Fundamentos de Processamento Gráfico

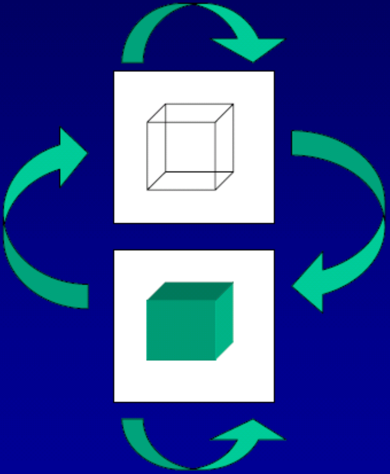
Helton H. Bíscaro ; Fátima Nunes

30 de agosto de 2019

Áreas Correlatas

Modelagem Geométrica

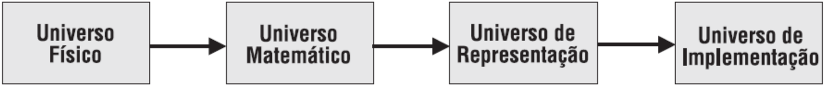
Visão Computacional



Computação Gráfica

Processamento de Imagens

Paradigma dos Quatro Universos

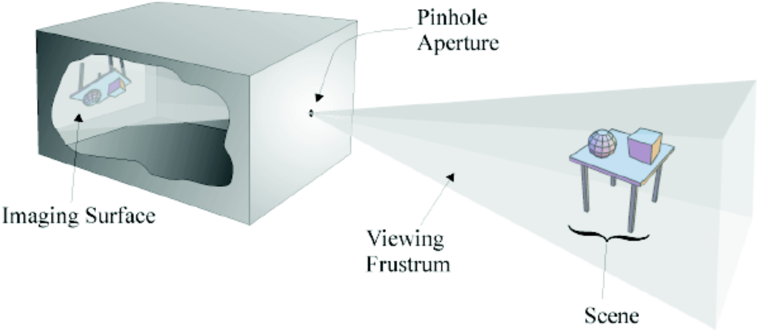


Paradigma dos Quatro Universos

- **Físico:** Contém objetos do mundo real que pretendemos estudar;
- **Matemático:** Contém uma descrição abstrata dos objetos do universo físico;
- **Representação:** Contém representações simbólicas e finitas associadas aos objetos do universo matemático ;
- **Implementação:** Contém particularidades da linguagem de programação escolhida para a implementação do problema.

Síntese de imagem

Modelo clássico de câmera de furo



Geometria

Do grego : **Geo** - “terra ”+ **metria** - “medida ”.
“Ramo da matemática preocupado com questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços... ”.

Geometria

Euclides:

- Considerado o pai da geometria.
- Grego, viveu em 300 AC, e acredita-se que esteve ativo em Alexandria (Egito) durante o reinado de Ptolomeu (323-283 AC).
- **Os Elementos** é o livro mais bem sucedido da história da Matemática.
  - É um tratado geométrico escrito em 13 volumes.
  - Compreende uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções), e provas matemáticas das proposições.
  - O 13° livro cobre a geometria Euclideana e uma versão Grega antiga e elementar da teoria dos números.

Geometria
Os Elementos

- Impresso pela primeira vez em Veneza em 1482.
  - Foi um dos primeiros trabalhos sobre matemática a ser impresso após a invenção da imprensa, perdendo apenas para a bíblia, quanto ao número de edições (mais de 1.000).
- Foi usado como texto básico de geometria no mundo Ocidental por cerca de 2.000 anos.

Geometria

- Representação eficiente de objetos (coordenadas);
- Transformações necessárias à manipulação dos mesmos;
    - Operações de Posicionamento;
    - Operações de modelagem;
    - Operações de Visualização.

