Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

x_{04}: Beatriz Chessa	x_{11}: Luca Monaco
x_{05}: José Soares Jr.	x_{15}: Rodrigo Melendez
x_{06}: Maurício Damião	x_{18}: Matheus Cardoso
x_{08}: Pedro Lopes Silva	x_{20}: Gustavo Zequini
x_{09}: Rafael Maddalena	

Resolução (‖ Questão: 1.R.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{15}$ ‖))

Let $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 3\}$, and $D = \{1, 5\}$. Find:

(a) $A \cap B = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4, 6\} = \{1, 4\}$;

(b) $A \cup B = \{1, 3, 4\} \cup \{1, 4, 6\} = \{1, 3, 4, 6\}$;

(c) $A \setminus B = \{1, 3, 4\} \setminus \{1, 4, 6\} = \{3\}$;

(d) $B \setminus A = \{1, 4, 6\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{6\}$;

(e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (\{1, 3, 4\} \cup \{1, 4, 6\}) \setminus (\{1, 3, 4\} \cap \{1, 4, 6\}) = \{1, 3, 4, 6\} \setminus \{1, 4\} = \{3, 6\}$;

(f) $A \cup B \cup C \cup D = \{1, 3, 4\} \cup \{1, 4, 6\} \cup \{2, 4, 3\} \cup \{1, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(g) $A \cap B \cap C = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4, 6\} \cap \{2, 4, 3\} = \{4\}$;

(h) $A \cap B \cap C \cap D = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4, 6\} \cap \{2, 4, 3\} \cap \{1, 5\} = \varnothing$.

■

Resolução (‖ Questão: 1.R.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{18}$ ‖)

Considere o conjunto universal $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 11\}$, e defina $A = \{1, 4, 6\}$ e $B = \{2, 11\}$. Encontre:

a) $A \cap B = \varnothing$

b) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 11\}$

c) $\Omega \setminus B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

d) $A^c = \Omega \setminus A = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

■

Resolução (‖ Questão: 1.R.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{20}$ ‖)

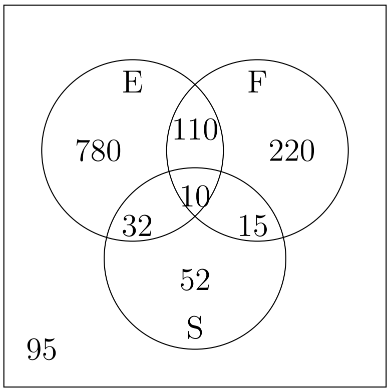
3. A liberal arts college has one thousand students. The numbers studying various languages are: English 780; French 220; and Spanish 52. These figures include 110 who study English and French, 32 who study

English and Spanish, 15 who study French and Spanish. Finally, all these figures include ten students taking all three languages.

a) How many study English and French, but not Spanish?

b) How many study English, but not French?

c) How many study no languages?



(1)

a) Sendo 10 o número de estudantes que estudam as três línguas, então o número de estudantes que estudam inglês e francês apenas é igual a $110 - 10 = 100$;

b) Para saber o número de estudantes que estudam inglês, mas não francês basta subtrair 100 de 780, assim o valor desejado será de 670;

c) O número de estudantes que não estudam nenhuma das línguas será quivalente ao total de estudantes menos os estudantes que estudam ao menos uma das línguas, assim:

$$\text{Apenas os que estudam inglês}$$
$$780 - [(110 - 10) + (32 - 10) + 10] = 648$$
$$\text{Apenas os que estudam francês}$$
$$+220 - [(110 - 10) + (15 - 10) + 10] = 105$$
$$\text{Apenas os que estudam espanhol}$$
$$+52 - [(32 - 10) + (15 - 10) + 10] = 15$$

Então ao se descobrir o número de estudantes que estudam apenas uma língua (768), adiciona-se a este valor o total de estudantes que estudam apenas duas ou mais línguas, assim :

$$22 + 10 + 5 + 100 + 768 = 905 \tag{2}$$

Portanto, os que não estudam nenhuma língua equivalem a $1.000 - 905 = 95$ estudantes ■

Resolução (‖ Questão: 1.R.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{15}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{04}$ ‖)

Let x and y be real numbers. Consider the following implications and decide in each case: (i) if the implication is true; and (ii) if the converse implication is true.

(a) $(x = 5 \text{ and } y = -2) \Rightarrow x + y = -2$

i) True, as $5 - 2 = 3$

ii)False, because x and y have an infinite possibilities of real numbers so that $x + y = -2$ holds true.

(b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

i)False, it would be true if $x^2 = 16 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ or } x = -4)$

ii)True, because $4^2 = 16$

(c) $(x-3)^2(y+2) > 0 \Rightarrow y > -2$

i)True, as $(x-3)^2$ is always positive for $x \in \mathbb{R}$, than $(x-3)^2(y+2) > 0 \Leftrightarrow (y+2 > 0) \Leftrightarrow y > -2$

ii)True, as we saw in item i)

(d) $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

i)True, because $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

ii)True as we saw in item i)

■

Resolução ($\|$ Questão: 1.R.5 $\|$ Relator: $\mathbf{x}_{18}$ $\|$ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ $\|$)

Let the symbol $\geq$ denote the relation "at least as great as". Prove that, for all x:

a) $(1+x)^2 \geq 1 + 2x$;

Deseja-se provar que $\forall X \in \mathbb{R}(1+x)^2 \geq 1 + 2x)$.

Suponha $x \in \mathbb{R}$. Divide-se a prova em 3 casos:

Caso 1: $x < 0$, nota-se que $xx > 0 \Rightarrow x^2 + 2x > 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 > 2x + 1 \Rightarrow (1+x)^2 > 1 + 2x$

Caso 2: $x = 0$, nota-se que $(1+x)^2 = (1+0)^2 = 1 = 1 + 2.0 = 1 + 2x$

Caso 3: $x > 0$, nota-se que $xx > 0 \Rightarrow x^2 + 2x > 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 > 2x + 1 \Rightarrow (1+x)^2 > 1 + 2x$

Do que se conclui que $\forall X \in \mathbb{R}((1+x)^2 \geq 1 + 2x)$

b) if $x \geq -3$, then $(1+x)^3 \geq 1 + 3x$;

Deseja-se provar que $\forall X \in \mathbb{R}((1+x)^3 \geq 1 + 3x)$ Percebe-se que $(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ e que, para $x \geq -3$, tem-se $x^3 + 3x^2 = x^2(x+3) > 0$ pois:

x	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
	-3	0	

Dessa forma, para $x \geq -3$, tem-se $\forall X \in \mathbb{R}((1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq 3x + 1)$.

c) for all natural numbers n, if x is greater than or equal to -1, then $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Deseja-se provar que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}(x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx)$.

Pode-se realizar a prova por indução em n.

Suponha que $n \in \mathbb{N}$,$x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -1$.

Para o caso base, $n = 1$, nota-se $(1+x)^n = (1+x)^1 = 1 + x$

Suponha agora a hipótese indutiva $x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$. Percebe-se que: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+x)(1+(n+1)x)$, devido a hipótese indutiva.

Agora prova-se que $x \geq -1 \Rightarrow (1+x)(1+(n+1)x) \geq 1 + (n+1)x$ o que pode ser feito utilizando de $x \geq -1$ tal que $x + 1 \geq 0$.

Dessa forma vale $x \geq -1 \Rightarrow (1+x)(1+(n+1)x) \geq 1 + (n+1)x \Rightarrow (1+x)^n(1+x) \geq 1 + (n+1)x$.

Conlui-se que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}(x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx)$.

■