Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 2.11.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{04}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖)

(a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} i3^j = \sum_{i=1}^{3}[i3^1 + i3^2 + i3^3 + i3^4] = \sum_{i=1}^{3}[3i + 9i + 27i + 81i] =$
$\sum_{i=1}^{3}[120i] = 120 \cdot 1 + 120 \cdot 2 + 120 \cdot 3 = 720$

(b) $\sum_{s=0}^{2}\sum_{r=2}^{4}(\frac{rs}{r+s})^2 = \sum_{s=0}^{2}(\frac{2s}{2+s})^2 + (\frac{3s}{3+s})^2 + (\frac{4s}{4+s})^2 =$
$(\frac{2}{3})^2 + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{4}{6})^2 + (\frac{6}{5})^2 + (\frac{8}{6})^2 =$
$\frac{4}{9} + \frac{9}{16} + \frac{16}{25} + \frac{4}{9} + \frac{36}{25} + \frac{16}{9} =$
$\frac{24}{5} + \frac{9}{16} + \frac{52}{25} = \frac{19113}{3600} = \frac{6371}{1200}$

■

Resolução (‖ Questão: 2.11.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖)

a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ = Número total de bens i

b) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ = Número total de bens ganhos pela pessoa j

c) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ = O número total de unidades de bens pertencentes ao grupo como um todo

■

Resolução (‖ Questão: 2.11.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

3. Prove that the sum of all the numbers in the triangular table

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\
. & . & . & . & \\
. & . & . & . & \\
. & . & . & . & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm}
\end{array}$$

can be written as $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$ and also as $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} a_{ij}\right)$

$\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{i} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{1} a_{1j} + \sum_{j=1}^{2} a_{2j} + ... + \sum_{j=1}^{m} a_{mj} = (a_{11}) + (a_{21} + a_{22}) + ... + (a_{m1} + ... + a_{mm-1} + a_{mm})$

Tal dupla somatória revela a seguinte ideia: é o somatório das somas de todos os elementos da linha 1, com todos os elementos da linha 2, com todos os elementos da linha 3, prosseguindo até a linha m (última linha de uma determinada matriz triangular).

Nesse caso, usa-se a ideia de somar todos os itens da matriz através da soma dos elementos de todas as linhas.

$\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=j}^{m} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=2}^{m} a_{i2} + \sum_{i=3}^{m} a_{i3} + ... + \sum_{i=m}^{m} a_{im} = (a_{11} + a_{21} + a_{31} ... a_{m1}) + (a_{22} + a_{32} + a_{42} ... a_{m2}) + ... + (a_{mm})$

Tal dupla somatória revela a seguinte ideia: é o somatório das somas de todos os elementos da coluna 1, com todos os elementos da coluna 2, com todos os elementos da coluna 3, prosseguindo até a coluna m (última coluna de uma determinada matriz triangular). **Nesse caso, usa-se a ideia de somar todos os itens da matriz através da soma dos elementos de todas as colunas.**

$\therefore$ Trata-se da mesma soma já que são somados os mesmos elementos. Porém, diferenciam-se quanto a forma de somar os elementos, se é pela soma dos elementos de todas as linhas ou se seria pela soma de todos os elementos de todas as colunas, que seria a mesma coisa no final das contas.

■

Resolução (‖ Questão: 2.11.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Consider the $m \cdot n$ numbers a_{ij} in the rectangular array in (2.11.1). Denote the arithmetic mean of them all by $\overline{a}$ and the mean of all the numbers in the j-th column by $\overline{a_j}$, so that

$\overline{a} = \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs}$

and

$\overline{a_j} = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} a_{rj}$

(a) Prove that $\overline{a}$ is the mean of the column sums $\overline{a}_j (j = 1, ..., n)$ and that

(b) $\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (a_{rj} - \overline{a})(a_{sj} - \overline{a}) = m^2(\overline{a}_j - \overline{a})^2$

Resolução:

(a) $\overline{a} = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j$. De fato, note que: $\dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} \overline{a}_{rj} = \dfrac{1}{mn} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_{rj} = \overline{a}$.

(b) $\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (a_{rj} - \overline{a})(a_{sj} - \overline{a}) = m^2(\overline{a}_j - \overline{a})^2$

$\sum_{r=1}^{m} (a_{rj} - \overline{a}) \sum_{s=1}^{m} (a_{sj} - \overline{a}) = (\sum_{r=1}^{m} a_{rj} - \sum_{r=1}^{m} \overline{a})(\sum_{s=1}^{m} a_{sj} - \sum_{s=1}^{m} \overline{a})$ Note que $(\sum_{r=1}^{m} a_{rj} = m\overline{a}_j)$.

Então $(m\overline{a}_j - m\overline{a})(m\overline{a}_j - m\overline{a}) = m^2\overline{a}_j^2 - 2m^2\overline{a}_j\overline{a} + m^2\overline{a}^2 = m^2(\overline{a}_j - 2\overline{a}_j\overline{a} + \overline{a}^2) = m^2(\overline{a}_j - \overline{a})^2$

■