

SEM0501

Dinâmica Aplicada às Máquinas

Aula #7 — Cinemática de corpo rígido
em 2D: Movimentos de translação e
rotação

Prof. Dr. Thiago Boaventura

tboaventura@usp.br

São Carlos, 21/08/19



Cronograma atualizado

Cinemática de um ponto material em 2D (Cap. 12)	#1	29/07/2019	Apresentação e introdução
	–	31/07/2019	Não haverá aula
	#2	05/08/2019	Movimento retilíneo: movimento contínuo e irregular
	#3	07/08/2019	Movimento curvilíneo geral e componentes cartesianos
	#4	12/08/2019	Movimento curvilíneo: componentes normal, tangencial, e cilíndricos
	#5	14/08/2019	Movimento relativo: cabos, roldanas, sistemas em translação
Cinemática de um corpo rígido em 2D (Cap. 16)	#6	19/08/2019	PJ1 - Elaboração de exercício sobre cinemática de ponto material
	#7	21/08/2019	Movimentos de translação e rotação
	–	26/08/2019	Não haverá aula – Semana da Produção
	–	28/08/2019	Não haverá aula – Semana da Produção
	–	02/09/2019	Não haverá aula – Feriado – Semana da Pátria
	–	04/09/2019	Não haverá aula – Feriado – Semana da Pátria
	#8	09/09/2019	Velocidade e aceleração relativas, centro instantâneo de velocidade nula, referenciais em translação
	#9	11/09/2019	Movimento relativo de sistemas articulados
	#10	16/09/2019	PJ2 - Cinemática de corpo rígido
Prova	#11	18/09/2019	P1

Cronograma atualizado

Eq. do movimento em
2D (Cap. 13 e 17)

#12

23/09/2019

Leis de Newton, equação de movimento em coordenadas Cartesianas e tangente/normal (ponto material)

#13

25/09/2019

Equações de movimento coordenadas polares/cilíndricas (ponto material), Momento de Inércia

#14

30/09/2019

Equações de movimento: translação (corpo rígido)

#15

02/10/2019

Equações de movimento: rotação (corpo rígido)

#16

07/10/2019

PJ3 - Equação de movimento

Trabalho e energia em
2D (Cap. 14 e 18)

#17

09/10/2019

Princípio do trabalho e energia (ponto material)

#18

14/10/2019

Forças conservativas, conservação da energia (ponto material)

#19

16/10/2019

Princípio do trabalho e energia, conservação da energia (corpo rígido)

#20

21/10/2019

PJ4 - Trabalho e energia

Cronograma atualizado

Impulso e quantidade de movimento em 2D (Cap. 15 e 19)	#21	23/10/2019	Princípio do impulso e quantidade de movimento (ponto material)
	-	28/10/2019	Não haverá aula - Feriado
	#22	30/10/2019	Conservação da quantidade de movimento, colisão (ponto material)
	-	04/11/2019	Não haverá aula - Feriado
	#23	06/11/2019	Quantidade de movimento e momento angular (ponto material)
	#24	11/11/2019	Princípio do impulso e quantidade de movimento linear e angular para corpos rígidos
	#25	13/11/2019	PJ5 - Impulso e quantidade de movimento
Revisão geral	#26	18/11/2019	Cinemática e cinética
Prova	#27	20/11/2019	P2
	#28	25/11/2019	Correção P2 em sala de aula
Janta da consagração	-	30/11/2019	Jantar por conta do professor - cardápio a ser definido.
Prova de recuperação	-	Março/2020	PRec

Corpo rígido

Definição?

corpo cuja **forma não varia** quando submetido

à ação de **forças externas**

Laboratório de Mecânica Avançada

Corpo rígido



modelo
idealizado!

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

distância entre diferentes
partículas permanece **invariável**

Corpo rígido?



Corpo rígido



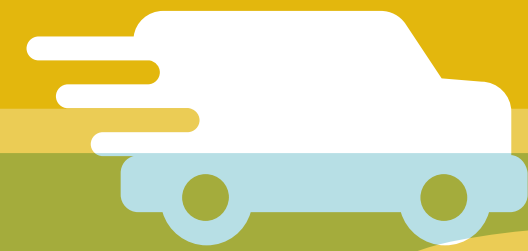
Corpo rígido



Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Conteúdo



- Tipos de movimentos
- Translação

Introdução



- Em torno de um eixo fixo
- Movimento de um ponto P
- Exemplo

Rotação



- “Take-home messages”

