Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 2.R.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

a) $3(50-x)$

b) $\dfrac{x}{y+100}$

c) $p = \dfrac{a}{1{,}2}$

d) $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$

e) $F + xb$

f) $\dfrac{F}{x} + c$ ■

Resolução (‖ Questão: 2.R.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

Express as single real numbers, in decimal notation:

(a) $5^3 = 5.5.5 = 125$

(b) $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0,001$

(c) $\dfrac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27$

(d) $\dfrac{-1}{10^{-3}} = -10^3 = -1000$

(e) $3^{-2}.3^3 = \dfrac{3^3}{3^2} = 3$

(f) $(3^{-2})^{-3} = 3^6 = 729$

(g) $-(\dfrac{5}{3})^0 = -1$

(h) $(\dfrac{-1}{2})^{-3} = (-2)^3 = -8$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Quais das seguintes expressões são definidas, e quais são seus valores?
a)$(0+2)^0 = 1$
A expressão é definida
b)$0^{-2} = \dfrac{1}{0}$
A expressão é indefinida
c)$\dfrac{10^0}{(0+1)^0} = \dfrac{1}{1^0} = 1$
A expressão é definida
d)$\dfrac{(0+1)^0}{(0+2)^0} = \dfrac{1^0}{2^0} = 1$
A expressão é definida ■

Resolução (‖ Questão: 2.R.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Simplify the following expressions:

(a) $(2^3 2^{-5})^3$
$(2^3 2^{-5}) = (2^{-2})^3 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

(b) $\frac{2}{3}^{-1} - \frac{4}{3}^{-1}$
$(\frac{2}{3})^{-1} - (\frac{4}{3})^{-1} = (\frac{3}{2}) - \frac{3}{4} = \dfrac{6-3}{4} = \frac{3}{4}$

(c) $(3^{-2} - 5^{-1})^{-1}$
$(3^{-2} - 5^{-1})^{-1} = (\frac{1}{9} - \frac{1}{5})^{-1} = (\frac{5-9}{9.5})^{-1} = (-\frac{4}{45})^{-1} = -\frac{45}{4}$

(d) $(1,12)^{-3}.(1,12)^3$
$(1,12)^{-3} \cdot (1,12)^3 = (1,12)^0 = 1$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.5 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Simplify the following expressions:
a) $(2x)^4 = 16x^4$

b) $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1} = (\dfrac{1}{4})^{-1} = 4$

c) $\frac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2} = 6xyz$

d) $[-(-ab^3)^{-3}(a^6b^6)^2]^3 = [\dfrac{a^{12}b^{12}}{a^3b^9}]^3 = a^{27}b^9$

e) $\dfrac{a^5a^3a^{-2}}{a^{-3}a^6} = a^3$

f) $[(\frac{x}{2})^3 \cdot \frac{8}{x^{-2}}]^{-3} \rightarrow [\frac{x^3}{8} \cdot \frac{8}{x^{-2}}]^{-3} = [\frac{x^9}{1} \cdot \frac{1}{x^{-6}}]^{-1} = [\frac{1}{x^9} \cdot \frac{1}{x^6}] = \frac{1}{x^{15}}$ ■

Resolução (‖ Questão: 2.R.6 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{04}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

6) Complete the following statements
a) $x^{-1}y^{-1} = 3 \rightarrow x^3y^3 = [(xy)^{-1}]^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$
b) $x^7 = 2 \rightarrow (x^{-3})^6(x^2)^2 = x^{-18}x^4 = x^{-14} = (x^7)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
c) $(\frac{xy}{z})^{-2} = 3 \rightarrow (\frac{z}{xy})^6 = \left[(\frac{xy}{z})^{-2}\right]^3 = 3^3 = 27$
d) $(abc)^{-1} = \frac{1}{4} \rightarrow (abc)^4 = [(abc)^{-1}]^{-4} = 4^4 = 256$
■

Resolução (‖ Questão: 2.R.7 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖))

Compute the following numbers:

