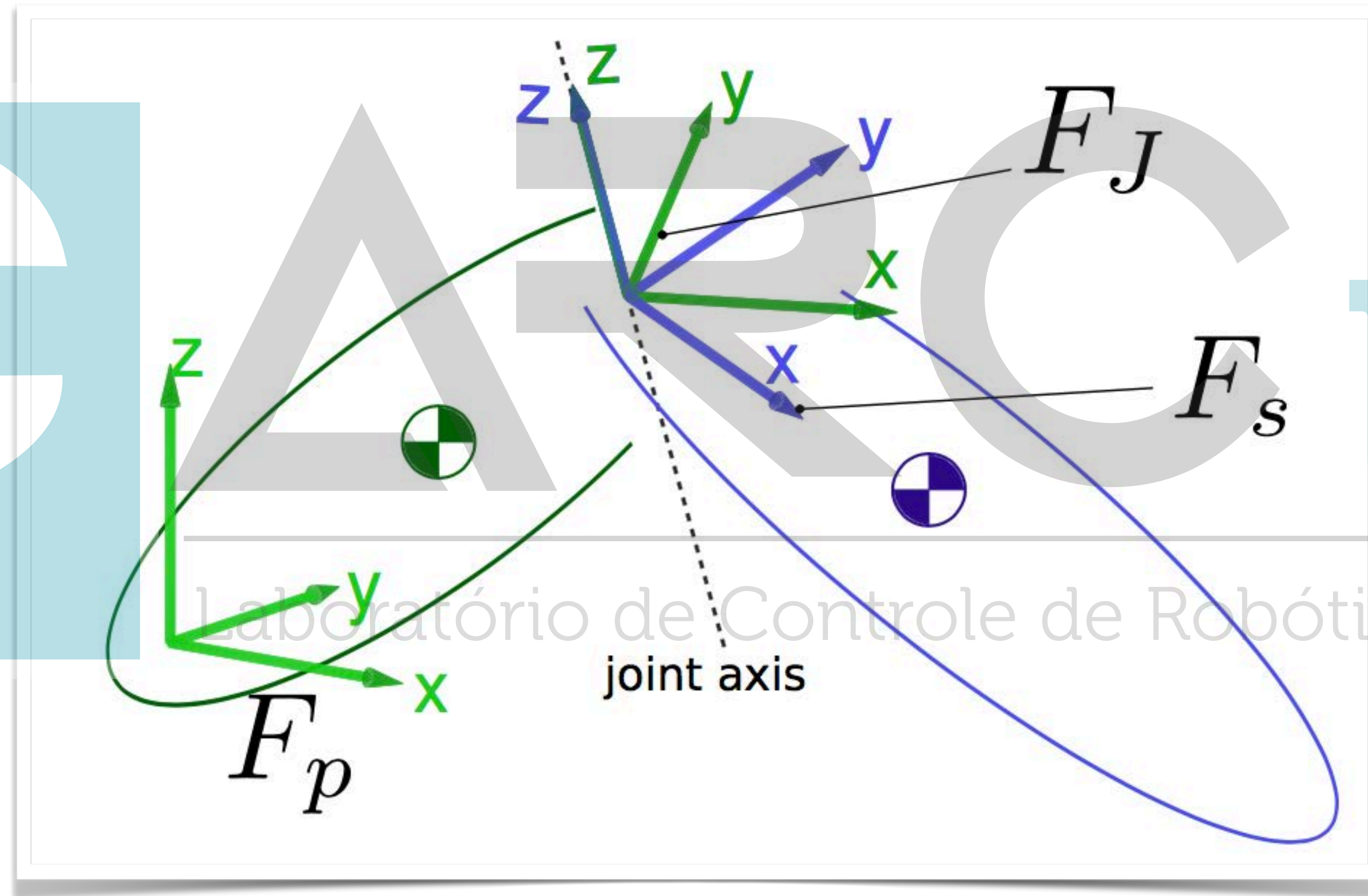


# Eixos em rotação!

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



Lab

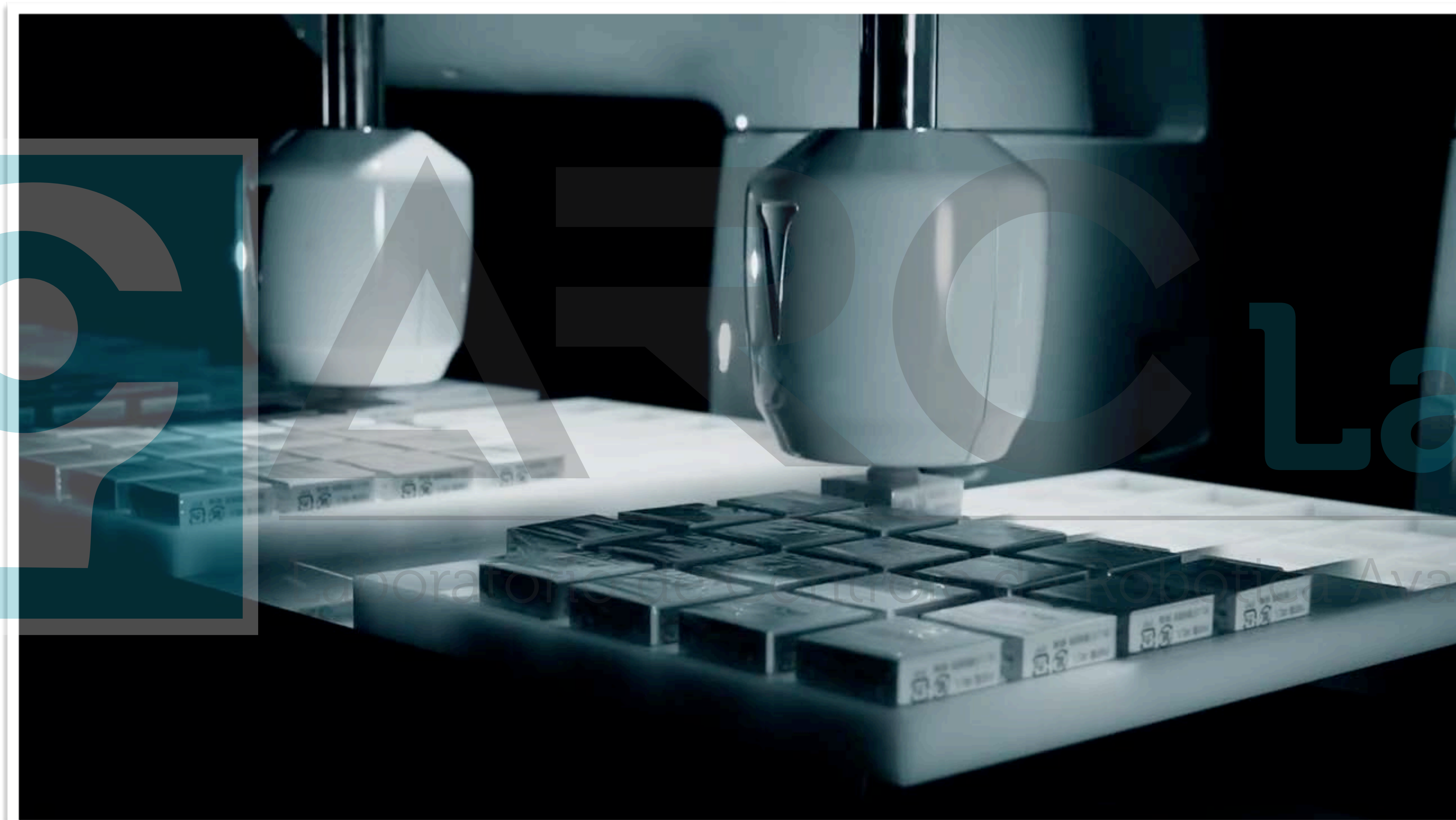
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Movimentos em robótica

