# Relatório de Resoluções

O código de cada membro pode ser consultado a seguir:

| | |
|---|---|
| $x_{04}$: Beatriz Chessa | $x_{11}$: Luca Monaco |
| $x_{05}$: José Soares Jr. | $x_{15}$: Rodrigo Melendez |
| $x_{06}$: Maurício Damião | $x_{18}$: Matheus Cardoso |
| $x_{08}$: Pedro Lopes Silva | $x_{20}$: Gustavo Zequini |
| $x_{09}$: Rafael Maddalena | |

**Resolução ( ‖ Questão: 1.4.1 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{20}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ )** Prove by induction that for all natural numbers $n$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

Seja $n = 2$:

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2}.2(a_1 + a_2)$$

Para $n = k$, assuma:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{1}{2}.k.(a_1 + a_k)$$

Seja $n = k + 1$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = [\frac{k}{2}(a^1 + a_k)] + a_{k+1} =$$
$$= \frac{k.a_1}{2} + \frac{k.a_k}{2} + \frac{2(a_{k+1})}{2}$$
$$= \frac{k.a_1 + k.a_k + 2.a_{k+1}}{2} = \frac{k.a_1 + k.a_k + a_{k+1} + a_{k+1}}{2} \ (1)$$

Como a soma dos naturais é a soma de uma progressão aritmética de razão 1, sendo a razão representada por $k$, podemos escrever $a_k$ e $a_{k+1}$ da seguinte forma:
$a_k = a_{k+1} - d$
$a_{k+1} = a_1 + k.d$
Substituindo em (1), temos:

$$\frac{k.a_1 + k.(a_{k+1} - d) + a_{k+1} + (a_1 + k.d)}{2} =$$
$$\frac{k.a_1 + k.a_{k+1} - k.d + a_{k+1} + a_1 + k.d}{2} =$$
$$\frac{k.a_1 + k.a_{k+1} + a_{k+1} + a_1}{2} = \frac{k(a_1 + a_{k+1}) + 1(a_1 + a_{k+1})}{2} =$$
$$= \frac{k+1}{2} \cdot (a_1 + a_{k+1}) = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot (a_1 + a_{k+1})$$

■

**Resolução ( ‖ Questão: 1.4.2 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{04}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{08}$ ‖ )**

Caso Base: Para $n = 1$, tem-se: $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{n+1}$

Passo indutivo: Suponha $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Então, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)}$ ■

**Resolução ( ‖ Questão: 1.4.3 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{05}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{09}$ ‖ )**

Para $n = 1 \Longrightarrow n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 36$ o qual é divisível por 9.

Pela hipótese indutiva para $n = k \Longrightarrow k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9x$ sendo $x$ um número natural.

Agora para $n = k + 1$ e considerando $(k+1)^3 + (k+2)^3 = -k^3 + 9n$ temos que:

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = -k^3 + 9x + (k+3)^3 = 9x + 9k^2 + 27k + 27 = 9(x + k^2 + 3k + 3)$

$\therefore$ É divisível por 9, o qual confirma a hipótese indutiva para $n = k + 1$ ■

**Resolução ( ‖ Questão: 1.4.4 ‖ Relator: $\mathbf{x}_{06}$ ‖ Revisor: $\mathbf{x}_{11}$ ‖ )**

4. Let A(n) be the statement:
*Any collection of n people in the room all have the same income*
Find what is wrong with the following ”induction argument”:
*$A(1)$ is obviously true. Suppose A(k) is true for some natural number k. We will then prove that $A(k+1)$ is true. So take any collection of $k+1$ people in one room and send of of them outside. The remaining k people all have the same income by the induction hypothesis. Bring the person back inside and send another outside instead. Again the remaining people will have the same income. But then all the $k+1$ people will have the same income. By induction, this proves that all n people have the same income.*

**R:** Se o argumento por indução é verdade ao analisar n pessoas, então deve ser verdade quando verificar-se a situação com apenas duas pessoas, A e B, nessa sala - portanto, com $k = 1$. Começa-se retirando da sala a pessoa A e será analisdada a renda da pessoa B - obviamente, a renda dela será igual a dela mesma, já que só há ela na sala. Posteriormente, retirar-se-á a pessoa B da sala e será mantida a pessoa A - ao analisar a sua renda, será igual à renda das pessoas que há na sala, ou seja, dela mesma. Porém, não há como afirmarmos que a renda delas será igual, já que em nenhum momento permaneceram na sala simultaneamente. Tal problema não ocorre quando $k = 2$ (3 pessoas na sala), já que as pessoas farão ”par” com todas as outras na sala - situação essa que nos será permitido afirmar que todas teriam a mesma renda.

Portanto, tal argumento por indução é válido somente se $k > 1$

■