(a) 12 % of 300 $= \frac{12}{100}.300 = \frac{3600}{100} = 36$

(b) 5% of 2000 $= \frac{5}{100}.2000 = \frac{10000}{100} = 100$

(c) 6.5% of 1500 $= \frac{65}{1000}.1500 = \frac{9750}{1000} = 97,5$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.8 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

8. Give economic interpretations to each of the following expressions and then use a calculator to find their approximate values:

a)$100.(1.01)^8$: 100 euros rendendo juros a uma taxa de crescimento de 1% por 8 períodos.
Montante recebido: $\approx 108,29$.

b)$50000.(1.15)^{10}$: 50000 libras renendo juros a uma taxa de crescimento de 15% por 10 períodos.
Montante recebido: ≈ 202277.89.

c)$6000.(1.03)^{-8}$: Cálculo do valor necessário para se aplicar por 8 períodos a uma taxa de crescimento de 3% para se obter \$6000 no final.
Montante recebido: $\approx \$4736.46$.
■

Resolução (‖ Questão: 2.R.9 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

(a)\$100000 is deposited into an account earning 8% interest per year. What is the amount after ten years?

(b) If the interest rate is 8% each year, how much money should you have deposited in a bank six years ago to have \$25000 today?

A questão trata de juros compostos. Usaremos a fórmula a seguir:

$$L = K(1 + \frac{p}{100})^t \tag{1}$$

L representa o montante, K o valor inicial investido, p a porcentagem de juros da aplicação e t o tempo da operação.

(a) Dados do exercício: K=\$100 000, p=8%a.a e t=10anos

$$L = 100.000(1 + \frac{8}{100})^{10} \rightarrow L = 100.000(1,08)^{10} \rightarrow L = \$215.892,50 \tag{2}$$

(b) Dados do exercício: p=8%a.a, t=6 e L=\$25 000

$$25.000 = K(1 + \frac{8}{100})^{6} \rightarrow K = \frac{25.000}{(1,08)^6} \rightarrow K = \$15.754,24 \tag{3}$$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.10 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

Expanda e simplifique as seguintes expressões

a) $a \cdot (a-1) = a^2 - a$

b) $(x-3)\cdot(x+7) = x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + 4x - 21$

c) $-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3} - \sqrt{6} = -3 + \sqrt{18}) = -3 + 3\sqrt{2}$

d) $(1-\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$

e) $(x-1)^3 = (x-1)\cdot(x-1)^2 = (x-1)\cdot(x^2-2x+1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

f) $(1-b^2)\cdot(1+b^2) = 1 - b^4$

g) $(1+x+x^2+x^3)\cdot(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 = 1 - x^4$

h) $(x+1)^4 = (x+1)^2\cdot(x+1)^2 = (x^2+2x+1)\cdot(x^2+2x+1) = x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x+x^2+2x+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.11 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

(a) $25x - 5 = 5(5x-1)$

(b) $3x^2 - x^3y = x^2(3 - xy)$

(c) $50 - x^2 = (5\sqrt{2} - x)(5\sqrt{2} + x)$

(d) $a^3 - 4a^2 + 4ab^2 = a(a^2 - 4ab + 4b^2) = a(a-2b)^2$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.12 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Factor the following expressions:

(a) $5(x+2y) + a(x+2y) = 5x + 10y + ax + 2ay = x(5+a) + 2y(5+a) = (5+a)(x+2y)$

(b) $(a+b)c - d(a+b) = (c-d)(a+b)$

(c) $ax + ay + 2x + 2y = a(x + y) + 2(x + y) = (a + 2)(x + y)$

(d) $2x^2 - 5yz + 10xz - xy = 2x^2 - xy + 10xz - 5yz = x(2x - y) + 5z(2x - y) = (x + 5z)(2x - y)$

(e) $p^2 - q^2 + p - q = (p + q)(p - q) + (p - q) = (p - q)[(p + q) + 1] = (p - q)(p + q + 1)$

(f) $u^3 + v^3 - u^2v - v^2u = (u^2 - v^2)(u - v) = (u + v)(u - v)(u - v)$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.13 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