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

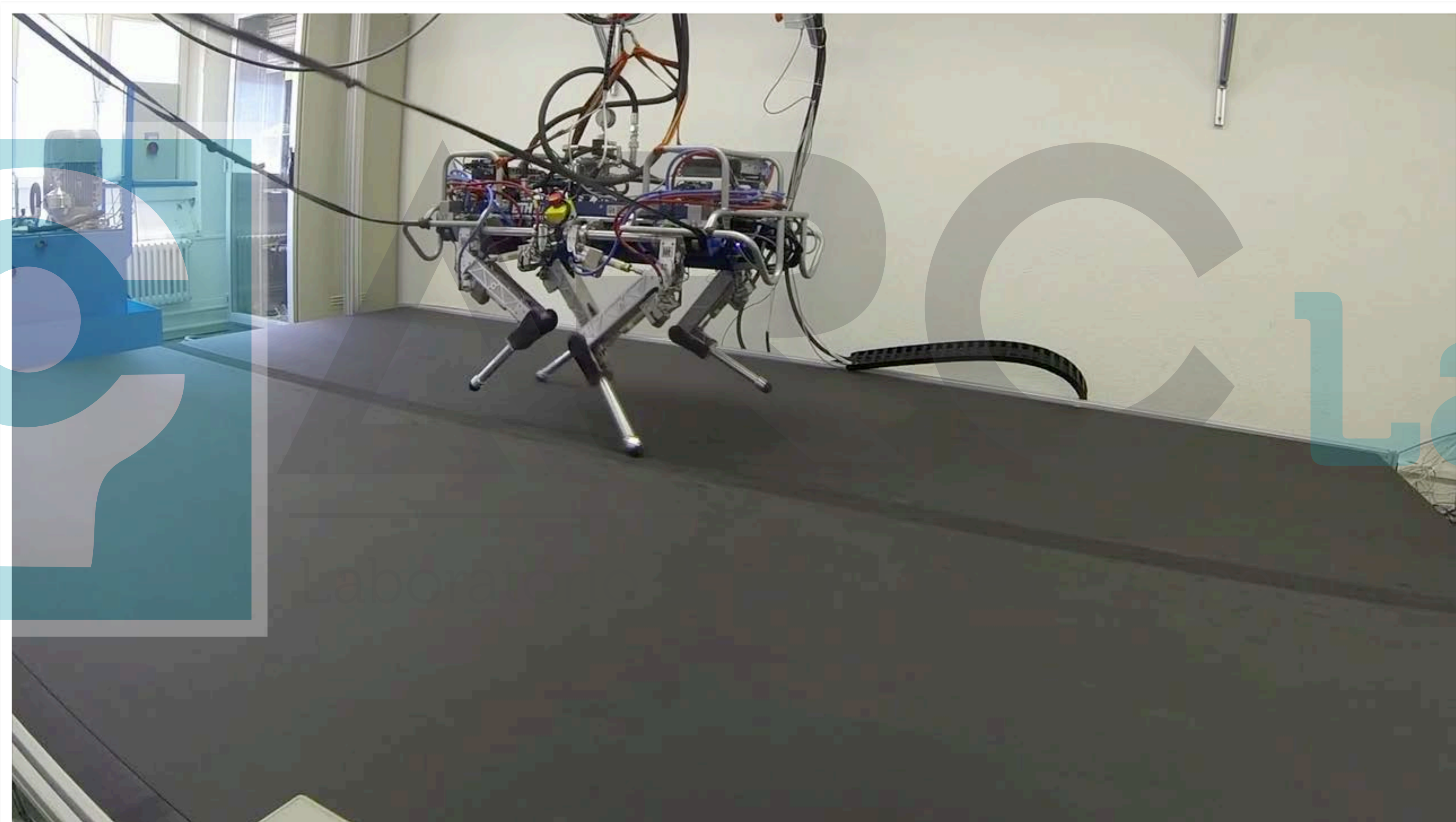


# Eixos em rotação!

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



# Conteúdo

Movimento  
plano geral

- Velocidade
- Aceleração

Sistemas de  
eixo em rotação

LABORC Lab  
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Conclusão

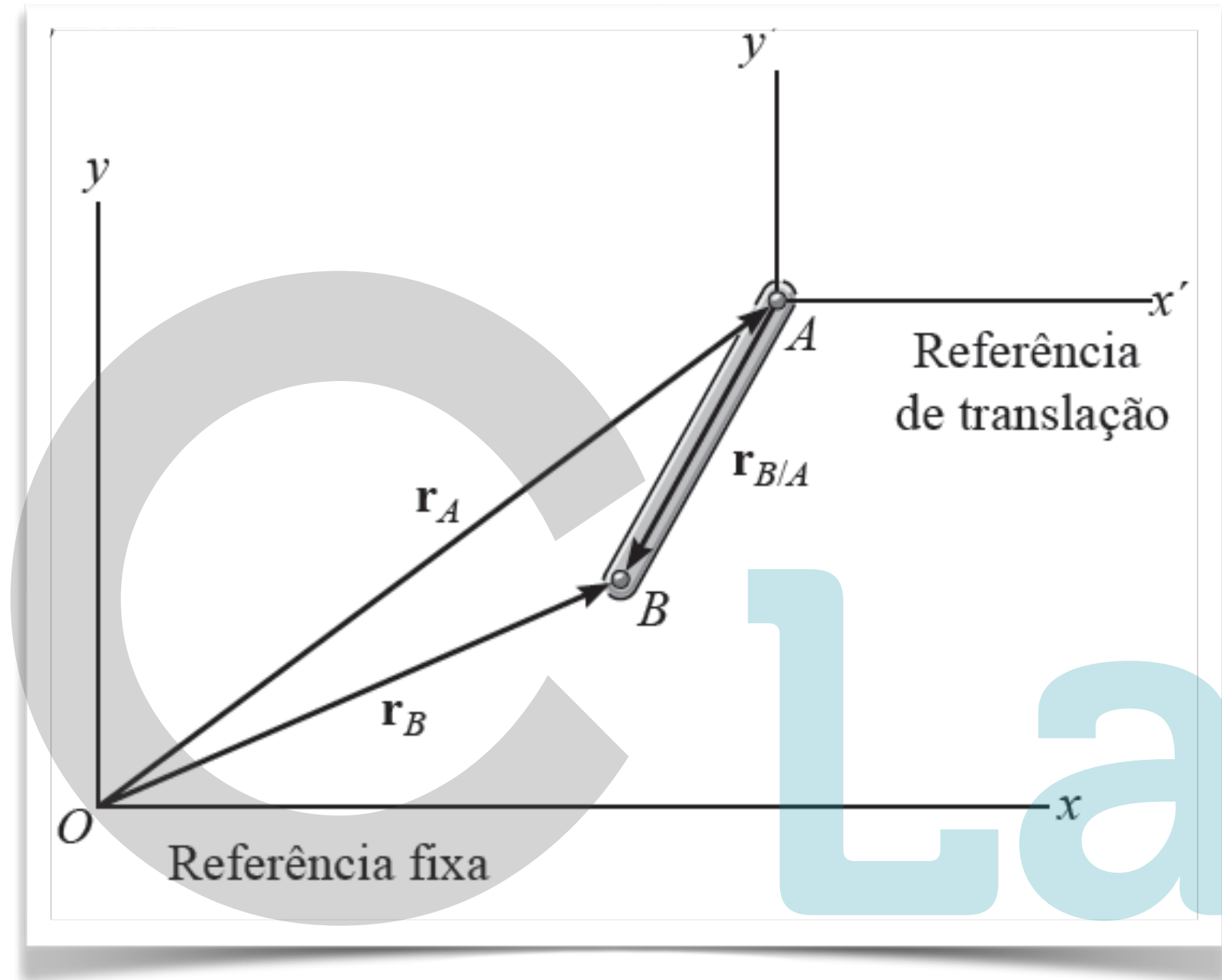
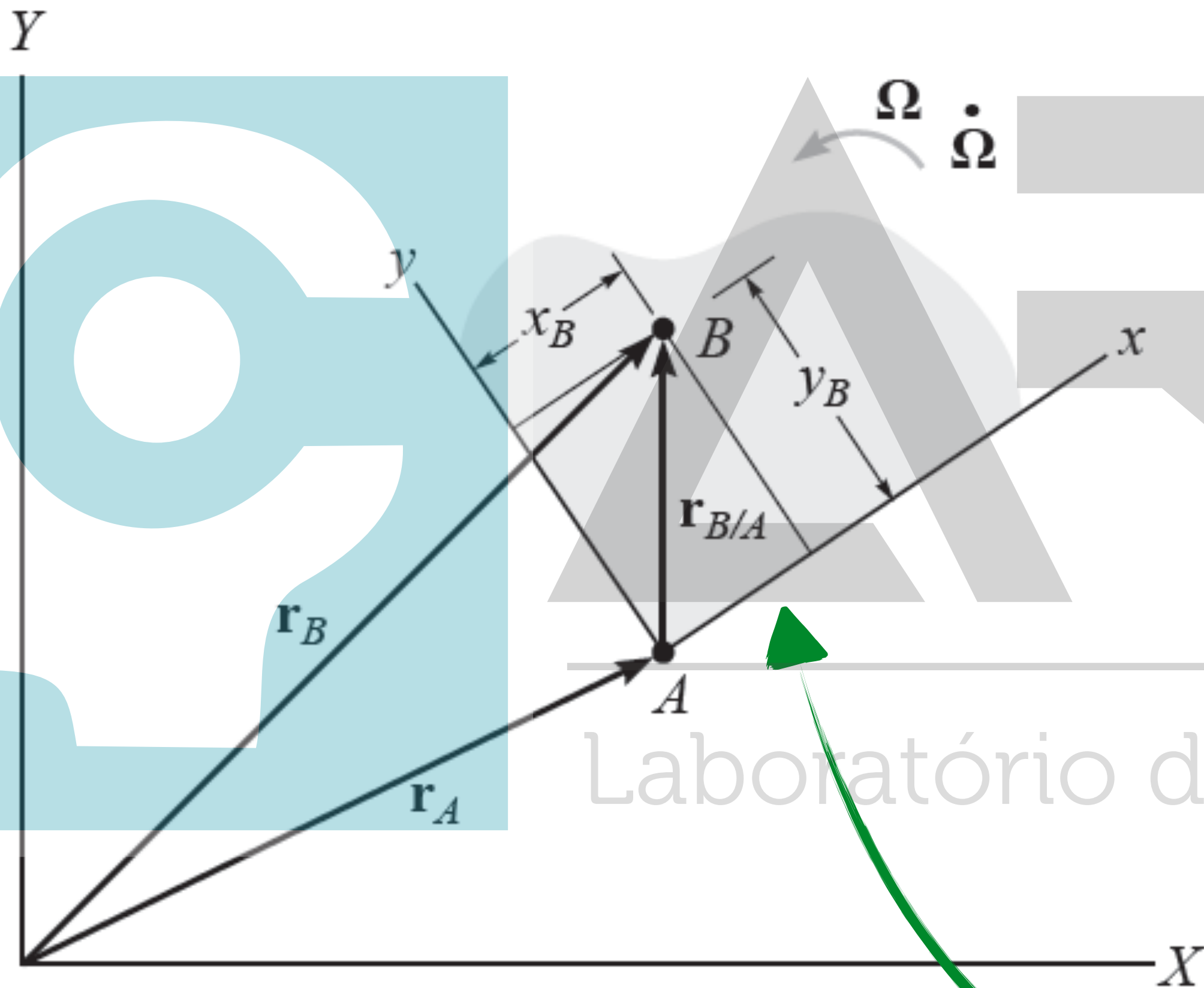


# Posição

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

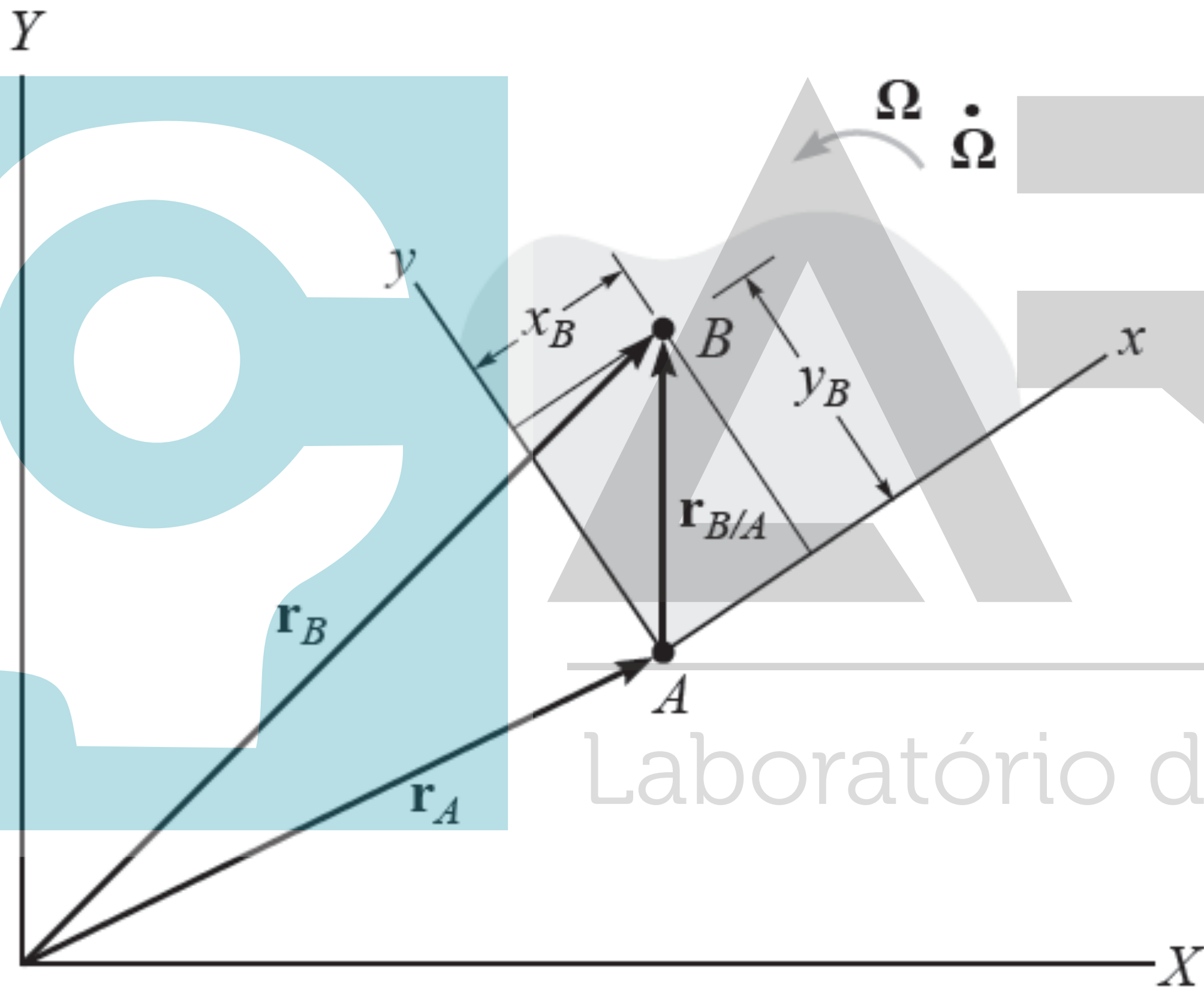
$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