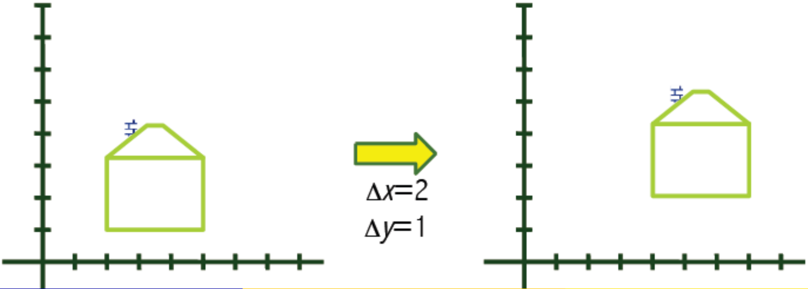
Geometria

- **Operações de Posicionamento:** As transformações Euclidianas são operações básicas de posicionamento e movimento de objetos geométricos num cenário 2D ou 3D;
- **Operações de Modelagem:**
  - As transformações afins são operações básicas de modelagem de objetos geométricos num cenário 2D ou 3D;
  - Permitem a definição de um objeto no seu próprio sistema de coordenadas locais (modeling coordinates)
  - Permite usar a definição de um objeto várias vezes numa cena com um sistema de coordenadas globais (world coordinates)
- **Operações de Visualização:** Permitem montar um cenário que envolve o observador, o plano de projeção e a cena (os vários objetos da cena)

Geometria Euclidiana
Operações de Posicionamento

Translação 2D

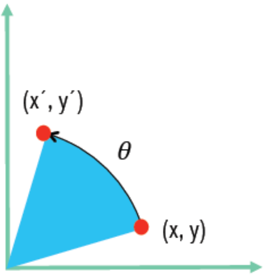
$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y \end{cases}$$



Geometria Euclidiana
Operações de Posicionamento

Rotação 2D

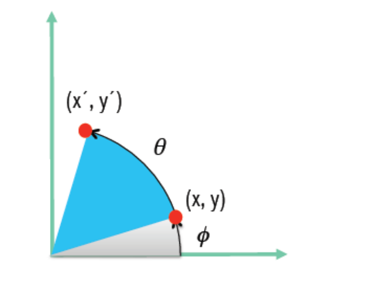
$$\begin{cases} x\prime = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y\prime = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$



Geometria Euclidiana

Operações de Posicionamento

Coordenadas Polares



Justificativa - exercício

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\prime = r\cos(\phi+\theta) \\ y\prime = r\sin(\phi+\theta) \end{cases}$$

Geometria Euclidiana

Operações de Posicionamento

Rotação 2D Na Forma Matricial

$$\left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right.$$

OBS: É possível fazer k rotações através do produto de k matrizes

Geometria Afim

Operações de Modelagem

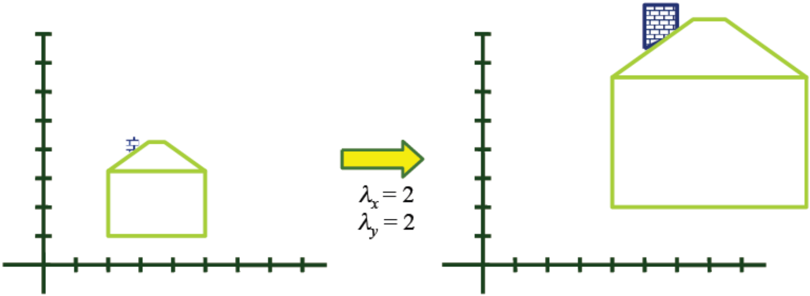
Rotações, translações + **variação de tamanho** (Scaling) e **cisalhamento** (shearing)

- Invariante Fundamental : **paralelismo**
- Outros Invariantes:
  - razão de distâncias entre quaisquer 3 pontos pertencentes à uma reta
  - colinearidade
- Exemplos
  - É possível transformar uma quadrado em um retângulo
  - uma circunferência pode ser transformada numa elipse

Geometria Afim
Operações de Modelagem

Variação de Tamanho 2D (Scaling)

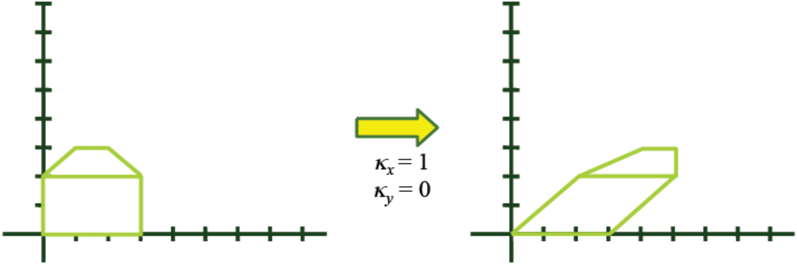
$$\begin{cases} x' = \lambda_x x \\ y' = \lambda_y y \end{cases}$$