Compute the following numbers, without using a calculator:

(a) $16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2$

(b) $243^{-1/5} = (3^5)^{-1/5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

(c) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7} = 5^{7/7} = 5$

(d) $(4^8)^{-3/16} = 4^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$

(e) $64^{1/3} + \sqrt[3]{125} = (4^3)^{1/3} + (5^3)^{1/3} = 4 + 5 = 9$

(f) $(\frac{-8}{27})^{2/3} = (\frac{(-2)^3}{3^3})^{2/3} = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

(g) $(\frac{-1}{8})^{-2/3} + (\frac{1}{27})^{-2/3} = (\frac{-1}{2^3})^{-\frac{2}{3}} + (\frac{1}{3^3})^{-2/3} = (\frac{-1}{2})^{-2} + (\frac{1}{3})^{-2} = 4 + 9 = 13$

(h) $\frac{1000^{-2/3}}{5^{-3/3}} = \frac{(10^3)^{-2/3}}{5^{-1}} = \frac{10^{-2} \cdot 5}{1} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.14 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖) Solve the following equations for x:

(a) $2^{2x} = 8$

(b) $3^{3x+1} = \dfrac{1}{81}$

(c) $10^{x^2-2x+2} = 100$

(a) $2^{2x} = 2^3$
$2x = 3$
$x = \dfrac{3}{2}$

(b) $3^{3x+1} = \dfrac{1}{3^4}$
$3^{3x+1} = 3^{-4}$
$3x + 1 = -4$
$x = -\dfrac{5}{3}$

(c) $10^{x^2-2x+2} = 10^2$
$x^2 - 2x + 2 = 2$
$x^2 - 2x = 0$
$x \cdot (x-2) = 0$
Desse modo, $x = 0$ ou $x = 2$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.15 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{04}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

a) $25^5.25^x = 25^3$
$25^{5+x} = 25^3$
$(5+x).ln(25) = 3.ln(25)$
$5 + x = 3$
$x = -2$

b) $3^x - 3^{x-2} = 24$
$3^x - 3^x.3^{-2} = 24$
$(1 - \frac{1}{9}).3^x = 24$
$(\frac{8}{9}).3^x = 3.8$
$\frac{3^x}{3^2} = 3$
$(x-2).ln(3) = ln(3)$
$x - 2 = 1$
$x = 3$

c) $3^x.3^{x-1} = 81$
$3^{2x-1} = 3^4$
$(2x-1)ln(3) = 4ln(3)$
$2x - 1 = 4$
$x = \frac{5}{2}$

d) $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^x$
$3.3^5 = 3^x$
$3^6 = 3^x$
$6.ln(3) = x.ln(3)$
$x = 6$

e) $4^{-6} + 4^{-6} + 4^{-6} + 4^{-6} = 4^x$
$4.4^{-6} = 4^x$
$4^{-5} = 4^x$
$(-5).ln(4) = x.ln(4)$
$x = -5$

f) $\frac{2^{26}-2^{23}}{2^{26}+2^{23}} = \frac{x}{9}$

$\frac{2^{23}(8-1)}{2^{23}(8+1)} = \frac{x}{9}$

$\frac{7}{9} = \frac{x}{9}$

$x = 7$

Resolução (‖ Questão: 2.R.16 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

a) $\frac{s}{2s-1} - \frac{s}{2s+1} = \frac{s(2s+1)-s(2s-1)}{4s^2-1} = \frac{2s^2+s-2s^2+s}{4s^2-1} = \frac{2s}{4s^2-1}$

b) $\frac{x}{3-x} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{24}{x^2-9} = \frac{-x}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{24}{x^2-9} = \frac{-x(x+3)-(1-x)(x-3)-24}{(x-3)(x+3)} = \frac{-x^2-7x+x^2-21}{(x-3)(x+3)} = \frac{-7(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-7}{(x-3)}$

c) $\frac{\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{xy^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}} = (\frac{y-x}{x^2y^2})(\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}) = \frac{y-x}{y^2-x^2} = \frac{1}{y+x}$