Conclusão

Conteúdo

- Tipos de movimentos

- Translação

Rotação

Introdução

Conclusão

ARCC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Cliff jumping

Introdução

Rotação

Conclusão



Lab

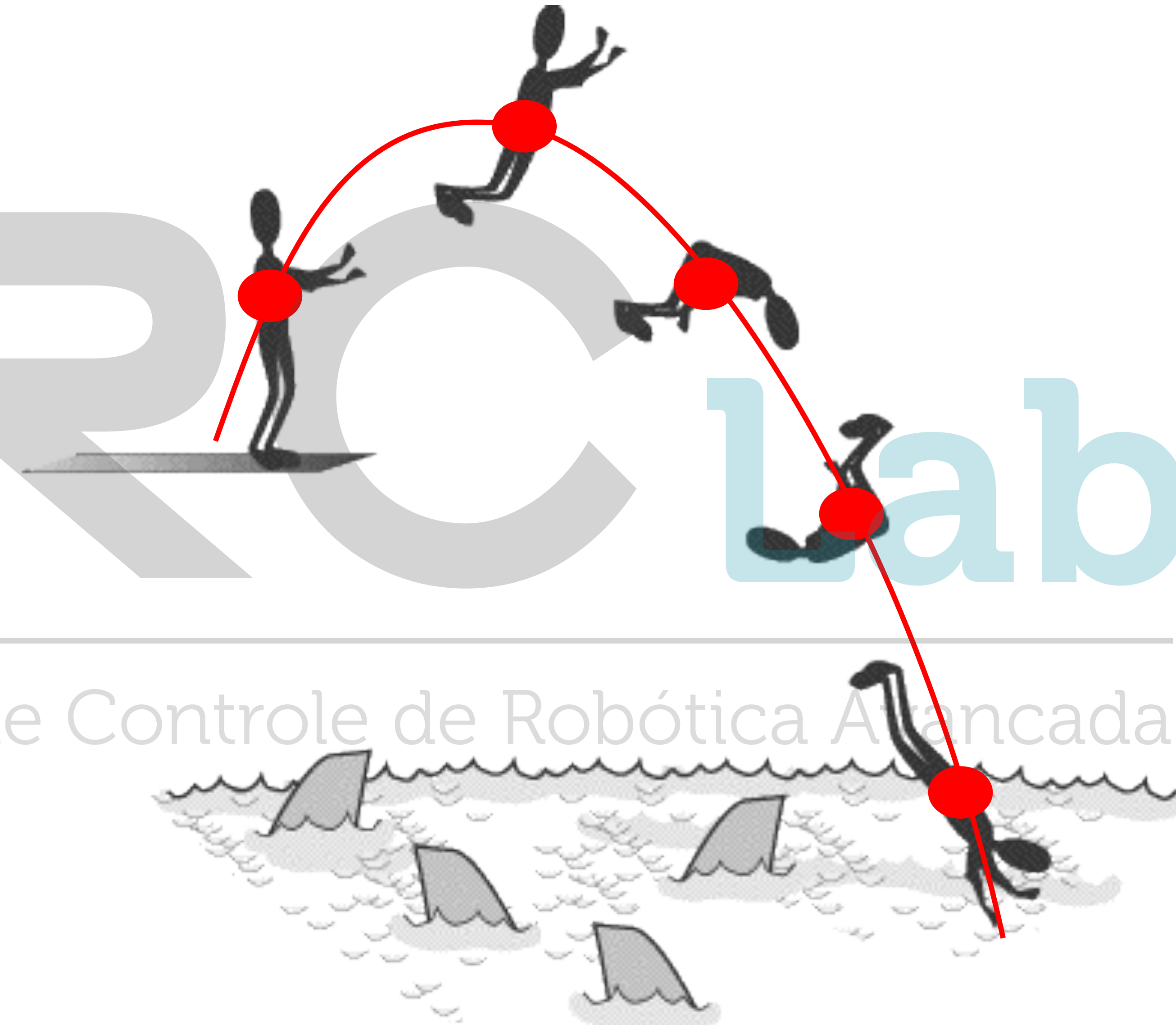
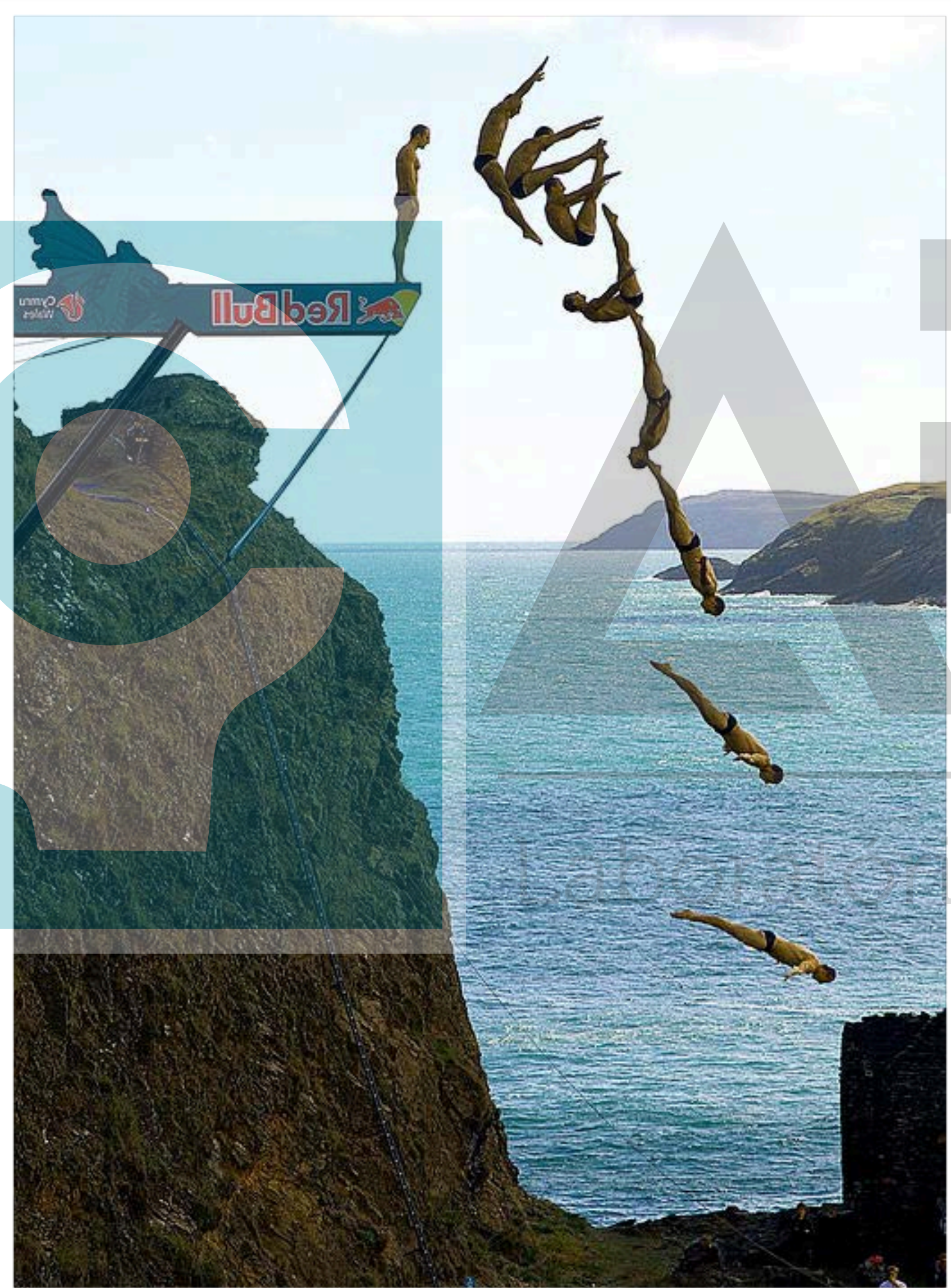
Avançada