Geometria Afim
Operações de Modelagem

Cisalhamento 2D (Shearing)

$$\begin{cases} x' = x + k_x x \\ y' = y + k_y y \end{cases}$$

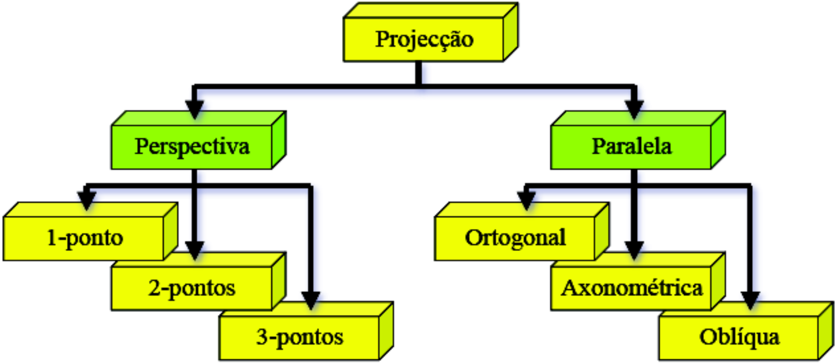


Projeções

Transformações de visualização via de regra não preservam paralelismo

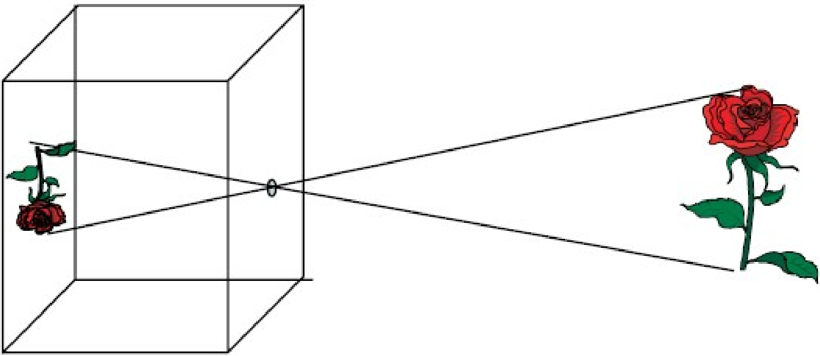
Projeções

Tipos de projeções



Exemplo

Câmera Digital



Modelo de Câmera de furo com projeção perspectiva.

Geometrias não Euclidianas
O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Geometrias não Euclidianas
O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Geometrias não Euclidianas
O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Geometrias não Euclidianas
O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Geometrias não Euclidianas
O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Geometrias não Euclidianas

O quinto postulado

"Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela..."

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- Pergunta: pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclideanas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

Projeção Perspectiva

- Do latim **perspicere**, ou “ver através”, é uma representação aproximada de uma imagem, como percebida pelo olho, sobre uma superfície plana.
- Objetos são desenhados menores a medida que a distância aumenta.
- As dimensões de um objeto ao longo da linha de visão são relativamente menores que as dimensões perpendiculares à linha de visão.

Projeção Perspectiva
Histórico

- Na idade Média, arte era para ser lida como um grupo de símbolos, ao invés de ser vista como uma figura coerente.
  - O único método de retratar distâncias era por sobreposição de personagens.
- Sobreposição é um método ruim para retratar arquitetura.
- Pinturas medievais de cidades são um amontoado de linhas em todas as direções.

Exemplo

Ausência de perspectiva

Ilustração de “A Batlha - Crusader Bible - 1240”

Projeção Perspectiva
Histórico

- Em 1415, Filippo Brunelleschi demonstrou o método geométrico da perspectiva, usado atualmente pelos artistas, pintando esboços de vários prédios Florentinos sobre um espelho
- Logo após, quase todo artista em Florença usava perspectiva geométrica nas suas pinturas, notadamente Donatello, que começou a esculpir pisos quadriculados elaborados.

Exemplo

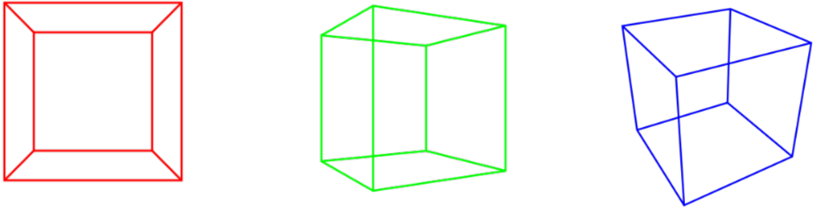
Anunciação, de Botticelli (1489-1490)

Exemplo

Afresco da Capela Cistina (1481-1482)

Exemplo

Perspectivas com 1, 2 e 3 pontos de fuga...



