Introdução às Medidas em Física
4300152
4ª Aula

Experiência II
Densidade de Sólidos

Objetivos

- Medidas indiretas
  - Medida da densidade de sólidos
- Noções de Estatística
  - Propagação de Incertezas
  - Compatibilidade entre medidas

Incertezas instrumentais

Em geral é a metade da menor divisão

Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex:paquímetro)

incerteza é a menor divisão do mesmo

Dificuldade de leitura

Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)

Incertezas estatísticas

Flutuação no resultado das medidas

medida = média de todas as medidas efetuadas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

incerteza estatística = desvio padrão da média

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}} \qquad s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Qual é a incerteza de uma medida?

Várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua

$\sigma_{L_{instr}} = 0,5\ mm$ $\sigma_{L_{estat}}$

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma^2_{L_{instr}} + \sigma^2_{L_{estat}}}$$

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

Período do pêndulo medido com o relogio de pulso
Incerteza instrumental > estatística

Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s
Incerteza estatística > instrumental

Medida da Densidade de Sólidos

Objetivo

Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

Identificação

Comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

Densidade (materiais sólidos homogêneos)

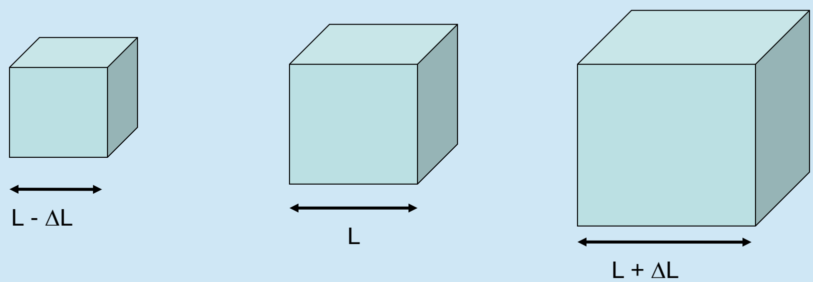
d = m/V

Necessário medir a massa e o volume do objeto

Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

O volume do cubo tem uma incerteza?

A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se propaga para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).



Cálculo da densidade

A densidade é dada por:

$$d = {}^{m}\!/_{V}$$

onde, o volume *V* é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

e *m*, *h* e *D* são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro.

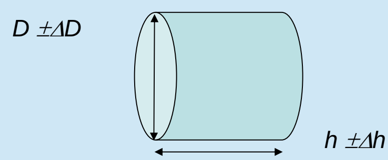
Propagação de incerteza

E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?

O volume de um cilindro é dado por:

$V = \pi (D/2)^2 h$

onde, *D* é o diâmetro do cilindro e *h* a sua altura.



Propagação de incerteza

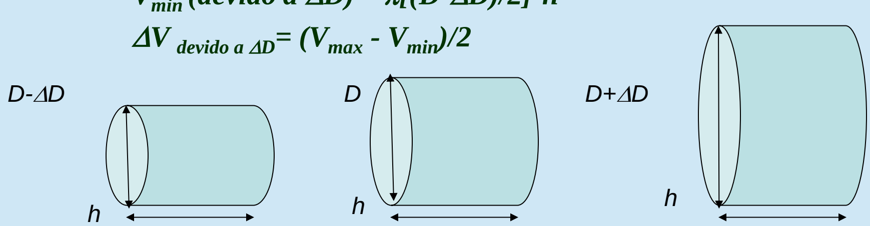
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

V_{max} *(devido a* ΔD*)* $= \pi[(D+\Delta D)/2)]^2 h$

V_{min} *(devido a* ΔD*)* $= \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$

$\Delta V_{devido\ a\ \Delta D} = (V_{max} - V_{min})/2$



Propagação de incerteza

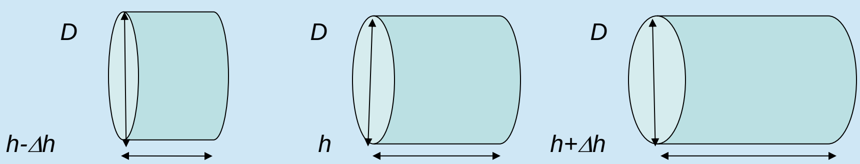
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

