Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 2.9.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖)

1. Prove formulas (2.9.5) and (2.9.6), using the principle of mathematical induction seen in Section 1.4

Fórmula do exemplo 2.9.5 :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \text{ (I)}$$

Caso Base (ou seja, k=1):

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot ((2)(1)+1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

Etapa Indutiva: Suponha (I). Provaremos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1)^2$$
$$= (n+1) \cdot [\frac{1}{6} \cdot n \cdot (2n+1) + (n+1)]$$
$$= (n+1)[\frac{1}{6} \cdot (2n^2+n) + (n+1)]$$
$$= (n+1) \cdot \frac{n \cdot (2n+1)+6+6n}{6}$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2+n+6+6n)$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot [2n^2+7n+6]$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2+3n+4n+6)$$
$$= \frac{n+1}{6} \cdot (n+2) \cdot (2n+3)$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot ((n+1)+1)(2 \cdot (n+1)+1)$$

Fórmula do exemplo 2.9.6 :

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)]^2 \text{ (II)}$$

Caso Base (ou seja, n=1):

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)]^2 = (\frac{1}{2} \cdot 2)^2 = (1)^2 = 1$$

Etapa Indutiva: Suponha (II). Provaremos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = [\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)]^2 + (n+1)^3$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^2 \cdot (\frac{n^2}{4} + n + 1)$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^2 \cdot [\frac{n^2+4n+4}{4}]$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (n+2)^2$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = [\frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)]^2$$

■

Resolução (‖ Questão: 2.9.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + 2n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3(\dfrac{n(n+1)}{2}) + 2n \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3(\dfrac{n(n+1)}{2}) + 2n = \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 9n(n+1) + 12n}{6} = \dfrac{n[(n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 12]}{6} = \dfrac{n[(n+1)(2n+10) + 12]}{6} = \dfrac{n[(2n^2 + 10n + 2n + 10 + 12]}{6} = \dfrac{n[(n^2 + 5n + n + 5 + 6]}{3} = \dfrac{n^3 + 6n^2 + 11n}{3}$ ■

Resolução (‖ Questão: 2.9.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

Deseja-se provar que $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a + id = na + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Para isso, utiliza-se a fórmula (2.9.4) apresentada na seção 2.9 do livro Essential mathematics for economic analysis, de Carvajal e Hammond:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} \tag{1}$$

Também considera-se o resultado geral do somatório de uma constante:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{2}$$

Portanto, por (1) e (2), temos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} a + id = \sum_{i=0}^{n-1} a + \sum_{i=0}^{n-1} id = \sum_{i=0}^{0} a + \sum_{i=1}^{n-1} a + \sum_{i=0}^{0} id + \sum_{i=1}^{n-1} id = a + a(n-1) + 0d + d\sum_{i=1}^{n-1} i =$

$an + d\frac{n(n-1)}{2}$

Logo:

$\sum_{i=0}^{n-1} a + id = an + \frac{n(n-1)d}{2}$

■

Resolução (‖ Questão: 2.9.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

(a) Prove that $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) =$$
$$-a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + ... + a_n - a_n + a_{n+1} = -a_1 + a_{n+1} = a_{n+1} - a_1$$

(b) Use the result found in (a) to compute the following:

(i) $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$\text{Temos } a_n = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Uma vez que } \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \iff \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})) = a_1 - a_{n+1}, \text{ temos:}$$

$$\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = a_1 - a_{50+1} = 1 - \frac{1}{50+1} = \frac{51}{51} - \frac{1}{51} = \frac{51-1}{51} = \frac{50}{51}$$

(ii) $\sum_{k=1}^{12}(3^{k+1} - 3^k)$

Temos $a_n = 3^n$. Aplicando a igualdade do item (a) à igualdade do enunciado temos:

$$\sum_{k=1}^{12}(3^{k+1} - 3^k) = a_{12+1} - a_1 = 3^{12+1} - 3^1 = 3^{13} - 3$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n}(ar^{k+1} - ar^k)$

Temos $a_n = ar^n$. Portanto, temos:

$$\sum_{k=1}^{n}(ar^{k+1} - ar^k) = ar^{n+1} - ar^1 = a \cdot (r^{n+1} - r) = ar(r^n - 1)$$

■