Moral da História...

- Transformações Lineares preservam paralelismo.
- Transformação perspectiva **NÃO** é linear
- Visão humana funciona com uma câmera.
- Câmera virtual precisa de um modelo de geometria distinto da Euclideana.

Geometria Projetiva

O espaço projetivo real de dimensão n, RP^n é o conjunto de todas as retas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem, excluindo a origem.
Um ponto projetivo $p \in RP^n$ é uma classe de equivalência.

$$p = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \lambda x_{n+1}), \lambda \neq 0$$

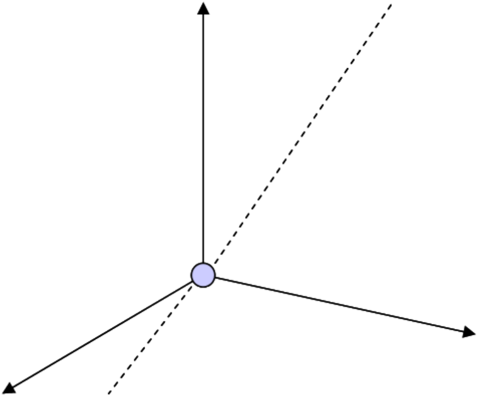
Ou Seja:

$$p = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \equiv \lambda p$$

Geometria Projetiva

Associa-se o espaço RP^n com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$

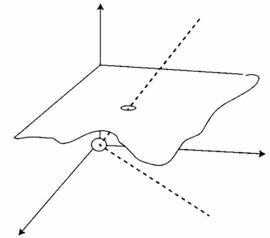
$$RP^n \leftarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{(0,0,\ldots,0)\}$$



Geometria Projetiva

O espaço projetivo pode ser decomposto em dois conjuntos: o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ onde $x_{n+1} = 1$ e o hiperplano em que $x_{n+1} = 0$. Em outras palavras:

$$RP^n = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), x_{n+1} \neq 0\} \cup \{(x_1, \ldots, x_n, 0)\}$$



Geometria Projetiva

- Pontos Afins:

$$p_a = (x_1, \ldots, x_n, 1), x_{n+1} \neq 0, \lambda = \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{(Coordenadas Homogêneas)}$$

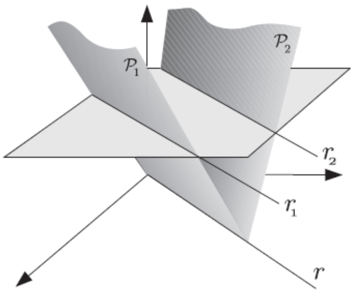
- Pontos do Infinito , ou Pontos Ideais

$$p_i = (x_1, \ldots, x_n, 0), x_{n+1} = 0, \lambda = 1$$

OBS: Uma reta no plano projetivo RP^2 é o conjunto dos pontos $[x; y; z]$ que satisfazem a uma equação linear $ax + by + cz = 0$

Geometria Projetiva

Paralelismo no Espaço Projetivo



Transformações Projetivas em RP^3

Uma Transformação Projetiva em RP^3 é uma Transformação Linear em $\mathbb{R}^4$

$$T : \mathbb{R}^4 :\longrightarrow T : \mathbb{R}^4$$

T pode ser representada por uma matriz $M_{4\times 4}$ e pode ser avaliada como $T(p) = Mp$.