■

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.17 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Reduce the following fractions:

(a) $\frac{-25a^3b^2}{125ab} = \frac{25a^3b^2}{5.25.ab} = \frac{a^2b}{5}$

(b) $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = x - y$

(c) $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2} = \frac{(2a-3b)^2}{2^2a^2-3^2b^2} = \frac{(2a-3b)^2}{(2a)^2-(3ab)^2} = \frac{(2a-3b)^2}{(2a-3b)(2a+3b)} = \frac{2a-3b}{2a+3b}$

(d) $\frac{4x-x^3}{4-4x+x^2} = \frac{4x-x^3}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x^2)}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)(2+x)x}{(2-x)^2} = \frac{(2+x)x}{(2-x)}$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.18 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

(a) $2(x-4) < 5 \Leftrightarrow 2x - 8 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}$

(b) $\frac{1}{3}(y-3) + 4 \geq 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (\frac{1}{3}(y-3)+4) \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow y - 3 + 12 \geq 6 \Leftrightarrow y \geq -3$

(c) $8 - 0,2x \geq \frac{4-0,1x}{0,5} \Leftrightarrow 8 - 0,2x \geq 8 - 0,2x$

Logo, é válido para todo x

(d) $\frac{x-1}{-3} > \frac{-3x+8}{-5} \Leftrightarrow -5(x-1) > -3(-3x+8) \Leftrightarrow -5x + 5 > 9x - 24 \Leftrightarrow 29 > 4x \Leftrightarrow x < \frac{29}{4}$

(e) $|5-3x| \leq 8$

Caso 1: $5 - 3x \leq 8 \Leftrightarrow -3x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -1$

Caso 2: $3x - 5 \leq 8 \Leftrightarrow 3x \leq 13 \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{3}$

Portanto: $-1 \leq x \leq \frac{13}{3}$

(f) $|x^2 - 4| \leq 2$

Caso 1: $x^2 - 4 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{6}$ ou $x \geq -\sqrt{6}$

Caso 2: $4 - x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -x^2 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$

Portanto: $-\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}$

■

Resolução (|| Questão: 2.R.19 || Relator: $\mathbf{x}_{09}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ||)

a)O custo mensal de telefone para ser utilizado em x minutos é representado pela equação: $30 + 0,16x$

Para achar os minutos a serem uitiliza-dos, faz-se: $102 \leq 30 + 0{,}16x \leq 126 \rightarrow 102 - 30 \leq 0{,}16x \leq 126 - 30 \rightarrow 72 \leq 0{,}16x \leq 96 \rightarrow \dfrac{72}{0{,}16} \leq x \leq \dfrac{96}{0{,}16} \rightarrow 450 \leq x \leq 600$ Ajustando para horas, temos $7{,}5 \leq x \leq 10$

■

Resolução (|| Questão: 2.R.20 || Relator: $\mathbf{x}_{11}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ||)

20) If a rope could be wrapped around the Earth's surface at the equator, it would be approximately circular and about 40 million metres long. Suppose we wanted to extend the rope to make it 1 metre above the equator at every point. How many more metres of rope would be needed? (The circumference of a circle with radius r is $2\pi r$.)

$2\pi r$ = Circunfêrencia da Terra = Tamanho da Corda

Se colocarmos uma corda 1 metro acima da linha do equador em todos os seus pontos, aumentaremos o raio da terra em 1 metro, sendo assim a nova circunferência da Terra (e a altura da nova corda) será dada por $2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$

Sendo assim temos que a diferença entre o tamanho das cordas será de $2\pi r$ + 2π - $2\pi r$ = 2π = $2.(3,14)$ = $6,28$m.