# Velocidade

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

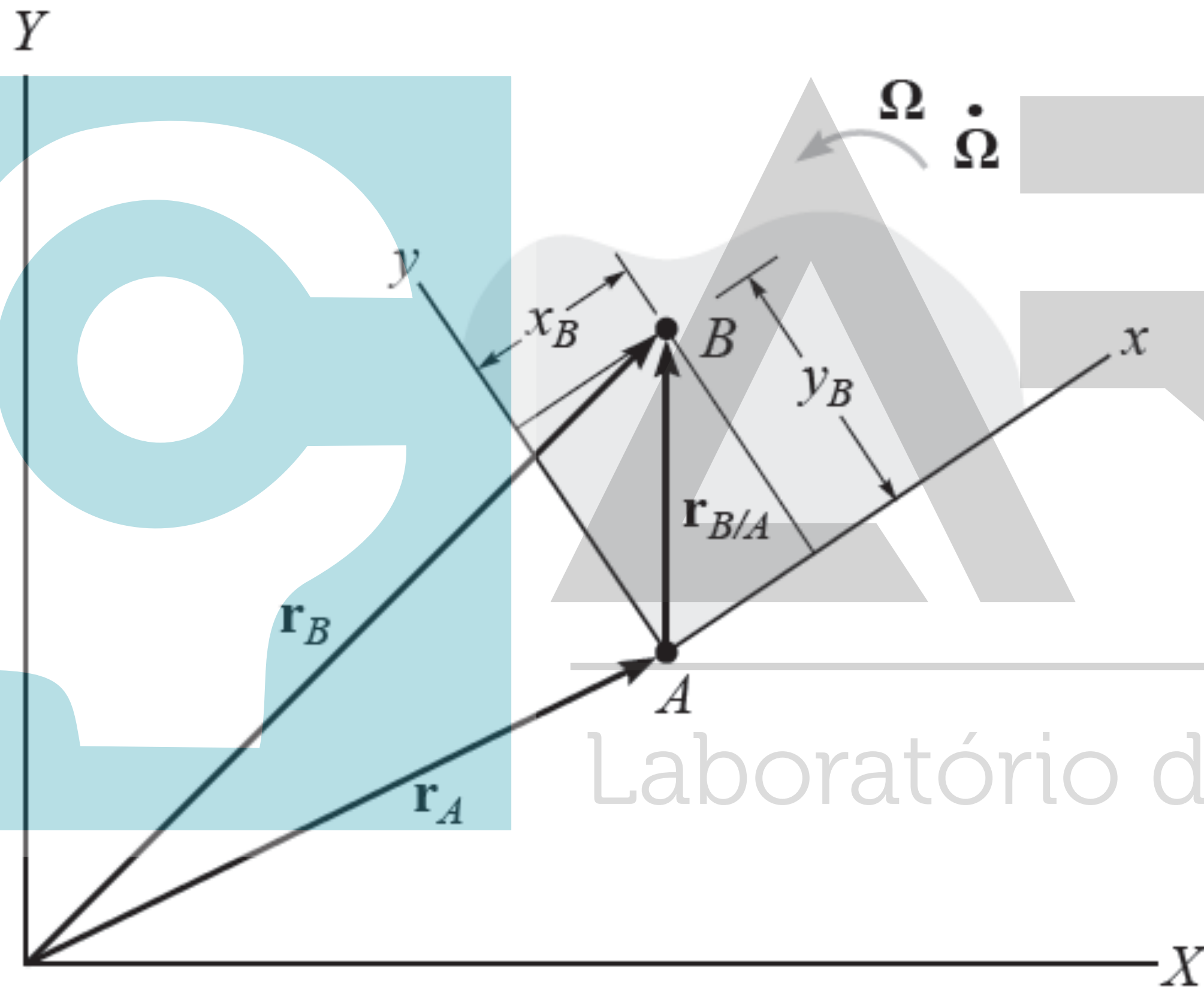
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

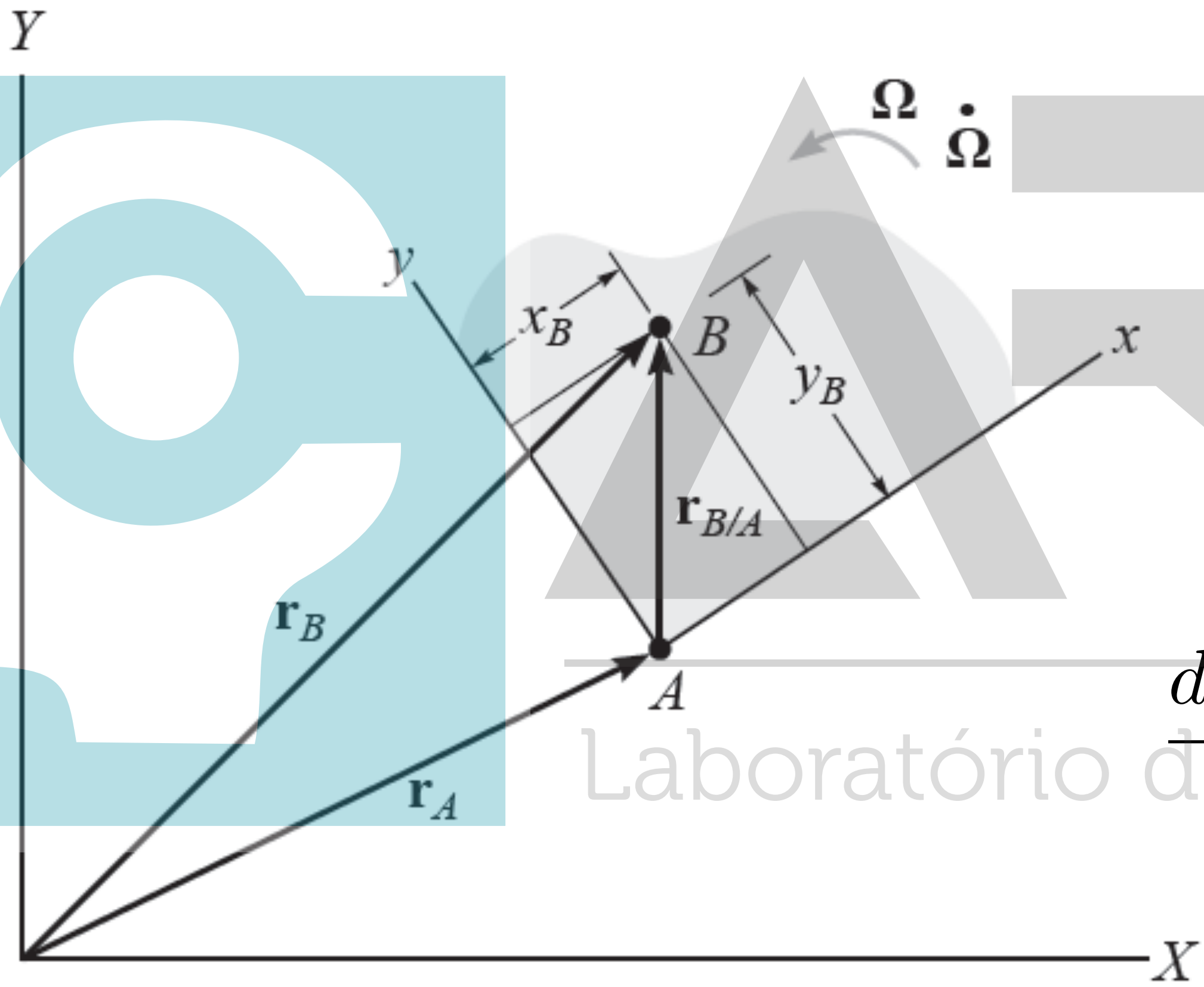
$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt} (x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j})$$

# Velocidade

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j})$$

$$= \frac{dx_B}{dt} \mathbf{i} + x_B \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt} \mathbf{j} + y_B \frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \left( \frac{dx_B}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt} \mathbf{j} \right) + \left( x_B \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right)$$

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \left( x_B \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right)$$

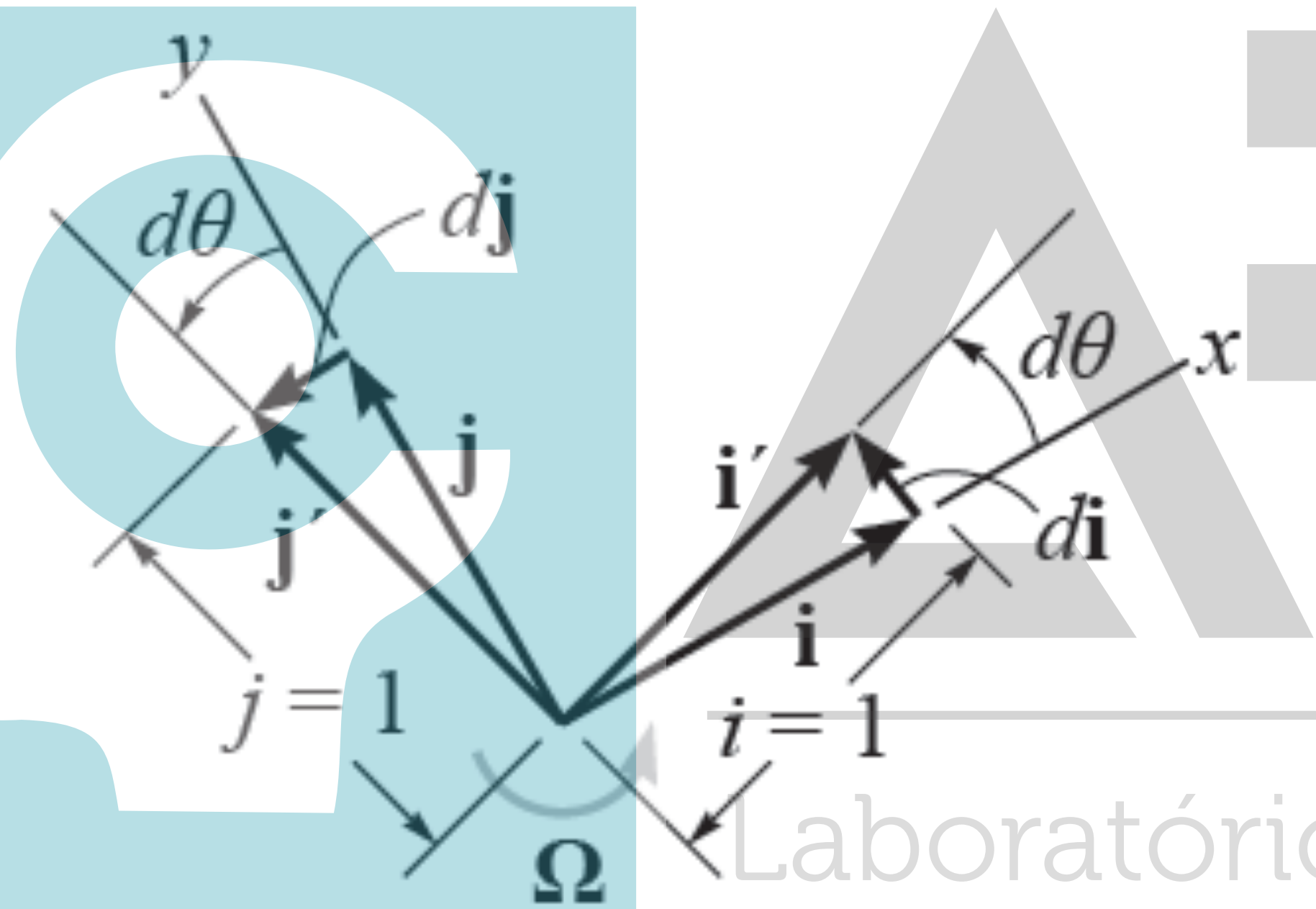
Intensidade:

$$|d\mathbf{i}| = |d\mathbf{j}| = 1d\theta$$

direção:

$$d\mathbf{i} = d\theta \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{j} = d\theta (-\mathbf{i})$$