Anatomia de uma Transformação Projetiva

Podemos dividir a Matriz M em quatro blocos distintos:

$$M = \begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

- A- Bloco Linear 3×3;
- T- Bloco de Translação 3×1;
- P- Bloco de Perspectiva 1×3;
- S- Bloco de Escala 1×1;

Anatomia de uma Transformação Projetiva

Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta_x \\ y + \Delta_y \\ z + \Delta_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Anatomia de uma Transformação Projetiva

Matriz de Transformação Linear

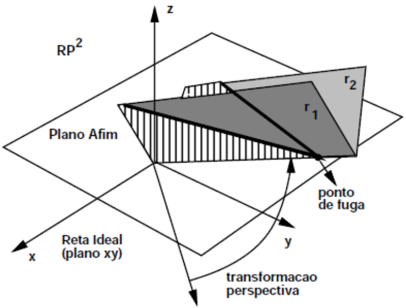
$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \\ 1 \end{bmatrix}$$

Anatomia de uma Transformação Projetiva

Matriz de Transformação Perspectiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px + qy + rz + 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo



Efeito da transformação perspectiva

Anatomia de uma Transformação Projetiva

Matriz de Escala

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}$$

Rotações em RP^3

Rotação em torno do eixo z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotações em RP^3

Exemplos de Aplicações

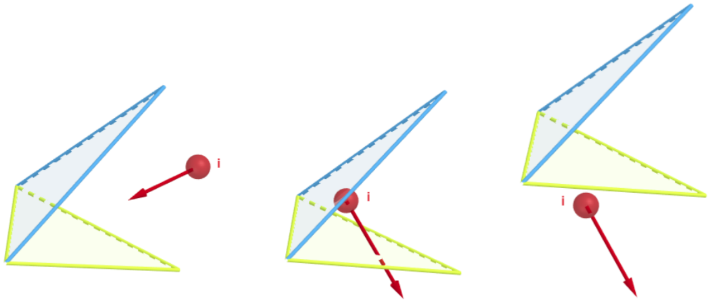


Figura: Detecção de colisões

Rotações em RP^3
Exemplos de Aplicações

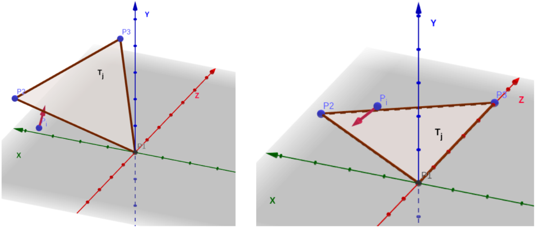
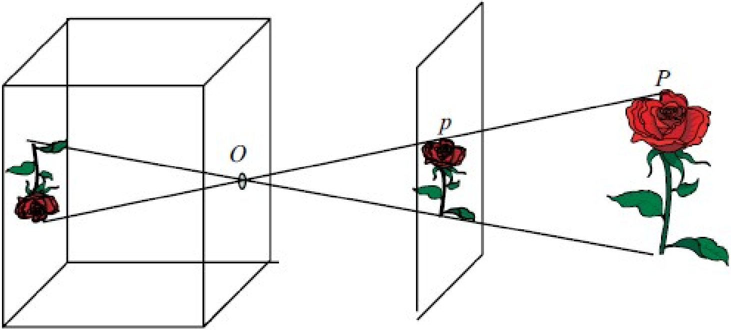


Figura: Quando o triângulo é colocado no plano XZ, o teste se reduz à uma comparação de coordenadas - Ver animações

Modelo de Câmera Virtual
Um ponto de fuga

Câmera Digital



Modelo de Câmera de furo com projeção perspectiva.

Modelo de Câmera Virtual

Dados:

- Um centro ótico O.
- um plano de projeção π a uma distância f de O.
- Um sistema de coordenadas cuja origem esteja em O e que tenha os eixos perpendiculares a π.

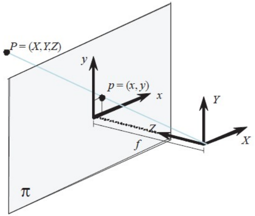


Figura: Determinação da projeção perspectiva

Modelo de Câmera Virtual

Neste sistema, se $P = (X, Y, Z)$:

- A reta passando por P é $\alpha(X, Y, Z)$.
- O ponto que está em π tem última coordenada f, logo: .
- $\alpha = \frac{f}{Z}$, $x = \frac{fX}{Z}$, $y = \frac{fY}{Z}$.

OBS: Esta operação não está definida para os pontos tais que $Z = 0$.

Modelo de Câmera Virtual

Exemplo: retas paralelas ao eixo $Z \longrightarrow \{(X_0, Y_0, Z)/Z \in \mathbb{R}\}$

- A projeção de um ponto genérico (X_0, Y_0, Z_0) dessas retas é dado por $(\frac{fX_0}{Z_0}, \frac{fY_0}{Z_0})$.
- A projeção para o ponto $(X_0, Y_0, 0)$ não está definida .
- O conjunto de todos esses pontos formam uma reta que passa por $(0, 0)$, com esse ponto excluído.
- O ponto $(0, 0, 0)$ pode ser visto como "ponto no infinito".