Cliff jumping

Introdução

Rotação

Conclusão



o de Controle de Robótica Avançada

Tipos de movimento

Introdução

Rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

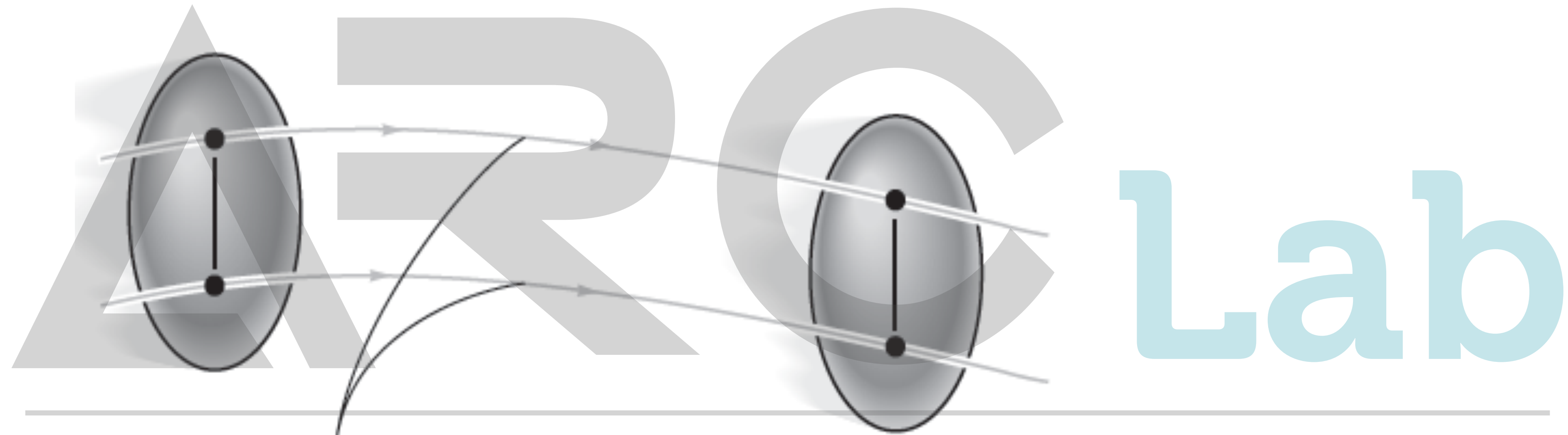
1. Translação retilínea

Tipos de movimento

Introdução

Rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avancada

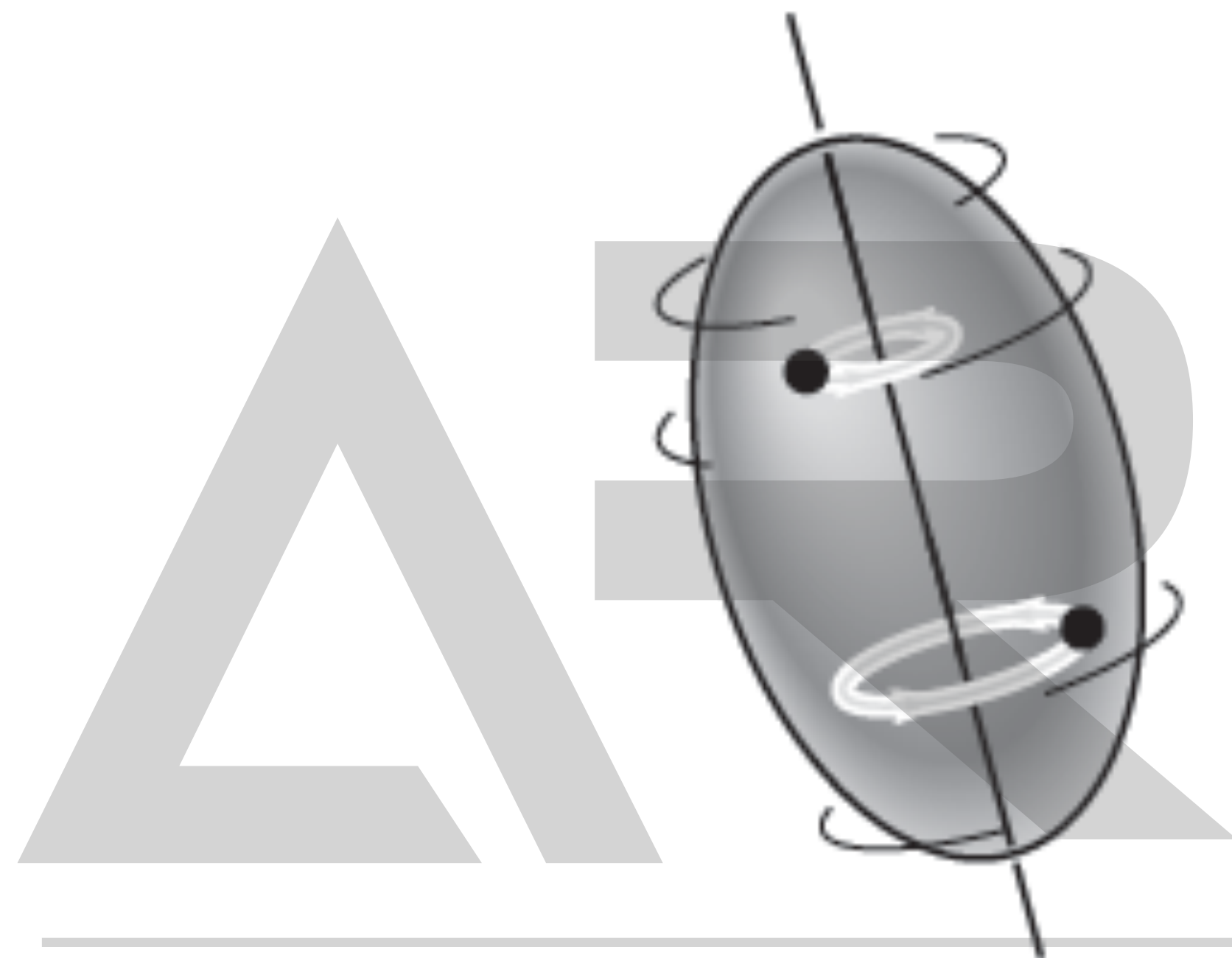