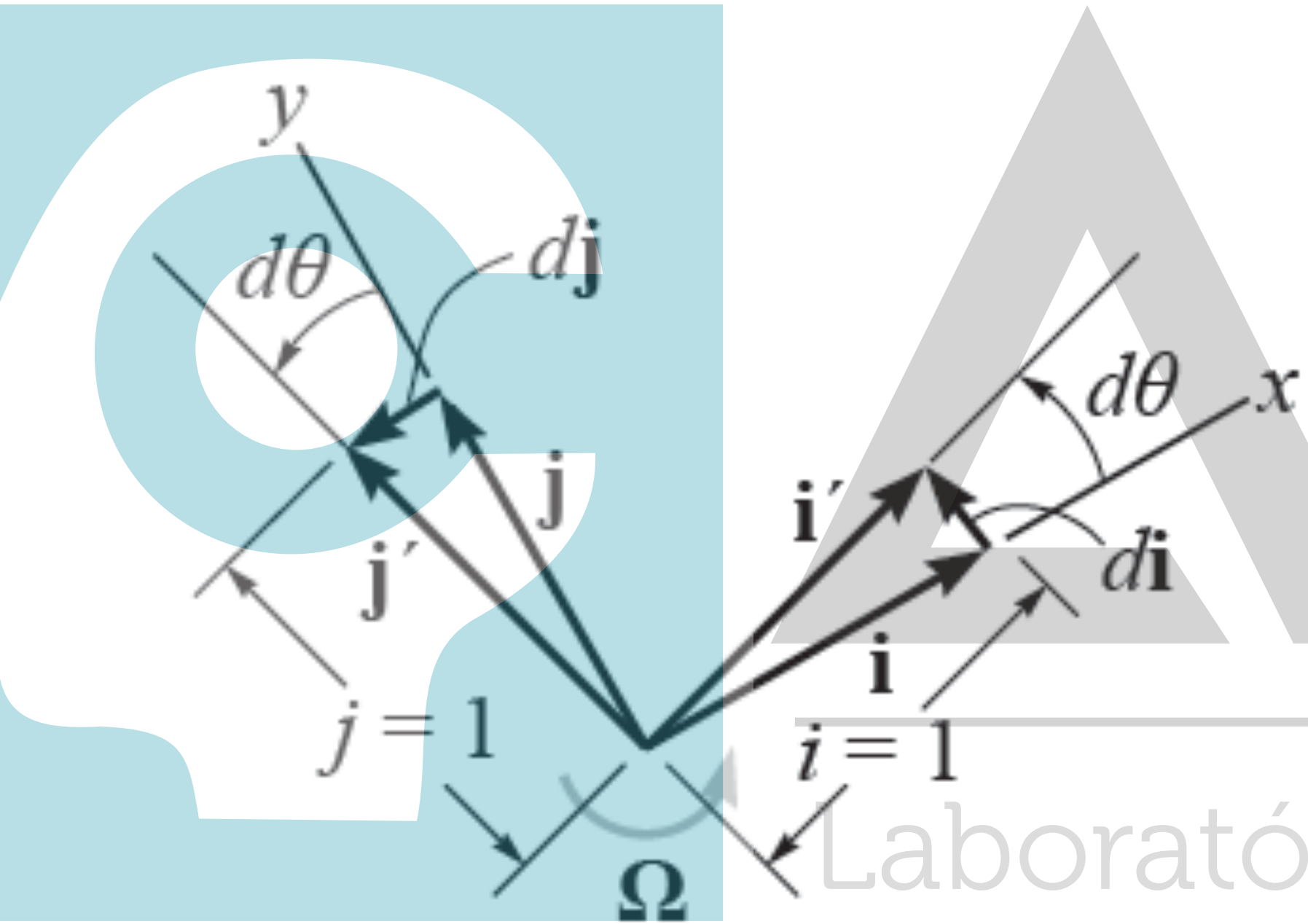
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Velocidade

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



$$d\mathbf{i} = d\theta \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{j} = d\theta (-\mathbf{i})$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}$$



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \mathbf{j}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (-\mathbf{i}) \longrightarrow \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\Omega \mathbf{i}$$

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

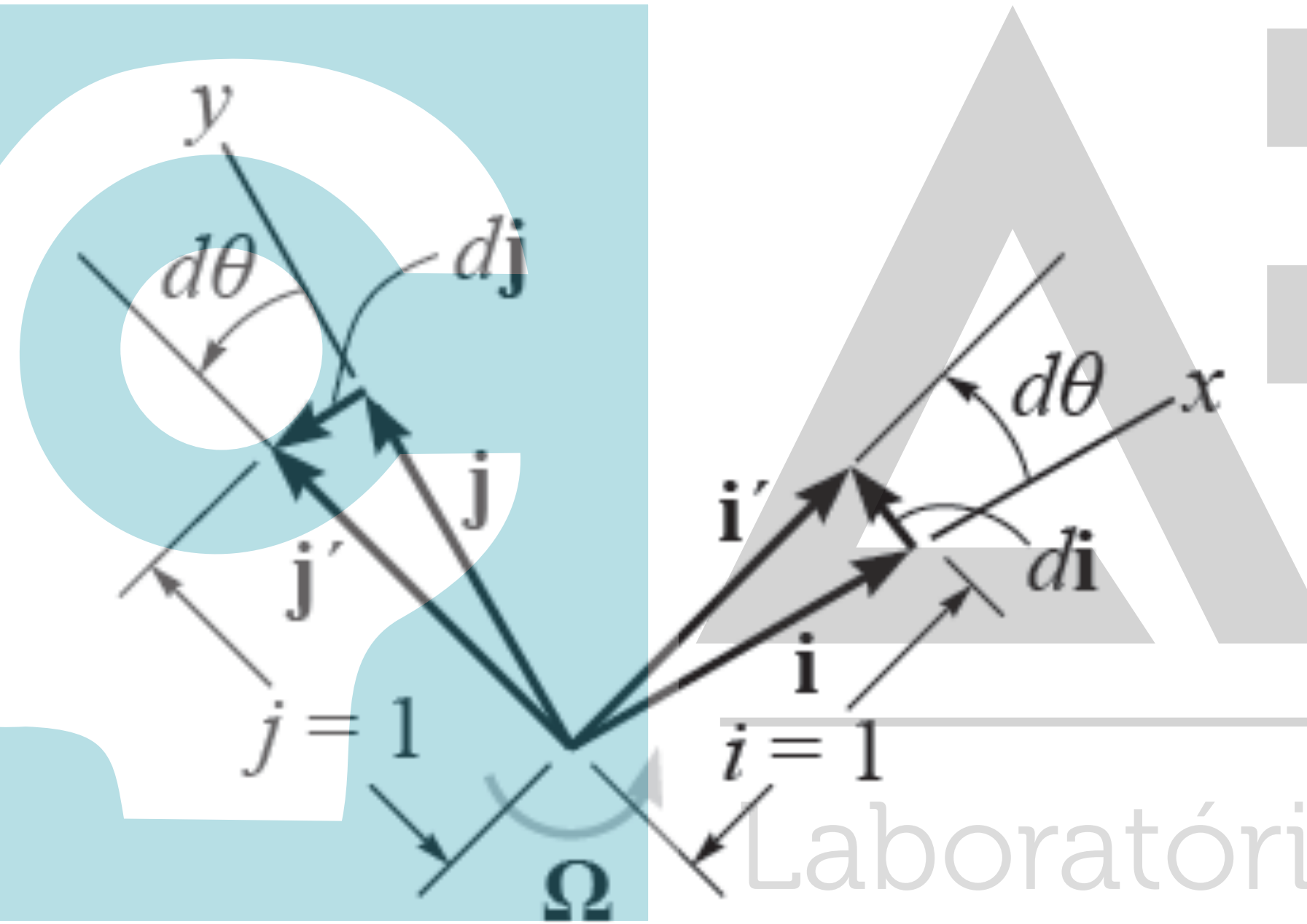
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\Omega \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Omega \times \mathbf{j}$$

$$\Omega = \Omega \mathbf{k}$$



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# Velocidade

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \left( x_B \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j})$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