V_{max} *(devido a Δh)* $= \pi(D/2)^2(h+\Delta h)$

V_{min} *(devido a Δh)* $= \pi(D/2)^2(h-\Delta h)$

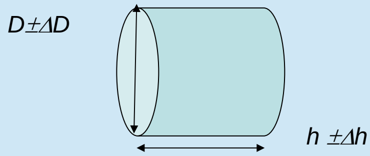
$\Delta V_{\text{devido a } \Delta h} = (V_{max} - V_{min})/2$



Propagação de incerteza

E combinamos as duas incertezas com uma soma quadrática. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$



$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2}$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D)-V(D-s_D)}{2}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f\left(x+\Delta x/2\right)-f\left(x-\Delta x/2\right)}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x'\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x')-f(x-\Delta x')}{2\cdot\Delta x'}\right)$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro

Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x'\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x')-f(x-\Delta x')}{2\cdot\Delta x'}\right)$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D)-V(D-s_D)}{2}\right]\cdot\frac{s_D}{s_D}$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D)-V(D-s_D)}{2\cdot s_D}\right]\cdot s_D \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D}\cdot s_D$$

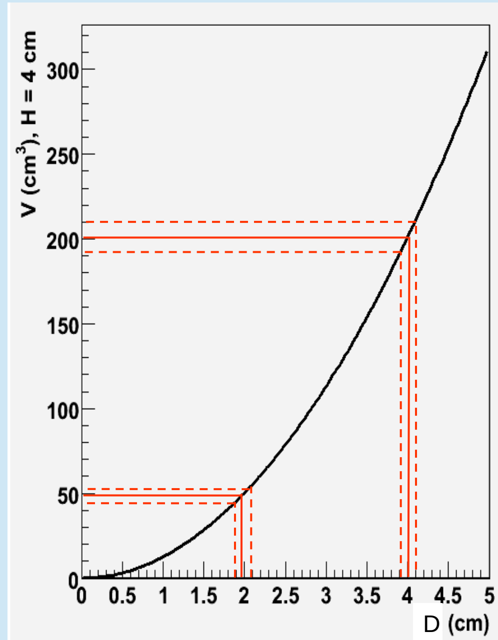
Propagação de incertezas

Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

Esta fórmula é razoável?

$$s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$



Cálculo da incerteza do volume do cilindro

$$s_V^h = \left[\frac{V(h+s_h)-V(h-s_h)}{2 \cdot s_h}\right] \cdot s_h \Rightarrow s_V^h = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot s_h$$

Portanto:

$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2}$$

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \cdot s_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot s_h^2}$$

Como calcular as derivadas

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{\pi}{4}D^2H\right)=\frac{\pi}{4}H\frac{\partial(D^2)}{\partial D}=\frac{\pi}{4}H(2D)=\frac{\pi}{2}DH$$

$$\frac{\partial V}{\partial H}=\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\pi}{4}D^2H\right)=\frac{\pi}{4}D^2\frac{\partial(H)}{\partial H}=\frac{\pi}{4}D^2(1)=\frac{\pi}{4}D^2$$

Desse modo...

Incerteza do volume do cilindro

$$\sigma_V=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\sigma_D\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial H}\sigma_H\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}DH\sigma_D\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}D^2\sigma_H\right)^2}=\frac{\pi}{4}D^2H\sqrt{\left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2+\left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_V}{V}=\sqrt{\left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2+\left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2}$$

Cálculo da incerteza da densidade

Analogamente ao cálculo da incerteza do volume

$$s_d = \sqrt{\left(s_d^m\right)^2 + \left(s_d^V\right)^2}$$

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \cdot s_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial V}\right)^2 \cdot s_V^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial V} = m\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{m}{V^2} \quad ; \quad \frac{\partial d}{\partial m} = \frac{1}{V}\frac{\partial m}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{1}{V}s_m\right)^2 + \left(-\frac{m}{V_2}s_v\right)^2} \Rightarrow \frac{s_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2}$$

Cálculo direto

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h} \qquad s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}s_m\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial D}s_D\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial h}s_h\right)^2}$$