■

Resolução (|| Questão: 2.R.21 || Relator: $\mathbf{x}_{15}$ || Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ||)

21) Prove that $a + \frac{a.p}{100} - \frac{(a+\frac{a.p}{100}).p}{100} = a.\left[1 - (\frac{p}{100})^2\right]$

$a + \frac{a.p}{100} - \frac{(a+\frac{a.p}{100}).p}{100} = \frac{100a}{100} + \frac{ap}{100} - \frac{ap+\frac{ap^2}{100}}{100} = \frac{100^2 a}{100^2} + \frac{100ap}{100^2} - \frac{100ap}{100^2} - \frac{ap^2}{100^2} = a\left[1 - \frac{p^2}{100^2}\right] = a\left[1 - (\frac{p}{100})^2\right]$

b) An item initially costs \$2000 and then its price is increased by 5%. Afterwards the price is lowered by 5%. What is the final price?

$2000.(1,05)(0,95) = 1995$

c) An item initially costs **a** dollars and then its price is increased by **p%**. Afterwards the (new) price is lowered by **p%**. What is the final price of the item? (After considering this exercise, look at the expression in part (a).)

$a.(1 + \frac{p}{100}).(1 - \frac{p}{100}) = a.\left[1 - (\frac{p}{100})^2\right]$

d)What is the result if one first lowers a price by **p%** and then increases it by **p%**?

$a.(1 - \frac{p}{100}).(1 + \frac{p}{100}) = a.\left[1 - (\frac{p}{100})^2\right]$

Portanto, se refere a mesma equação do item (a).

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.22 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖))

(a) If $a > b$, is it necessarily true that $a^2 > b^2$?

Não. Note que $-1 > -10$, e que $(-1)^2 < (-10)^2$ uma vez que isso resulta em $1 < 100$.

(b) Show that if $a + b > 0$ then $a > b$ implies $a^2 > b^2$.

Supondo $a + b > 0$ e $a > b$. Queremos mostrar que $a^2 > b^2$.

Então fazemos $a > b \leftrightarrow a - b > 0$

Logo, $(a + b)(a - b) > 0$

$a^2 - b^2 > 0$

$a^2 - b^2 + b^2 > b^2$

$a^2 > b^2$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.23 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖) a) Se $a > b$, use exemplos numéricos para checar se $1/a > 1/b$ ou $1/a < 1/b$.

Tomando $a = 4$ e $b = 2$ temos: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Tomando $a = -2$ e $b = -4$ temos: $\frac{-1}{2} < \frac{-1}{4}, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

b)Prove que se $a > b$ e $ab > 0$, então $1/b > 1/a$.

$a > b \wedge ab > 0 \rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Givens	Goals
$a > b$	$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$
$ab > 0$	

Dividindo o primeiro "given" por ab temos: $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$

Podemos efetuar a divisão $\frac{a}{a}$ e $\frac{b}{b}$, pois como $ab > 0$ sabemos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Prova: Supondo $a > b$ e $ab > 0$, dividimos ambos os termos da primeira desigualdade por ab : $a/ab > b/ab$, o que resulta em $1/b > 1/a$. ■

Resolução (‖ Questão: 2.R.24 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{04}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖) Prove that, for all real numbers a and b:

a) $|ab| = |a||b|$

Deseja-se provar que $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}(|ab| = |a||b|)$.

Suponha $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, dividindo em sete casos:

Caso 1: $a > 0$ e $b > 0$ $|a||b| = ab = |ab|$

Caso 2: $a > 0$ e $b < 0$ $|a||b| = a(-b) = |ab|$

Caso 3: $a < 0$ e $b > 0$ $|a||b| = (-a)b = |ab|$

Caso 4: $a < 0$ e $b < 0$ $|a||b| = (-a)(-b) = |ab|$

Caso 5: $a = 0$ e $b = 0$ $|a||b| = 0 = |ab|$

Caso 6: $a = 0$ e $b \neq 0$ $|a||b| = 0 = |ab|$

Caso 7: $a \neq 0$ e $b = 0$ $|a||b| = 0 = |ab|$

Do que se conclui que $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}(|ab| = |a||b|)$

b) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Deseja-se provar que $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}(|a + b| \leq |a| + |b|)$

Pode-se provar que $\forall k \in \mathbb{R}(-|k| \leq k \leq |k|)$ Supondo $k \in \mathbb{R}$ Dividindo em casos:

Caso 1: $k < 0$ tem-se $|k| = -k > k$ e $-|k| = --k = k$

Caso 2: $k = 0$ tem-se $|k| = |0| = 0 = k$ e $-|k| = -|0| = 0 = k$

Caso 3 $k > 0$ tem-se $|k| = k$ e $-|k| = -k < k$

Dessa forma, utiliza-se a instanciação universal para os valores de $k = a$ e $k = b$.