2. Translação curvilínea

Tipos de movimento

Introdução

Rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avancada

3. Rotação em torno de um eixo

Tipos de movimento

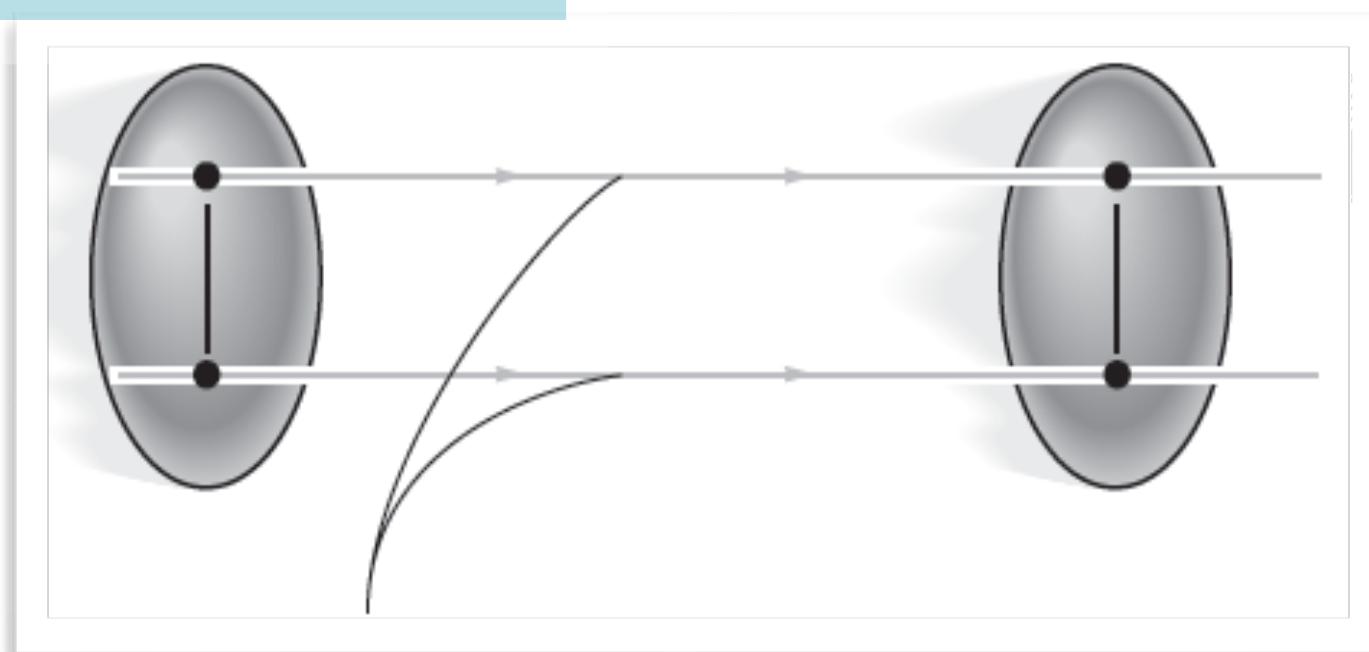
Introdução

Rotação

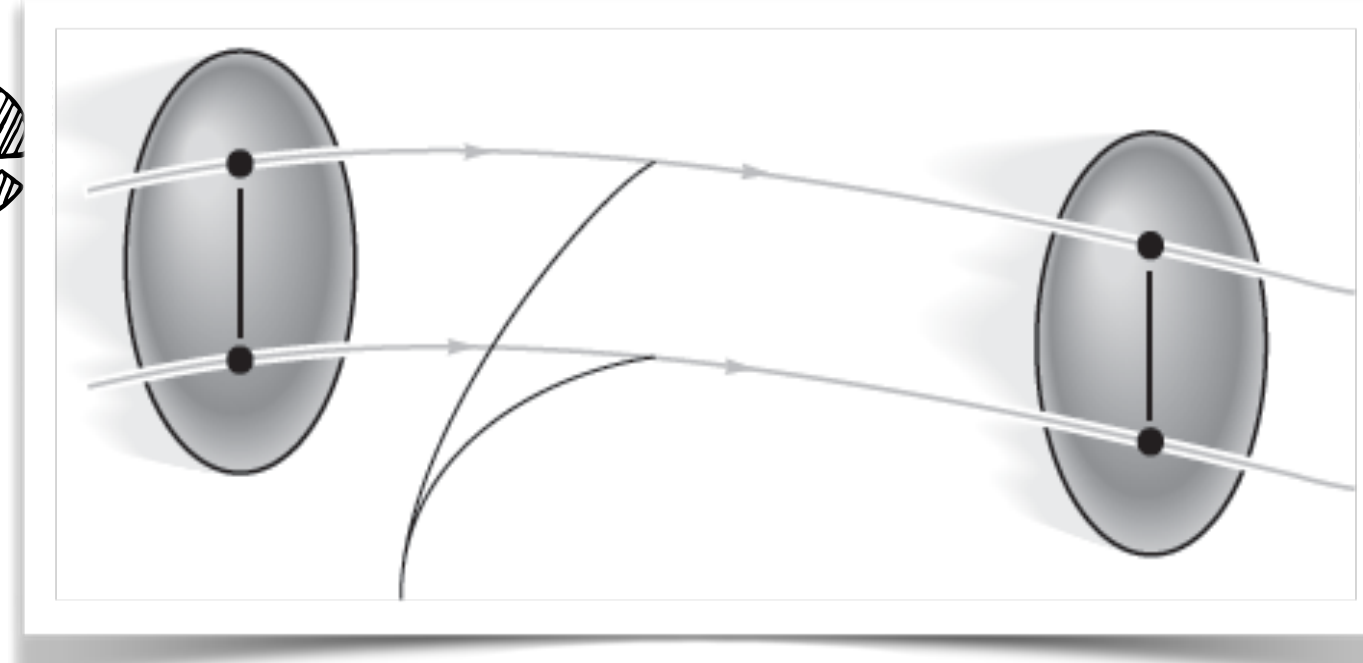
Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada