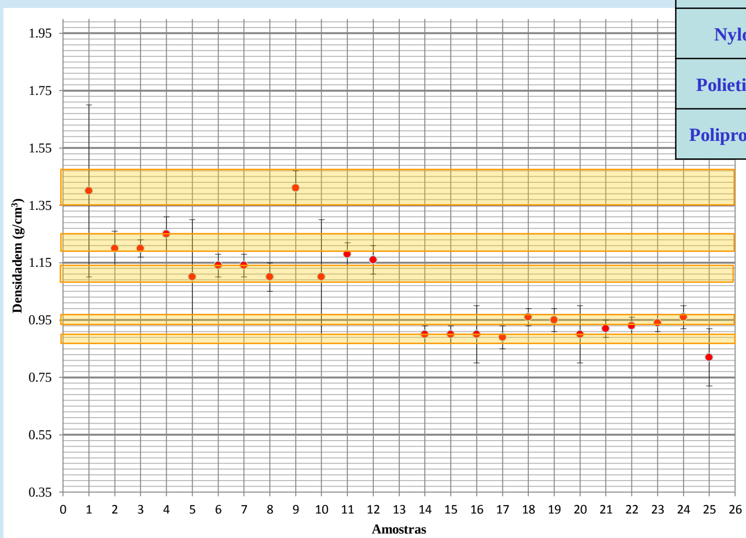
$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h}\frac{\partial m}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

$$\frac{\partial d}{\partial D} = \frac{4m}{\pi h}\frac{\partial\left(D^{-2}\right)}{\partial D} = \frac{4m}{\pi h}\frac{(-2)}{D^3} \qquad \frac{s_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{s_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{h}\right)^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial h} = \frac{4m}{\pi D^2}\frac{\partial\left(h^{-1}\right)}{\partial h} = \frac{4m}{\pi D^2}\frac{(-1)}{h^2}$$

Dados primeira aula

material	d(g/cm^3)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropilen	0,900 a 0,915



Conclusões Parciais

Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?

Como seria possível saber isso?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades

Procedimento Experimental:

Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros

Cada aluno da dupla fará novamente a medida da massa, mas desta vez usando uma balança analítica

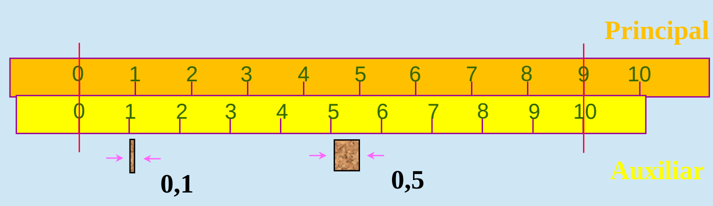
Cada aluno fará novamente as medidas para cálculo do volume, porém usando um paquímetro e micrometro

- **CUIDADO!!! Agora as medidas podem diferir, portanto fazer várias medidas de cada grandeza (8 no mínimo).**

Paquímetro

Nônio ou Vernier

Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida



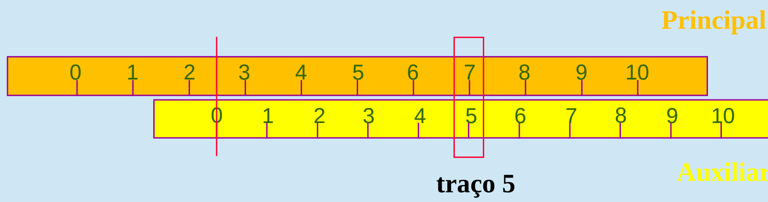
10 div escala auxiliar = 9 div escala principal

Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão Principal}}{\text{Número de divisões auxiliar}} = \frac{1\ \text{div}}{10} = 0{,}1\ \text{div}$$

Leitura com nônio

1) Posição zero do nônio
2) Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal