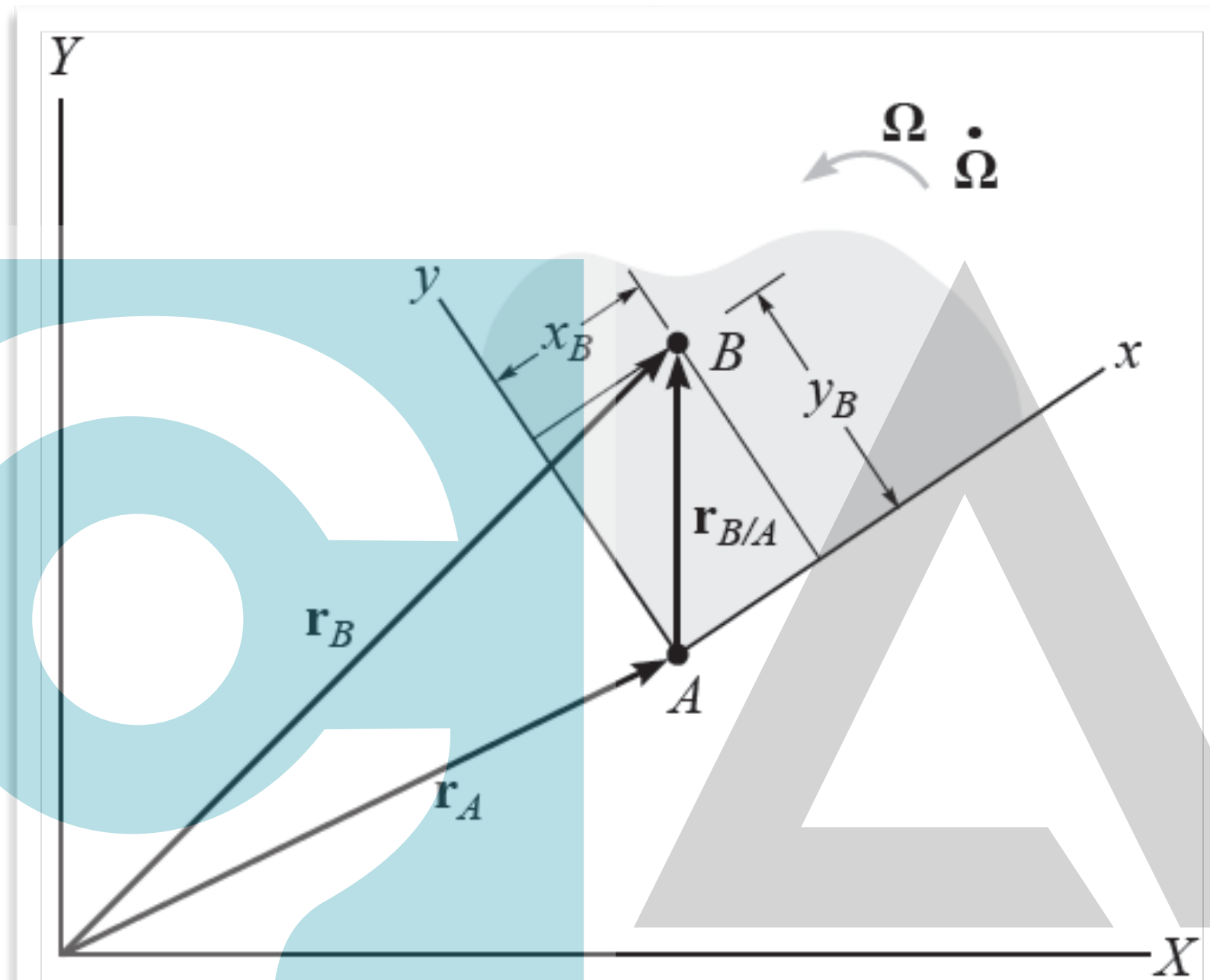
Conclusão



# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Conclusão



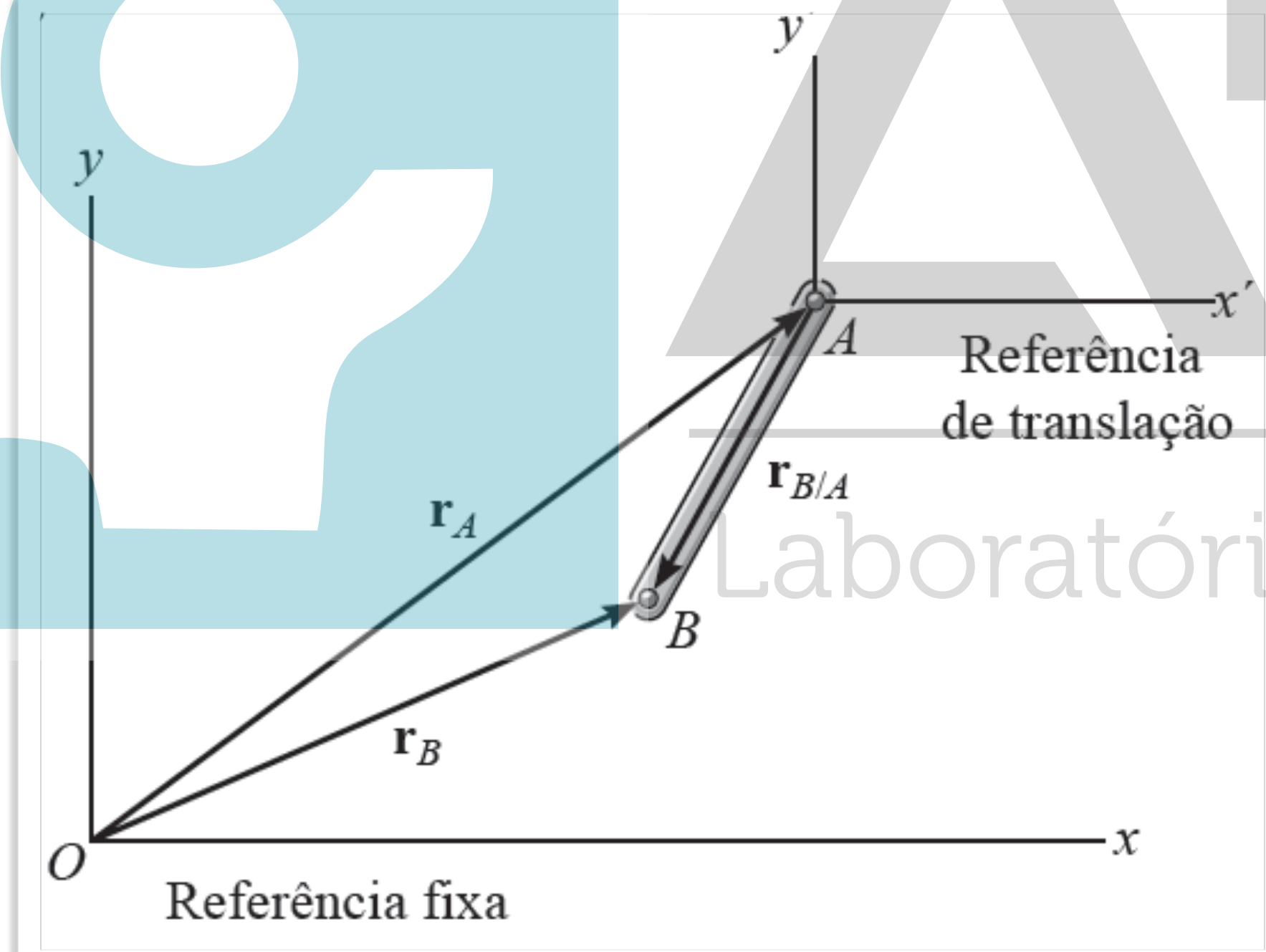
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

# Velocidade

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

comparação com  
eixos de translação

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



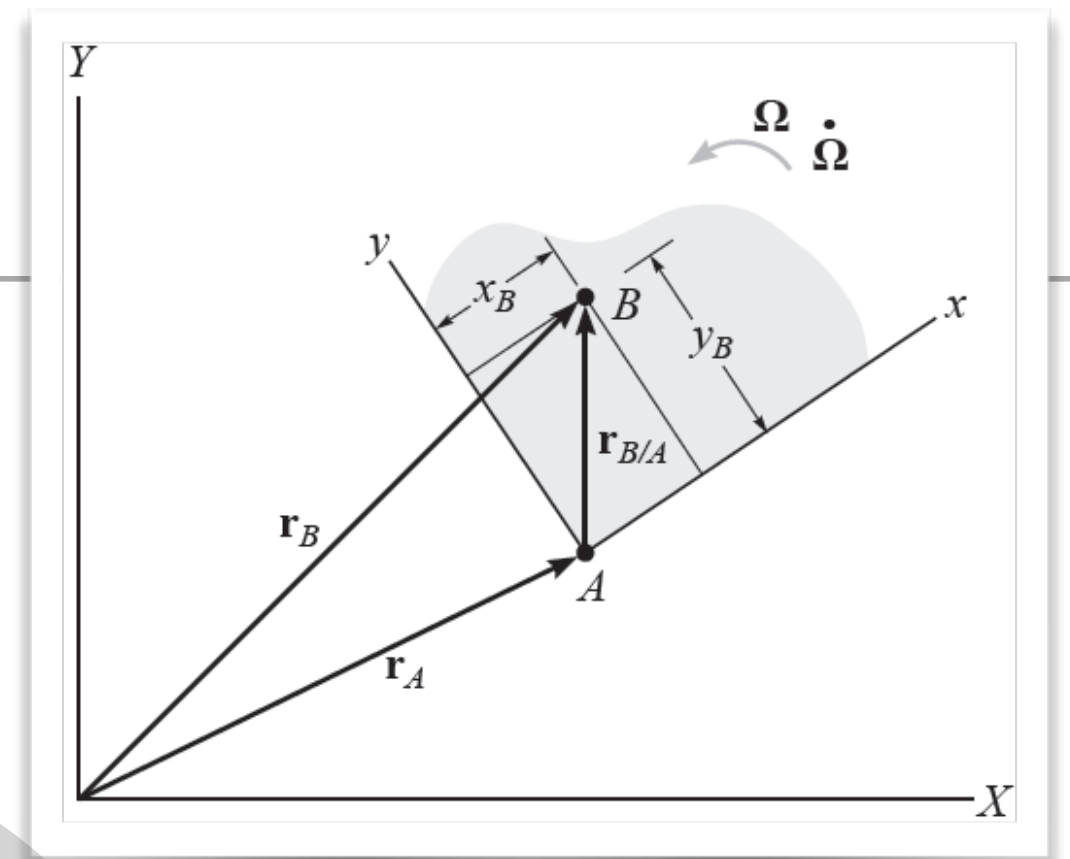
Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Velocidade

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



$\mathbf{v}_B$

velocidade absoluta de  $B$   
(iguais)

movimento de  $B$  observado a partir do sistema  
 $X, Y, Z$

ARCO Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

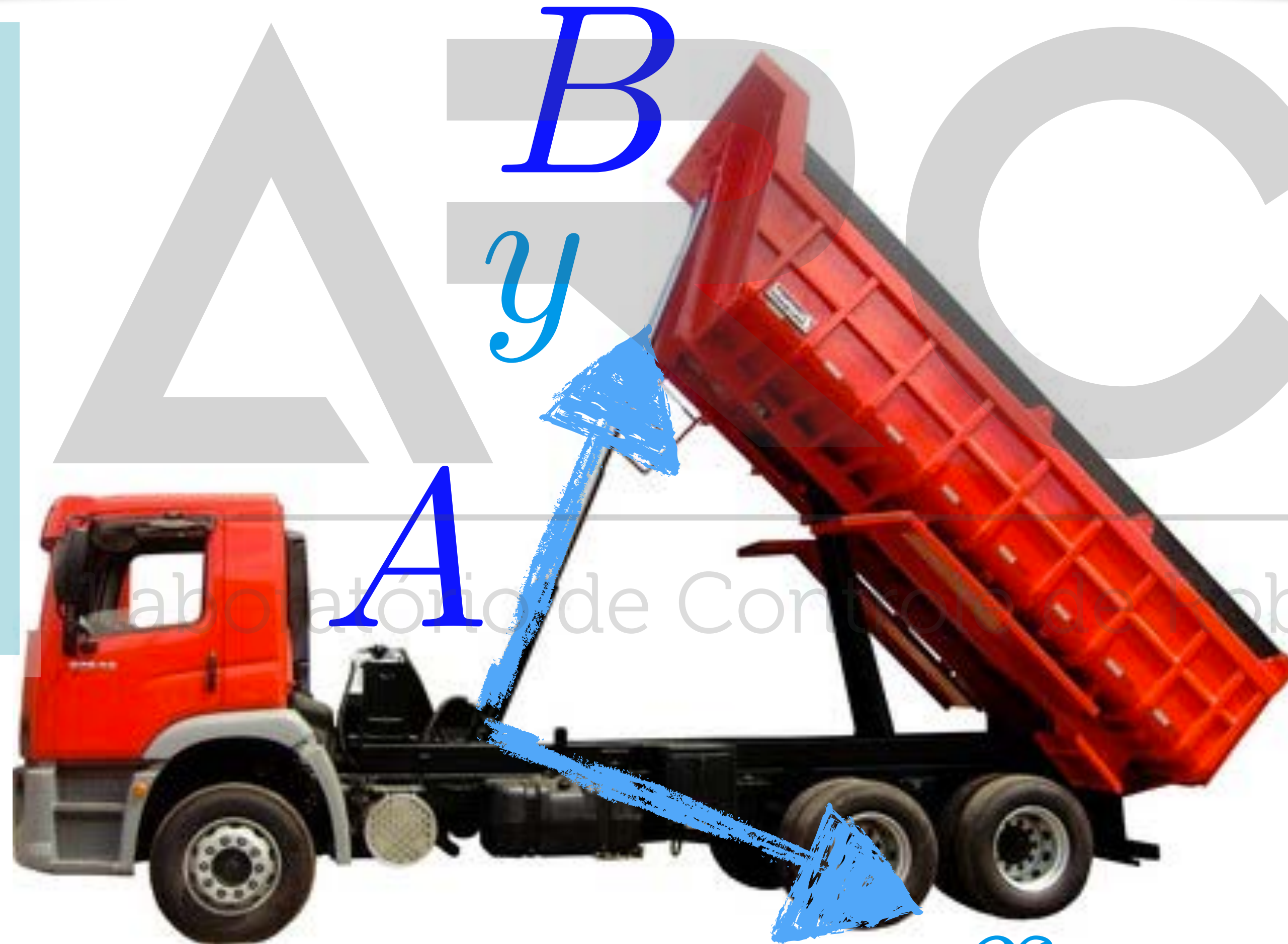
Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Velocidade