ne



ero

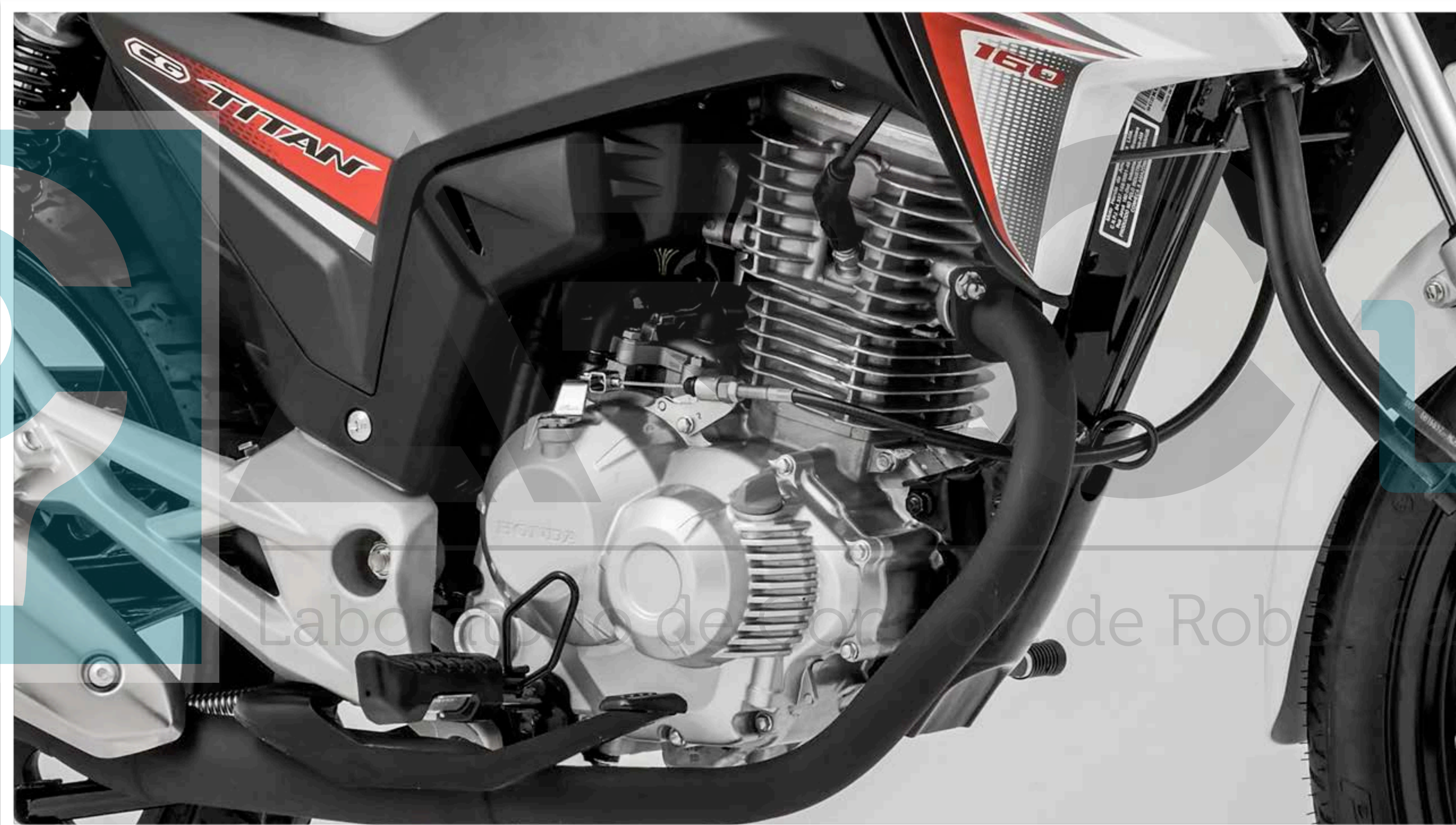


Tipos de movimento

Introdução

Rotação

Conclusão



Lab

Laboratório de Robótica Avançada

Conteúdo

- Tipos de movimentos
- **Translação**

Introdução

Rotação

Conclusão

ARRO Lab

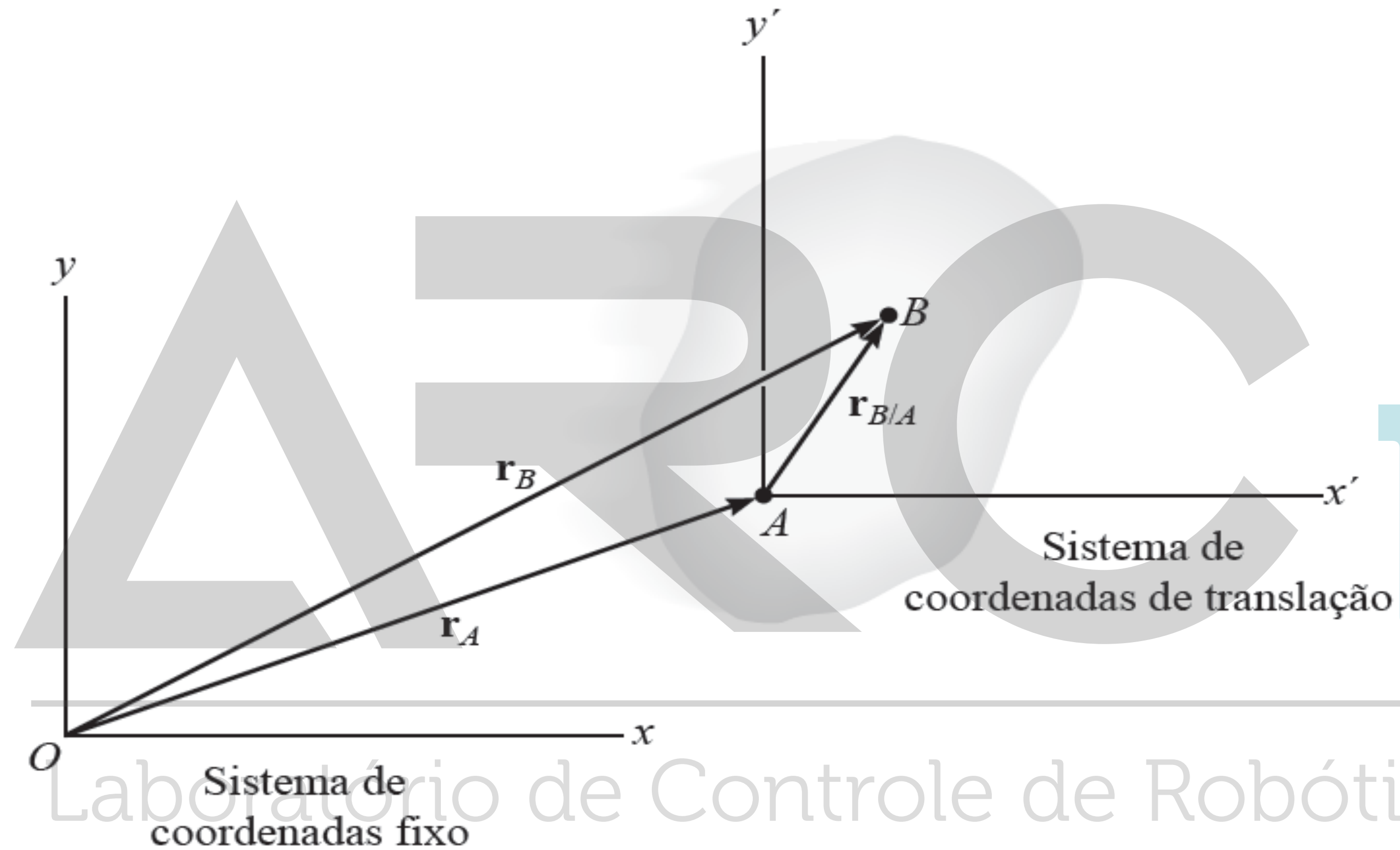
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Translação