Supondo $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, a soma $a + b$ pode, então, ser majorada por $|a| + |b|$ e minorada por $-|a| - |b|$ resultando em: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$ que é o mesmo de $|a + b| \leq |a| + |b|$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.25 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Utilizando a dica do enunciado dividi-se o triângulo em três menores que têm como "origem" o mesmo ponto P no interior do triângulo equilátero, dessa forma é possível calcular a área do triângulo maior somando as áreas dos menores, assim:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{bh_1}{2} + \frac{bh_2}{2} + \frac{bh_3}{2} \tag{4}$$

$$\rightarrow A = \frac{b}{2} \cdot (h_1 + h_2 + h_3) \tag{5}$$

$$\rightarrow \frac{2A}{b} = h_1 + h_2 + h_3 \tag{6}$$

Demonstrando que a soma das alturas depende da área do triângulo maior e do lado. ■

Resolução (‖ Questão: 2.R.26 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

(a) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{40+15+8+5}{120} = \frac{68}{120} = \frac{17}{30}$

(b) $\sum_{j=5}^{9} (2j - 8)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4 + 16 + 36 + 64 + 100 = 220$

(c) $\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k+1} = \sum_{k=1}^{5}(1 - \frac{2}{k+1}) = 5 - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} - \frac{2}{6} = \frac{300-60-40-30-24-20}{60} = \frac{126}{60} = \frac{21}{10}$

(d) $\sum_{n=2}^{5}(n-1)^2(n+2) = 1^2.4 + 2^2.5 + 3^2.6 + 4^2.7 = 4 + 20 + 54 + 112 = 190$

(e) $\sum_{k=1}^{5}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(f) $\sum_{i=-2}^{3}(i+3)^i = 1^{-2} + 2^{-1} + 3^0 + 4^1 + 5^2 + 6^3 = 1 + \frac{1}{2} + 1 + 4 + 25 + 216 = 247,5$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.27 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖)

Express the following sums in summation notation:

(a) $3 + 5 + 7 + 9 + ... + 201 = \sum_{n=1}^{100}(2n+1)$

(b) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{97}{96} = \sum_{n=1}^{96}(\frac{n+1}{n})$

(c) $4.6 + 5.7 + 6.8 + 7.9 + ... + 38.40 = \sum_{n=4}^{38} n.(n+2)$

(d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^i}$

(e) $1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + ... + \frac{x^{32}}{33} = \sum_{n=0}^{16} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

(f) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{80} + \frac{1}{81} = \sum_{n=1}^{81}(-1)^n(-\frac{1}{n})$

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.28 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{06}$ ‖)

Quais das igualdades estão sempre corretas e quais estão eventualmente erradas?

a)Correta

b)Errada, a não ser que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ seja zero

c)Correta

d)Errada

■

Resolução (‖ Questão: 2.R.29 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖)

A questão pede para encontrar as expressões das somas:

(a) $3 + 5 + 7...197 + 199 + 201$

A soma indicada parece ser a de todos os ímpares menos o um, o que pode ser representado por: $\sum_{i=1}^{100}(2i+1)$

O resultado para essa expressão pode ser conseguido por:

$2 \cdot \sum_{i=1}^{100}(i) + \sum_{i=1}^{100} 1$

$2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101) + 100 = 10200$

(b) $1001 + 2002 + 3003...8008 + 9009 + 10010$

A soma indicada progride em 1001 unidades por 10 vezes, o que pode ser representado por: $\sum_{i=1}^{10} 1001 \cdot i$

O resultado para essa expressão será:

$1001 * \sum_{i=1}^{10} i$

$1001 * (\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11) = 55055$

■