5 x precisão do nônio = 5 x 0,1 = 0,5

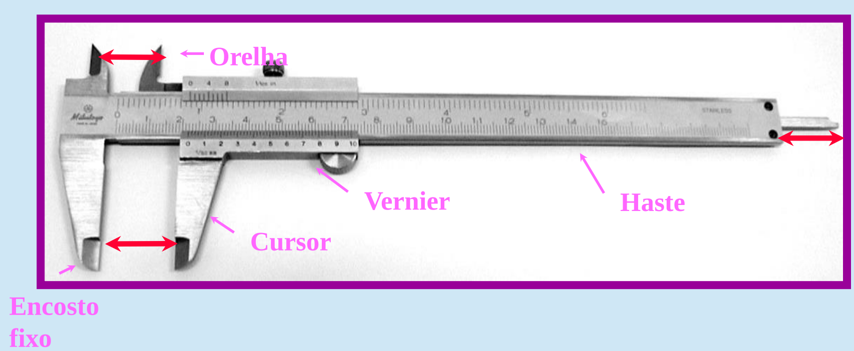
Medida = (2, 5 +/- 0,1) div

Paquímetro

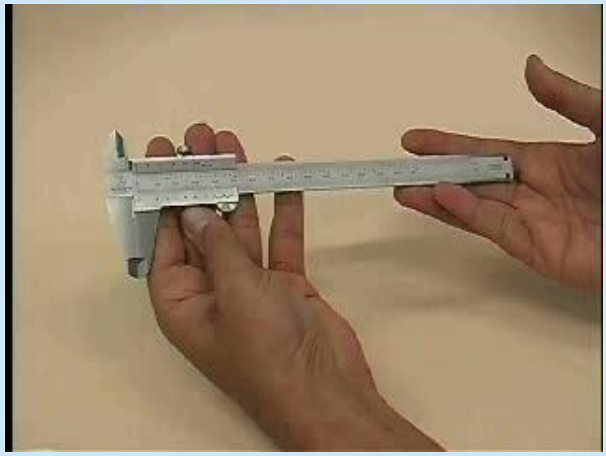
Instrumento para medir comprimento

Escala auxiliar (nônio ou vernier)

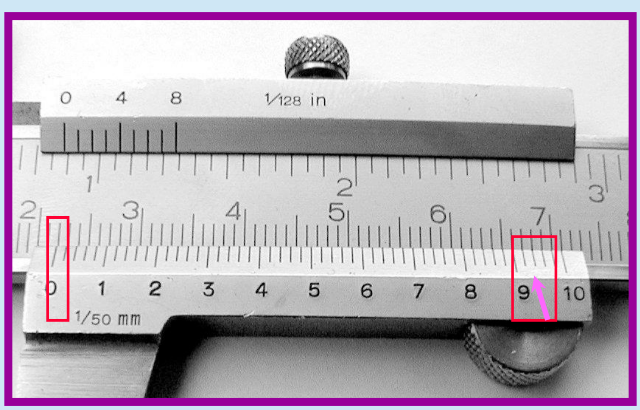
Precisão de centésimos de mm



Usando o paquímetro



Leitura com paquímetro



Resolução: 1/50 mm = 0,02 mm

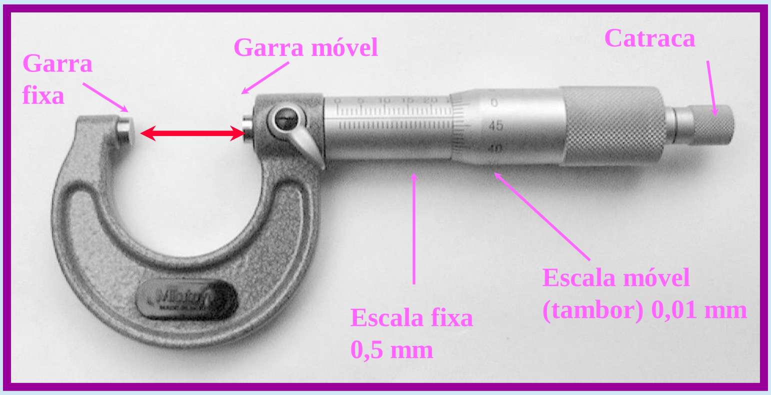
47 traços x precisão 0,02 mm = 0,94 mm

Leitura = (21, 94 +/- 0,02) mm

Micrômetro

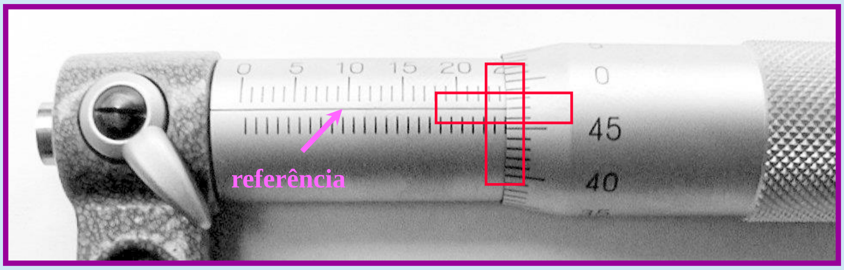
Instrumento para medir comprimento

Precisão de microns



Usando o micrometro

Leitura com micrometro



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm) 24,0 mm

Resolução: 0,5/50 mm = 0,01 mm

2) Posição da escala fixa (referência)

46,9 traços x (0,5 mm / 50 traços) = 46,9 x 0,01 mm = 0,469 mm

Leitura = (24,469 ± 0,005) mm

Análise dos dados

Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas

Comparar as medidas de toda classe novamente. Quantos tipos de plástico podem ser identificados desta vez? Que medida permitiu se obter esse resultado?