Introdução

Rotação

Conclusão



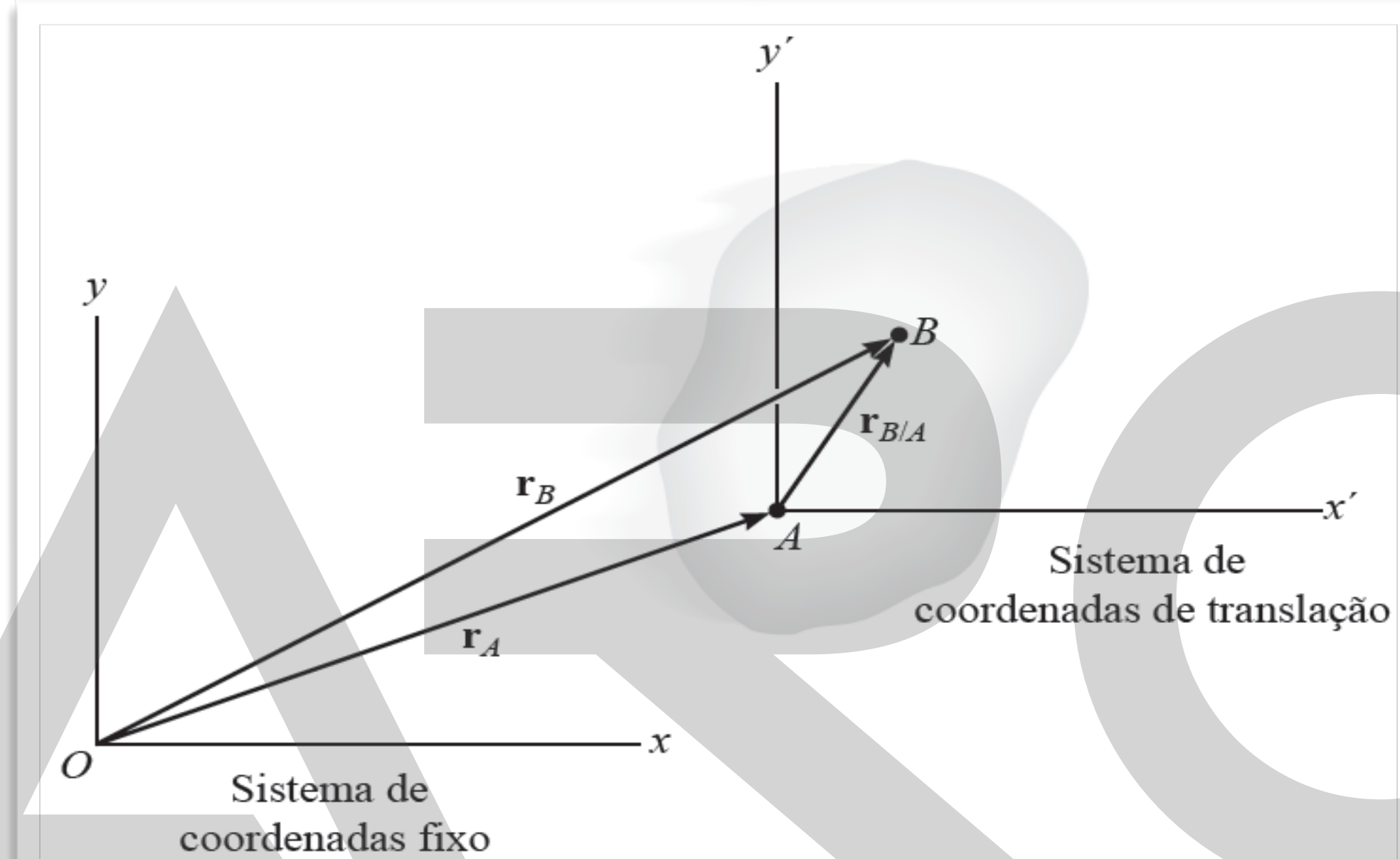
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Translação

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

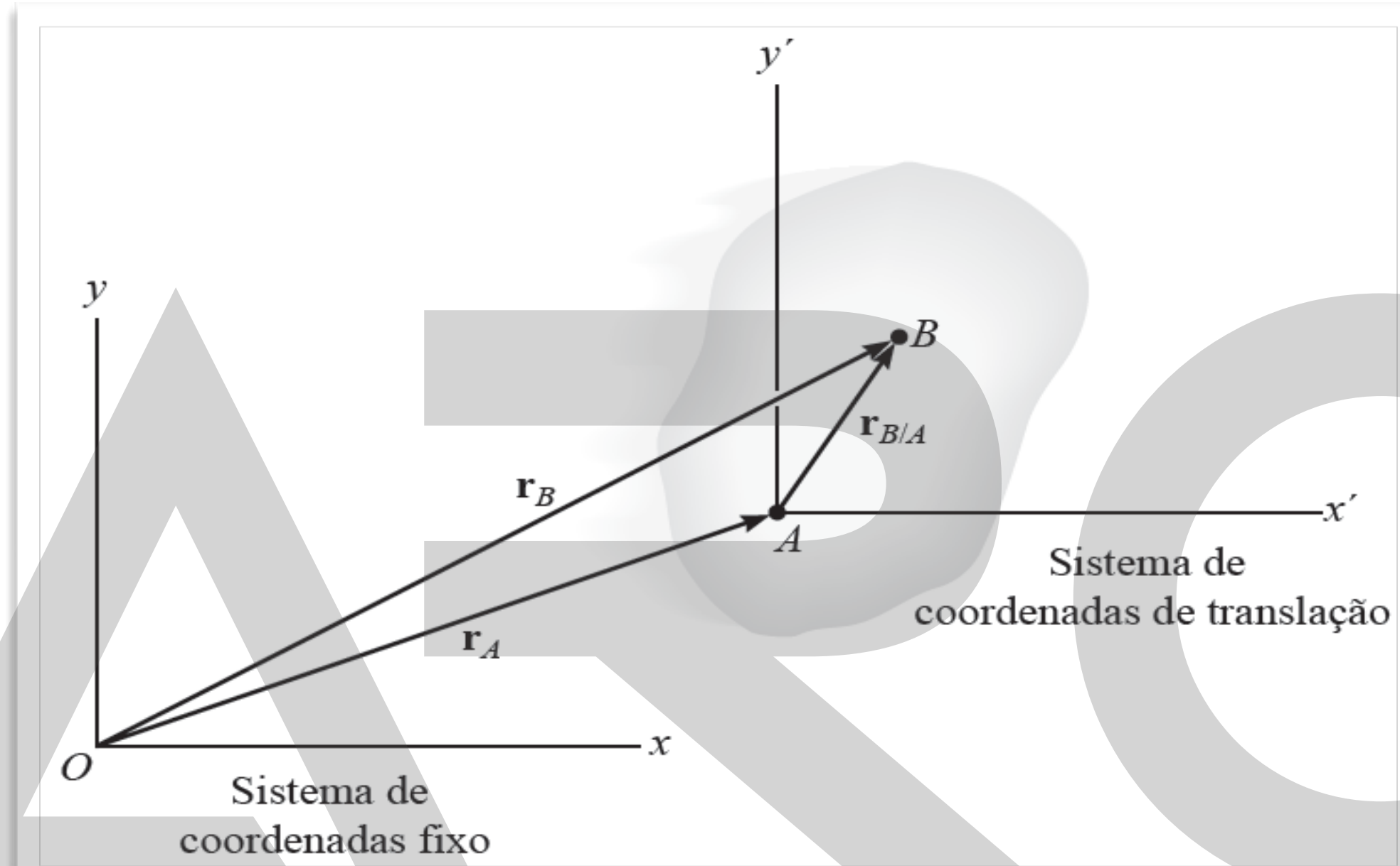
intensidade
e direção
constantes !