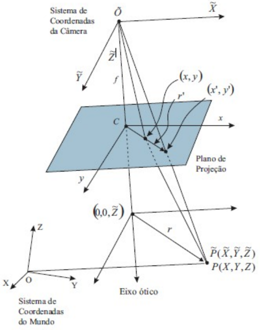
Transformações de Câmera

Sistemas de Coordenadas

1. Sistemas de Coordenadas do Mundo (SCM)
2. Sistemas de Coordenadas de Câmera (SCC)
3. Sistemas de Coordenadas de Imagem (SCI)
4. Sistemas de coordenadas de Pixel (SCP)

Transformações de Câmera

Sistemas de coordenadas



Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial.

Dados (X, Y, Z) no SCM, devemos expressar essas coordenadas no SCC.
Seja T o vetor que fornece a origem O do mundo no SCC.
Seja R a matriz cujas colunas r_1, r_2 e r_3 são as coordenadas dos vetores i, j e k dos eixos do SCM com relação a base $\tilde{i}, \tilde{j}$ e $\tilde{k}$ dos eixos do SCC.

Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial.

$(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = T + Xr_1 + Yr_2 + Zr_3$; ou

$\tilde{P} = RP + T$;

Ou ainda em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} \\ \widetilde{Z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial (**forma de Rodriguez**).

$w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ representa a direção do eixo de rotação e o ângulo de em torno

deste eixo (através de sua norma)

matriz de rotação R associada a w é dada por:

$$R = \cos(\theta) I + \frac{sen(\theta)}{\theta}[w]_x + \frac{(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} ww^t \qquad (1)$$

Onde $\theta = \|w\|$ e $[w]_x = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$.

Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial .

Outras formas de se obter a matriz R:

1. Ângulos de Euler: ou seja dos ângulos sucessivos de rotação em torno dos eixos.
2. Quaternions: generalização de números complexos para $\mathbb{R}^3$

Transformações de Câmera

Do SCC ao SCI, Projeção Perspectiva.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essa Transformação não é inversível.

Transformações de Câmera

Do SCI ao SCP, Registro no Sensor.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- s_x e s_y representam o número de pixels por unidade de comprimento, nas direções horizontal;
- u_c e v_c fornecem a posição, em pixels, da projeção ortogonal C da origem sobre o plano de projeção; na maior parte das câmeras, C está no centro da imagem e os valores de u_c e v_c são idealmente iguais à metade das dimensões da imagem;
- τ é a tangente do ângulo que as colunas de pixels formam com a perpendicular às linhas; (Idealmente 0)

Transformações de Câmera

Compondo as Transformações.

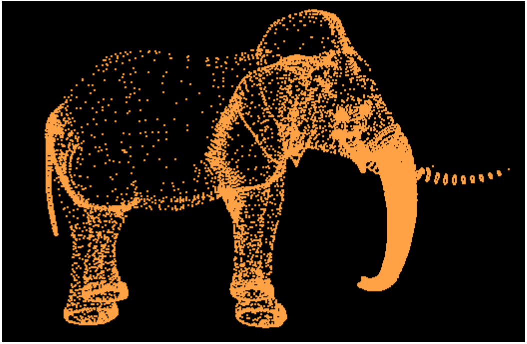
$$[p] \approx \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P];$$

ou ainda

$$[p] \approx \begin{bmatrix} fs_x & f\tau & u_c \\ 0 & fs_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} [P]$$

Exemplo - OpenGL

Tecnologia - OpenGL



Transformações de Câmera

Exercícios.

1. Encontre os ângulos e as rotações necessárias para colocar um triângulo arbitrário $T = (p_1, p_2, p_3)$ em $\mathbb{R}^2$ de modo que uma de suas arestas coincida co o eixo y.
2. Repita o exercício anterior, para um triângulo arbitrário $T = (p_1, p_2, p_3)$ em $\mathbb{R}^3$, mas agora o coloque no plano XZ e com uma de suas arestas sobre o eixo Z.

Casa : Modificar o exemplo do Opengl para fazer rotações ao longo dos três eixos à escolha do usuário;

FIM