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

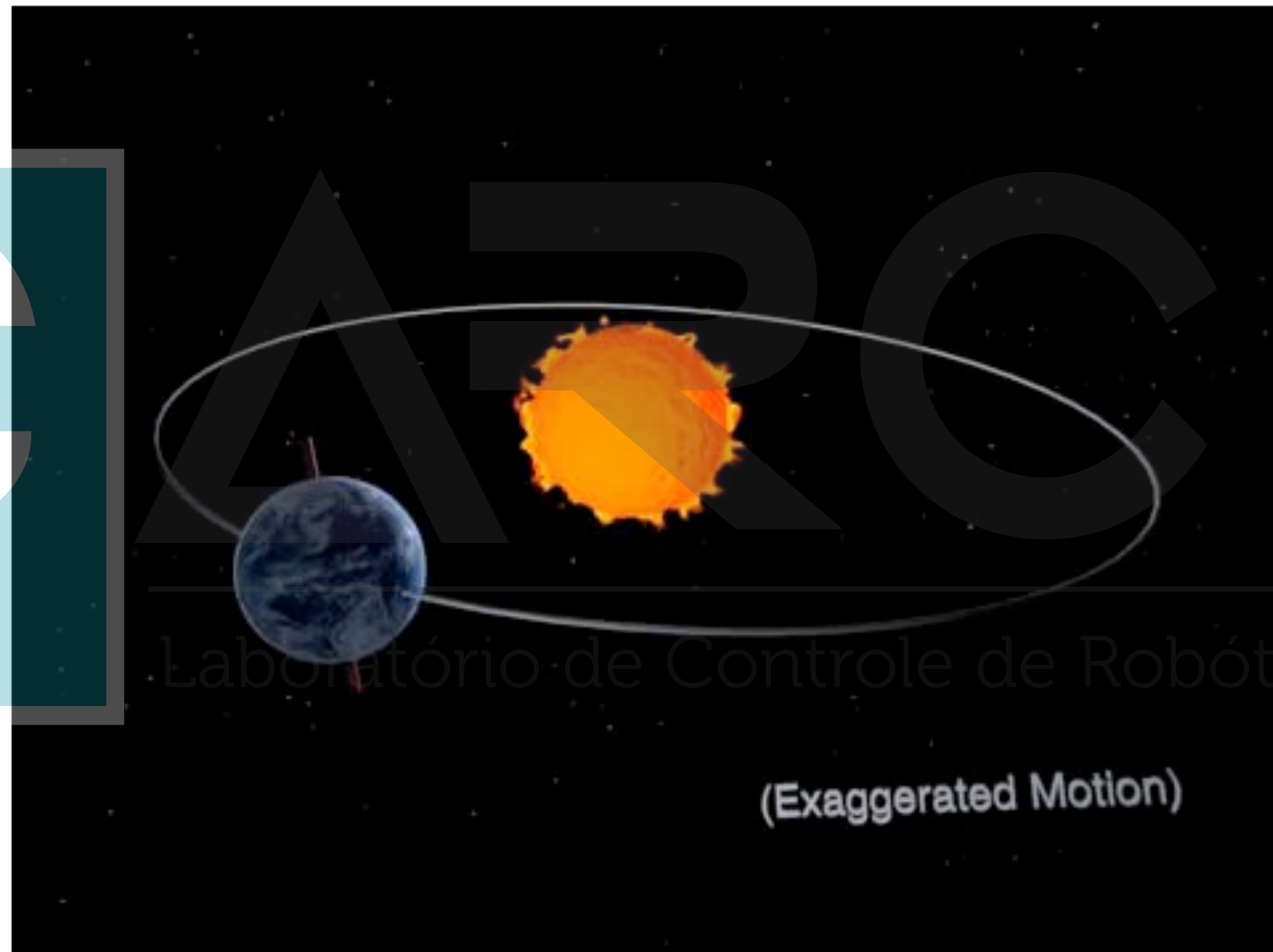
Conclusão

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



Lab

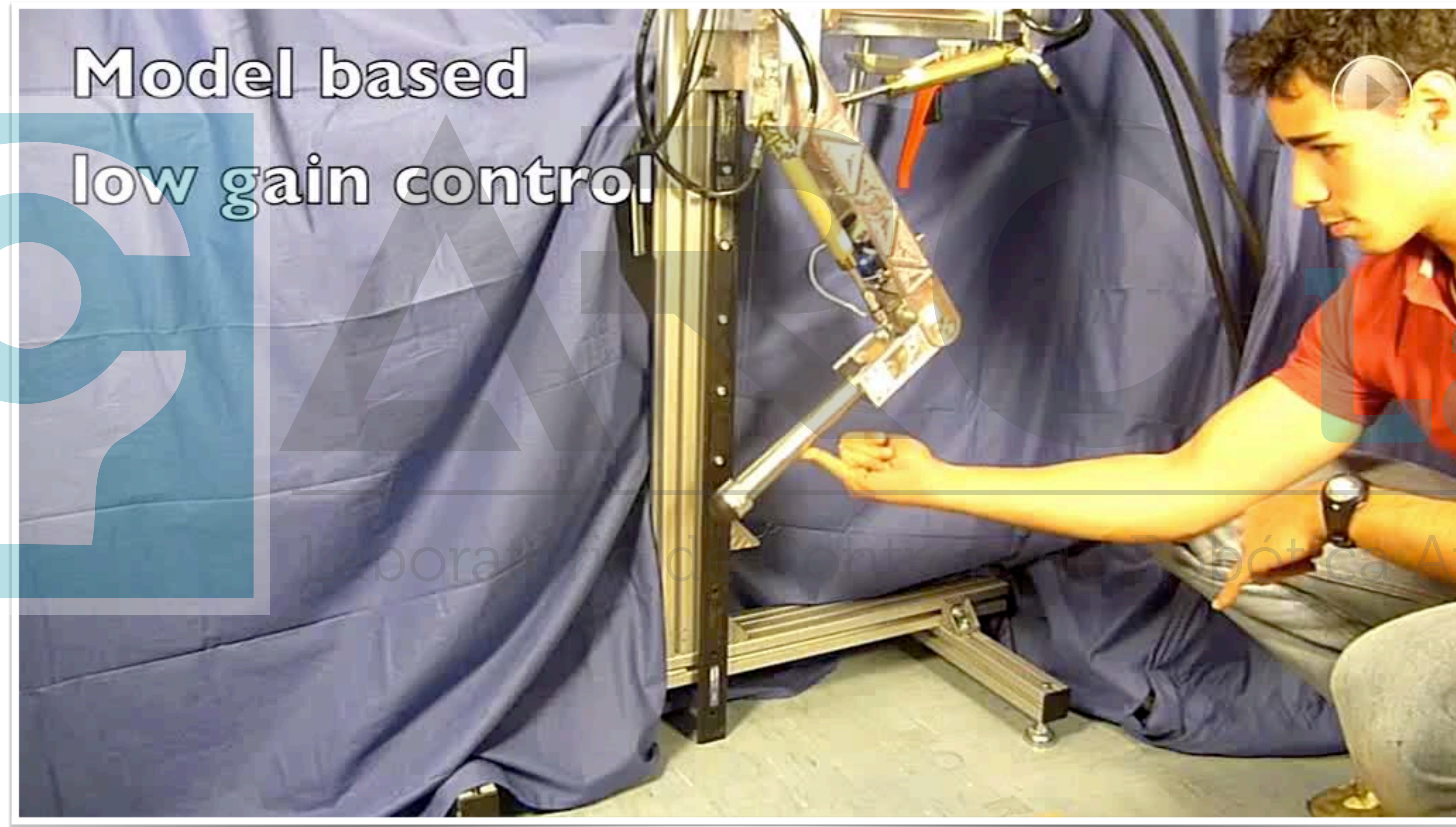
Laboratório de Controle de Engenharia de Mecânica Avançada

# Velocidade

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão





# Conteúdo

Movimento  
plano geral



- Velocidade
- **Aceleração**

Sistemas de  
eixo em rotação

LABORC Lab  
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Conclusão

# Aceleração

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Aceleração

Movimento  
plano geral

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Sistemas de  
eixo em rotação

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Conclusão

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x \mathbf{i} + (v_{B/A})_y \mathbf{j}$$

$\frac{d}{dt}$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[ \frac{d(v_{B/A})_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt} \mathbf{j} \right] + \left[ (v_{B/A})_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right]$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[ \frac{d(v_{B/A})_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt} \mathbf{j} \right] + \left[ (v_{B/A})_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



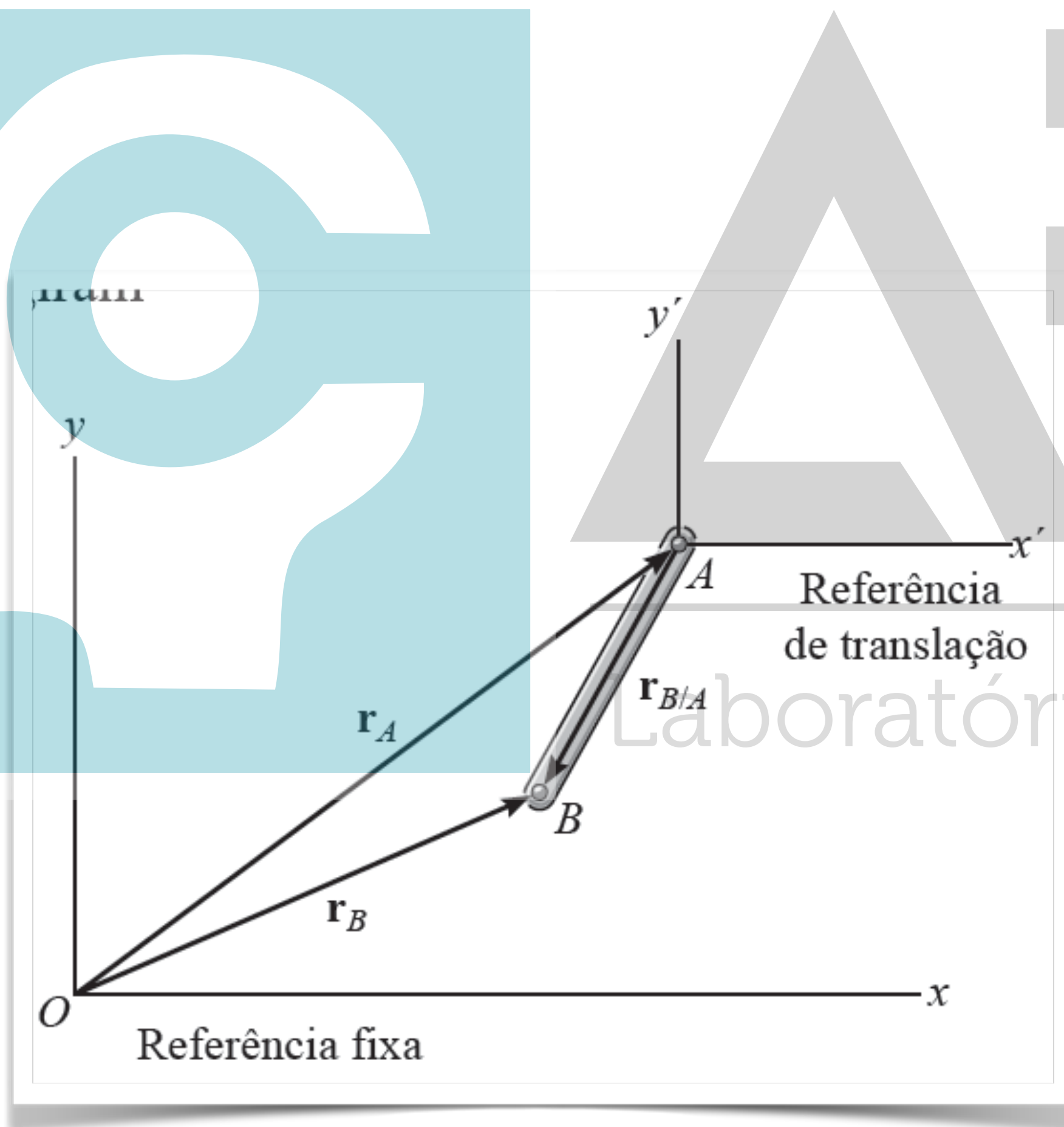
# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