Translação

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

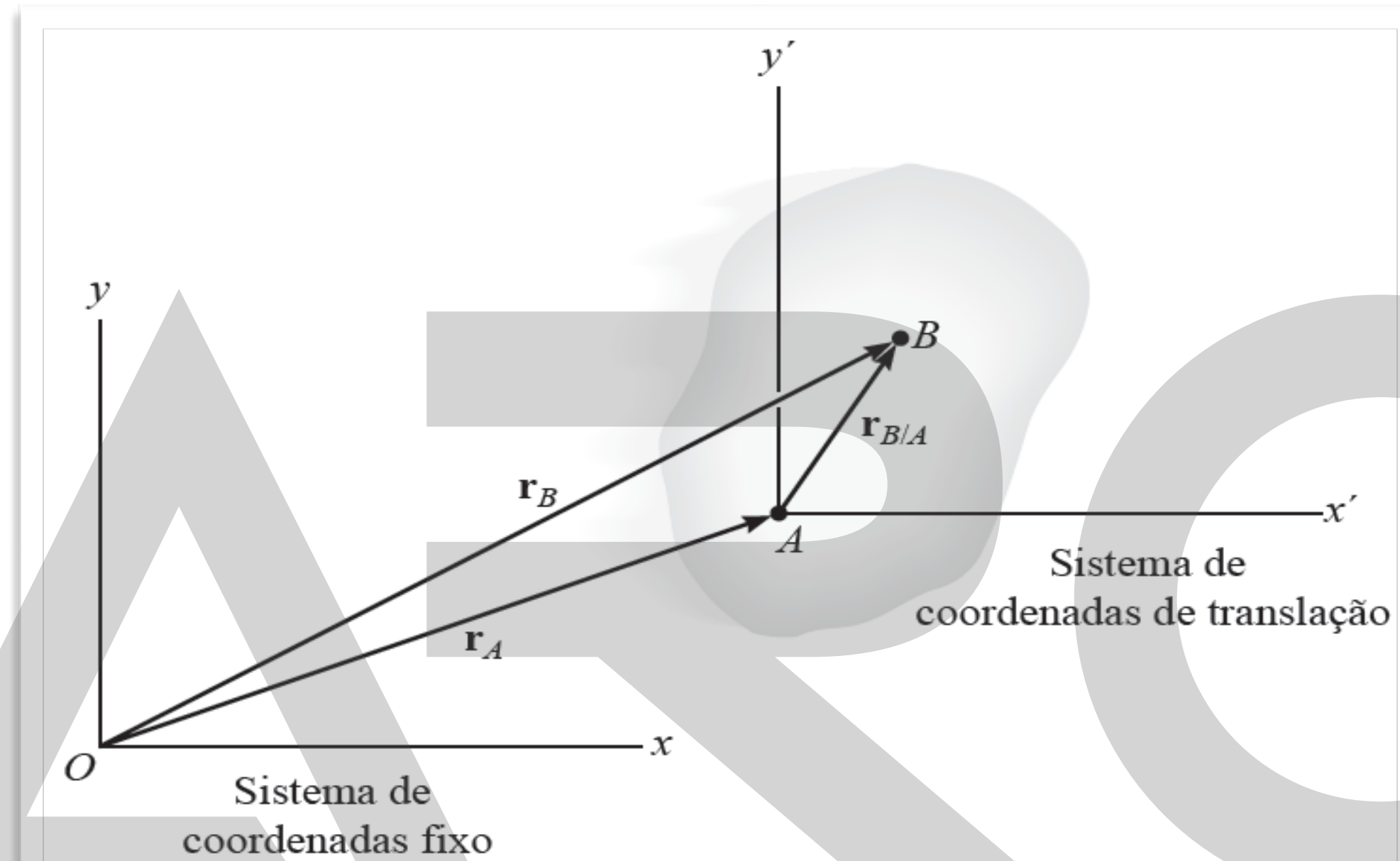
Lab

Translação

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

na **translação**, todos os pontos de um corpo rígido se deslocam com a **mesma velocidade e aceleração**