comparação com  
eixos de translação

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

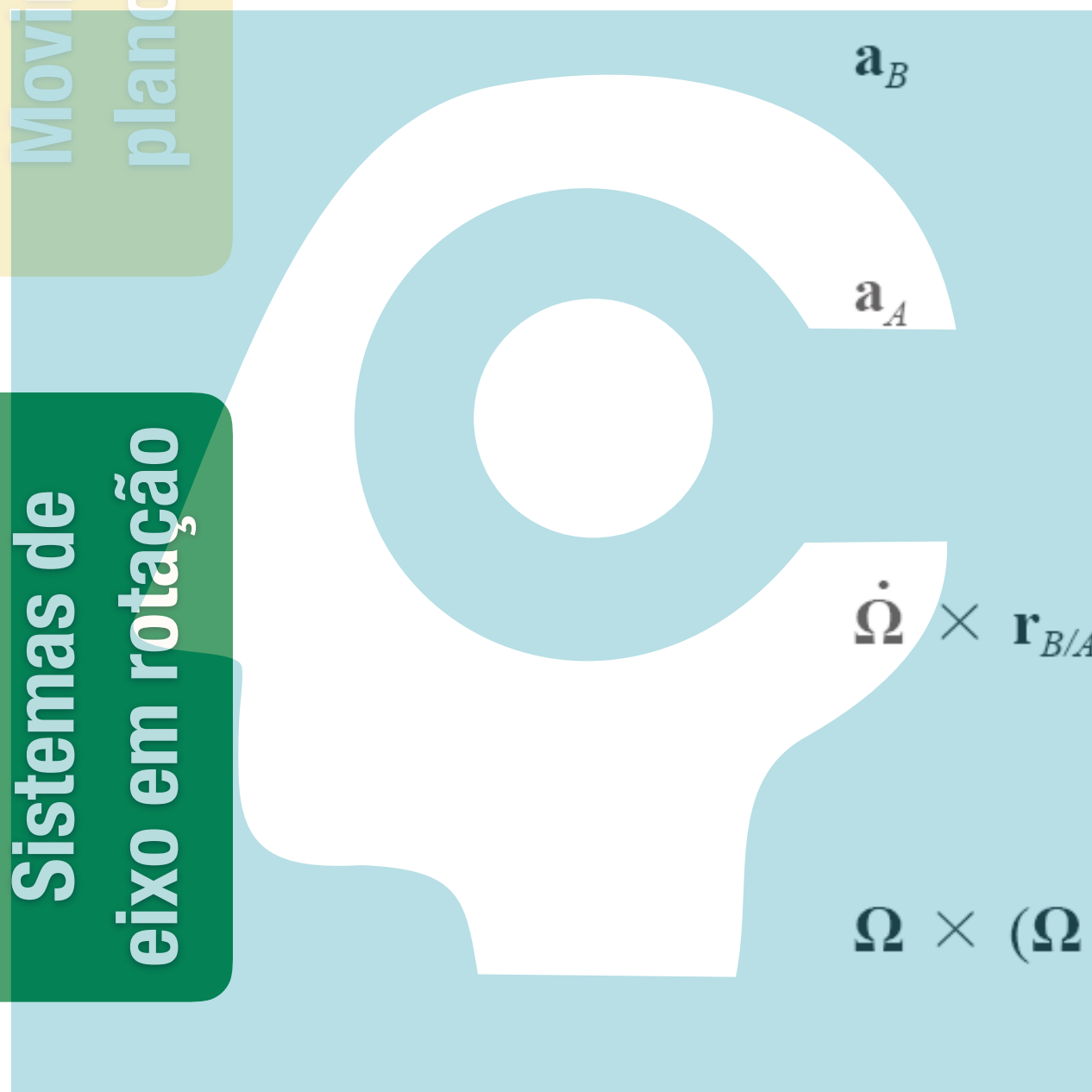
# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



- |  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| $\mathbf{a}_B$   | { | aceleração absoluta de $B$<br>(iguais)  | } movimento de $B$ observado a partir do sistema $X, Y, Z$               |
| $\mathbf{a}_A$   | { | aceleração absoluta da origem do sistema $x, y, z$<br>(mais)  | } movimento do sistema $x, y, z$ observado a partir do sistema $X, Y, Z$ |
| $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$                        | { | efeito de aceleração angular causado pela rotação do sistema $x, y, z$<br>(mais)                                      |  |
| $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ | { | efeito de velocidade angular causado pela rotação do sistema $x, y, z$<br>(mais)                                      |  |
| $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$                     | { | efeito combinado de $B$ deslocando-se em relação às coordenadas $x, y, z$ e da rotação do sistema $x, y, z$<br>(mais) |  |
| $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$   | { | aceleração de $B$ em relação a $A$  | } movimento de $B$ observado a partir do sistema $x, y, z$               |

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



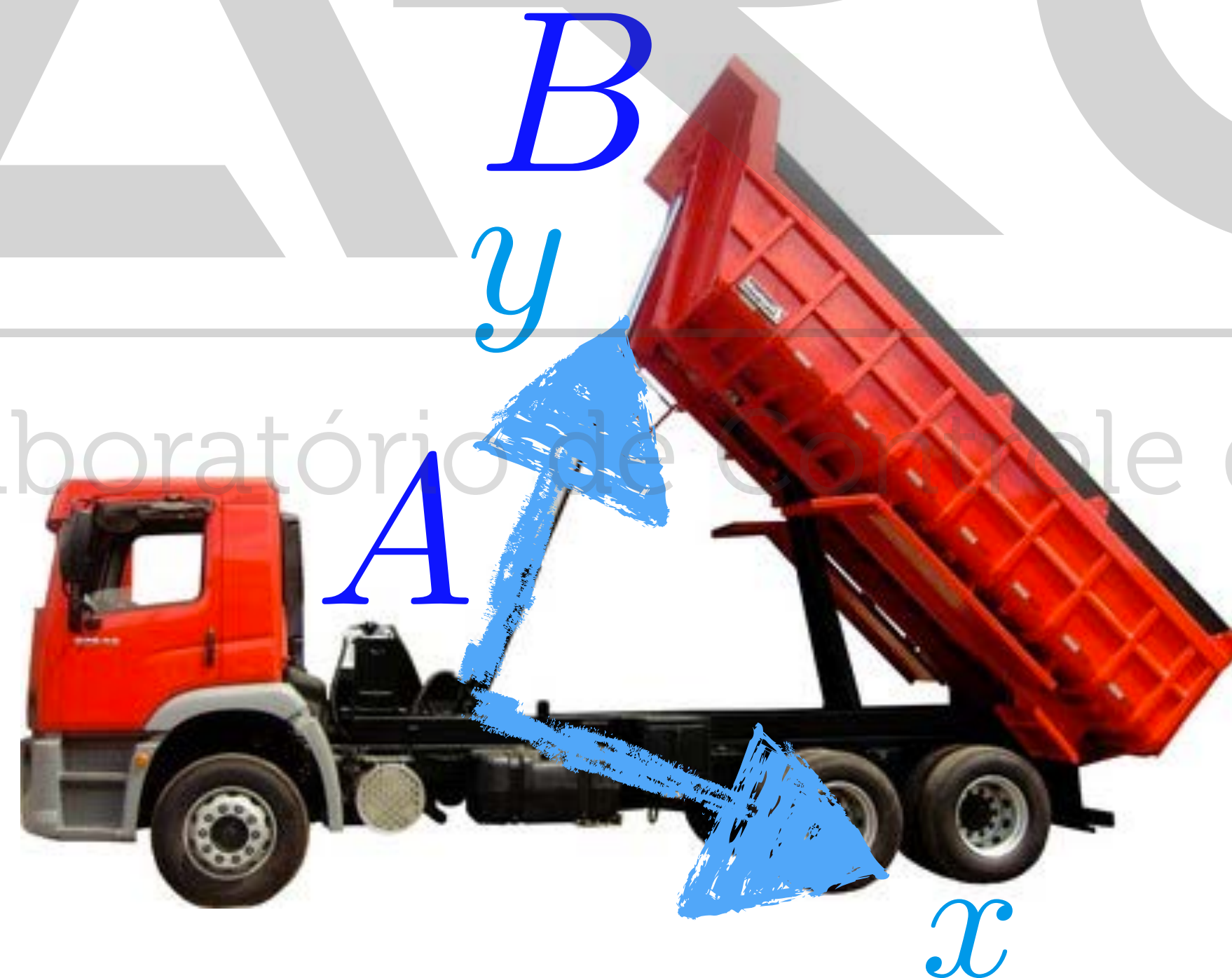
# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

efeito combinado de  $B$  deslocando-se em relação às coordenadas  $x, y, z$  e da rotação do sistema  $x, y, z$

interação dos movimentos



Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão

# Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

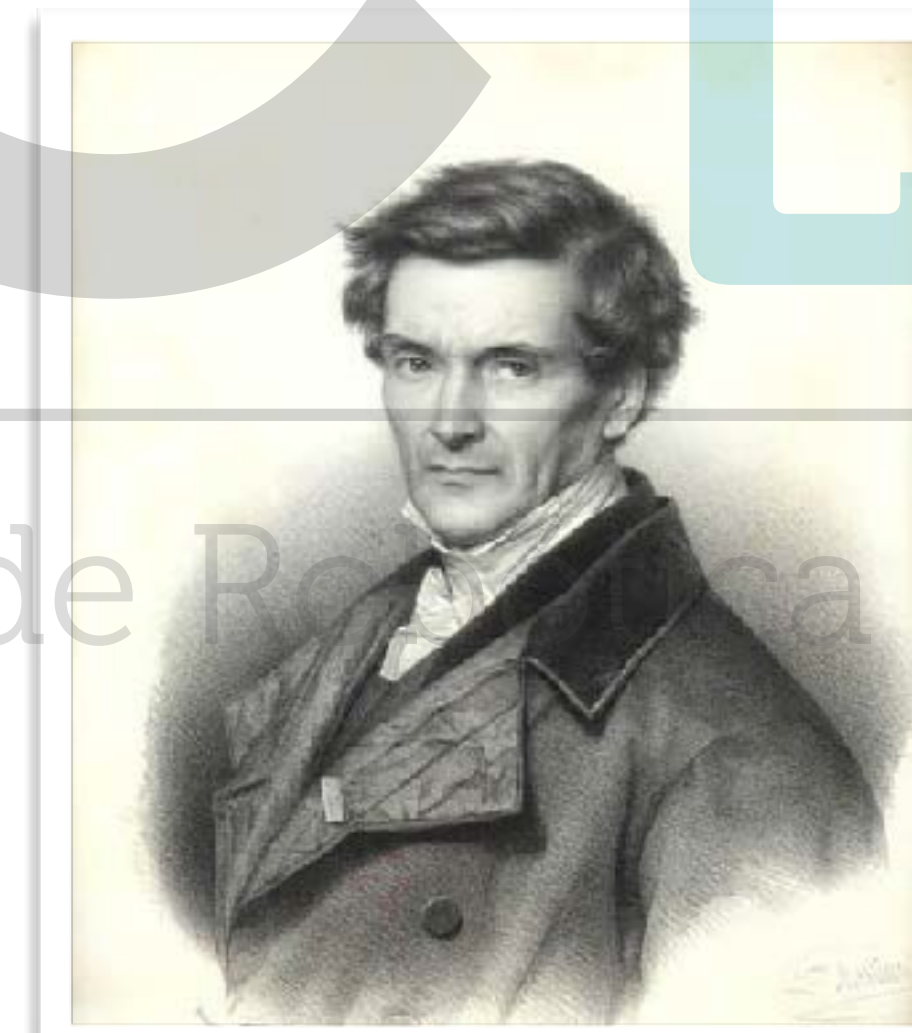
$$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

efeito combinado de  $B$  deslocando-se em relação às coordenadas  $x, y, z$  e da rotação do sistema  $x, y, z$

interação dos movimentos

aceleração de

# Coriolis



Gaspard-Gustave de Coriolis  
(1792 – 1843)

# Exemplo 16.19

Movimento  
plano geral

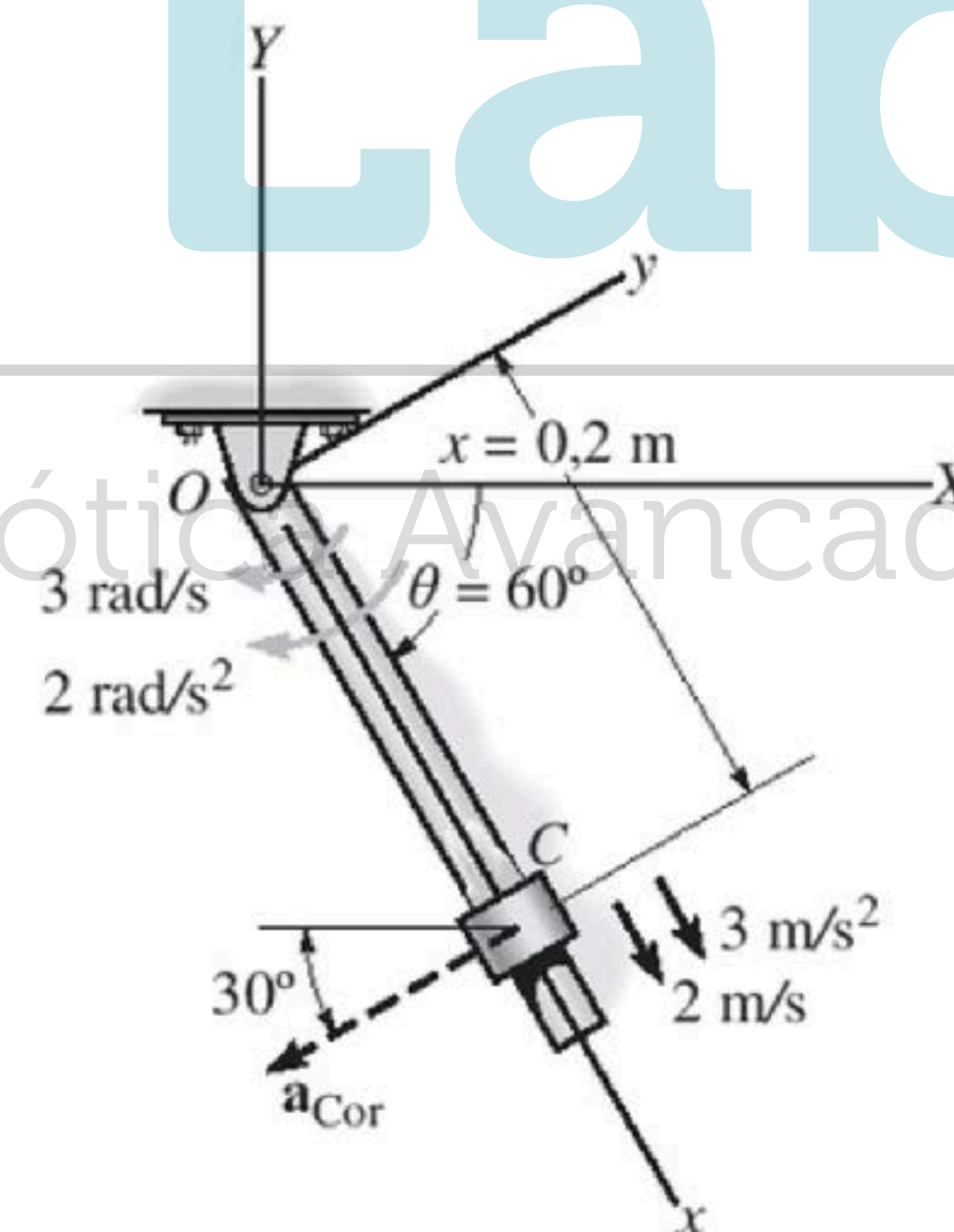
Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

No instante  $\theta = 60^\circ$ , a barra na Figura 16.33 tem uma velocidade angular de 3 rad/s e uma aceleração de 2 rad/s<sup>2</sup>. No mesmo instante, o anel C se desloca para fora ao longo da barra de tal maneira que, quando  $x = 0,2$  m, a velocidade é 2 m/s e a aceleração é 3 m/s<sup>2</sup>, ambas medidas em relação à barra. Determine a aceleração de Coriolis e a velocidade e aceleração do anel nesse instante.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



# Exemplo 16.19 - Resposta

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0, 2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\ &= \{2\mathbf{i} - 0,6\mathbf{j}\} \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0, 2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0, 2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\ &= \mathbf{0} - 0,4\mathbf{j} - 1,80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\ &= \{1,20\mathbf{i} - 12,4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

# Conteúdo

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação



# ARCO Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



– “Take-home messages”

Conclusão

# Aula passada...

Movimento plano geral

Sistemas de eixo em rotação

Conclusão



Trajetória de translação retilínea

(a)



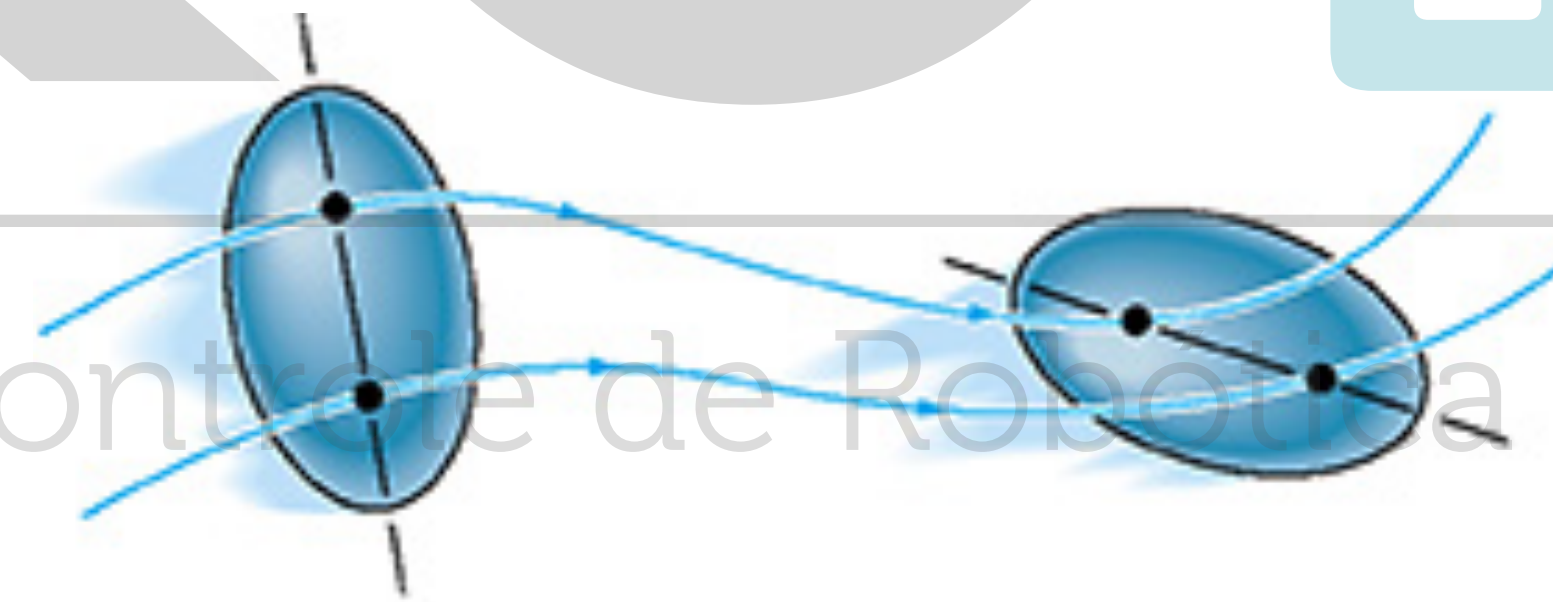
Trajetória de translação curvilínea

(b)



Rotação em torno de um eixo fixo

(c)



Movimento plano geral

(d)

ARC Lab

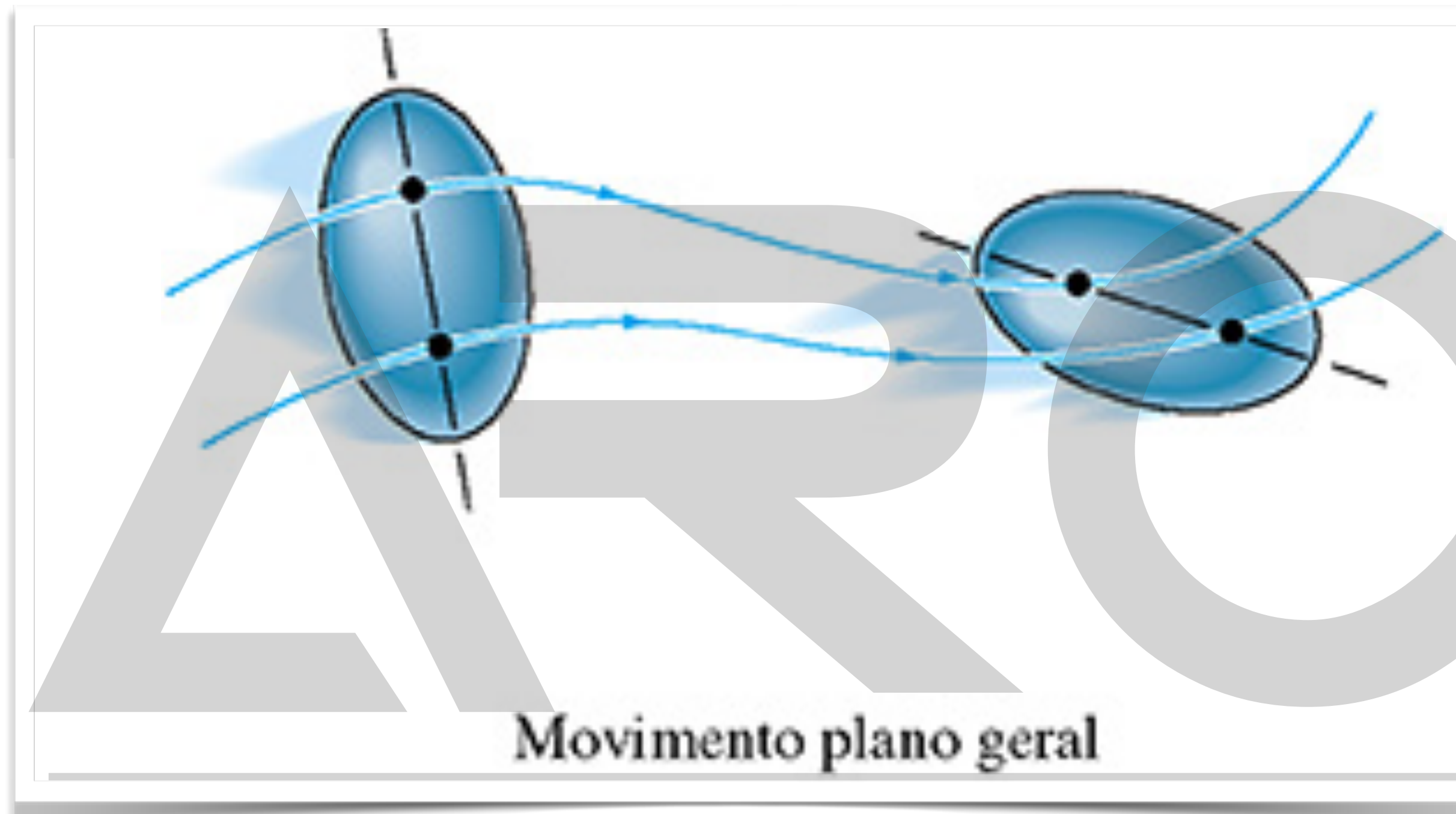
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

# “Take-home messages”

Movimento  
plano geral

Sistemas de  
eixo em rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$



*That's all Folks!*

Laboratorio de Control de Robótica Avanzada