Conteúdo

Introdução

- **Em torno de um eixo fixo**
- Movimento de um ponto P
- Exemplo

Rotação

Conclusão

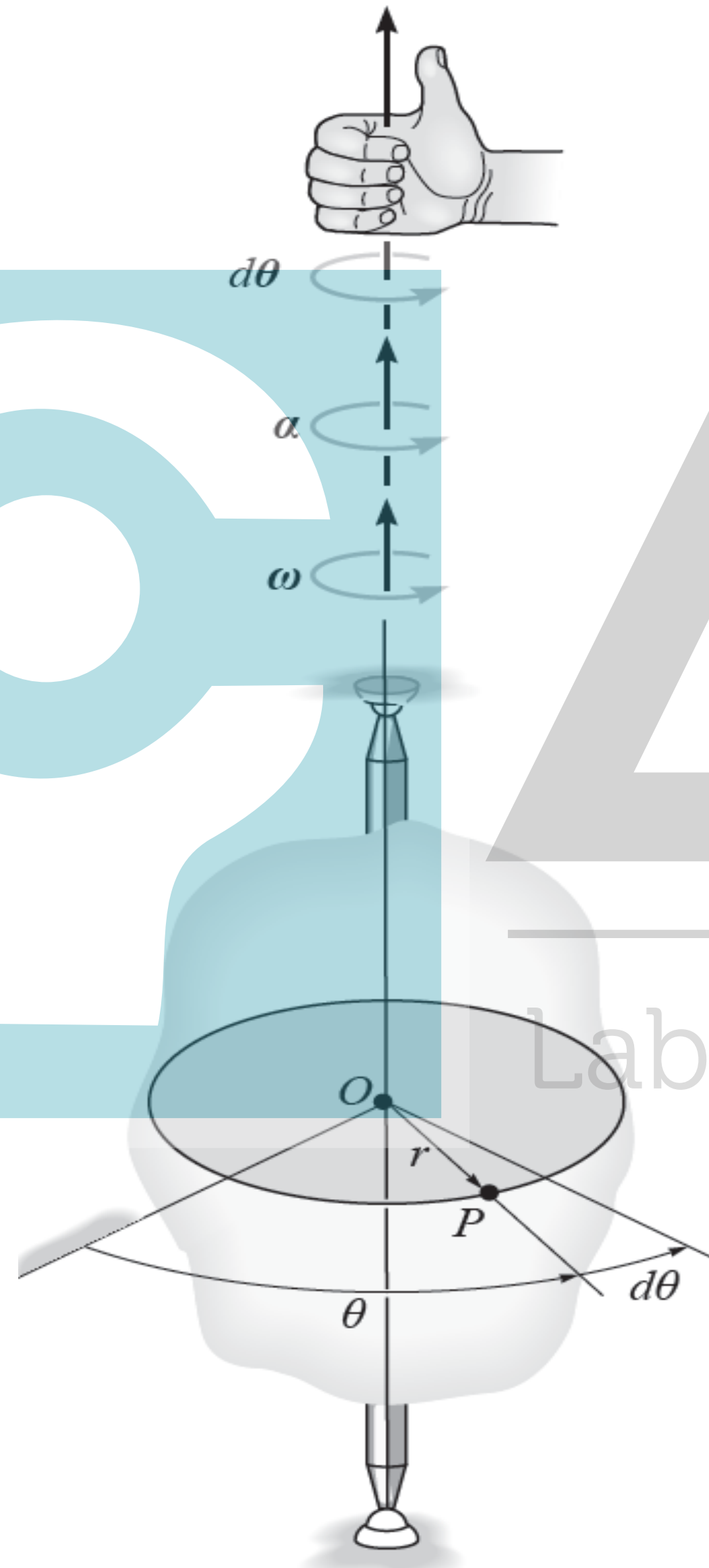
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Rotação em torno de um eixo fixo

Introdução

Rotação

Conclusão



ponto **P** localizado
no corpo se deslocar
ao longo de uma

trajetória circular.

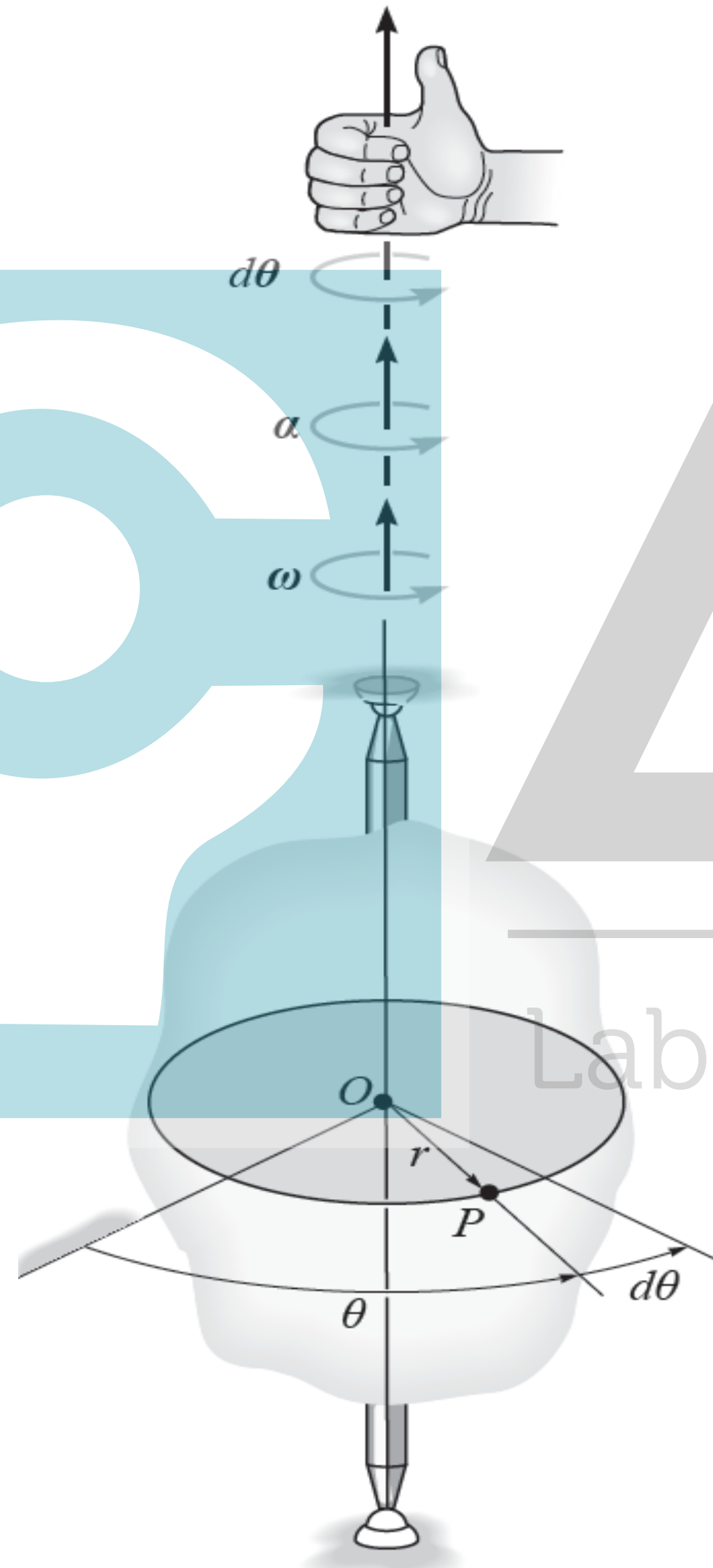
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Movimento angular

Introdução

Rotação

Conclusão



apenas linhas ou
corpos sofrem
movimento
angular

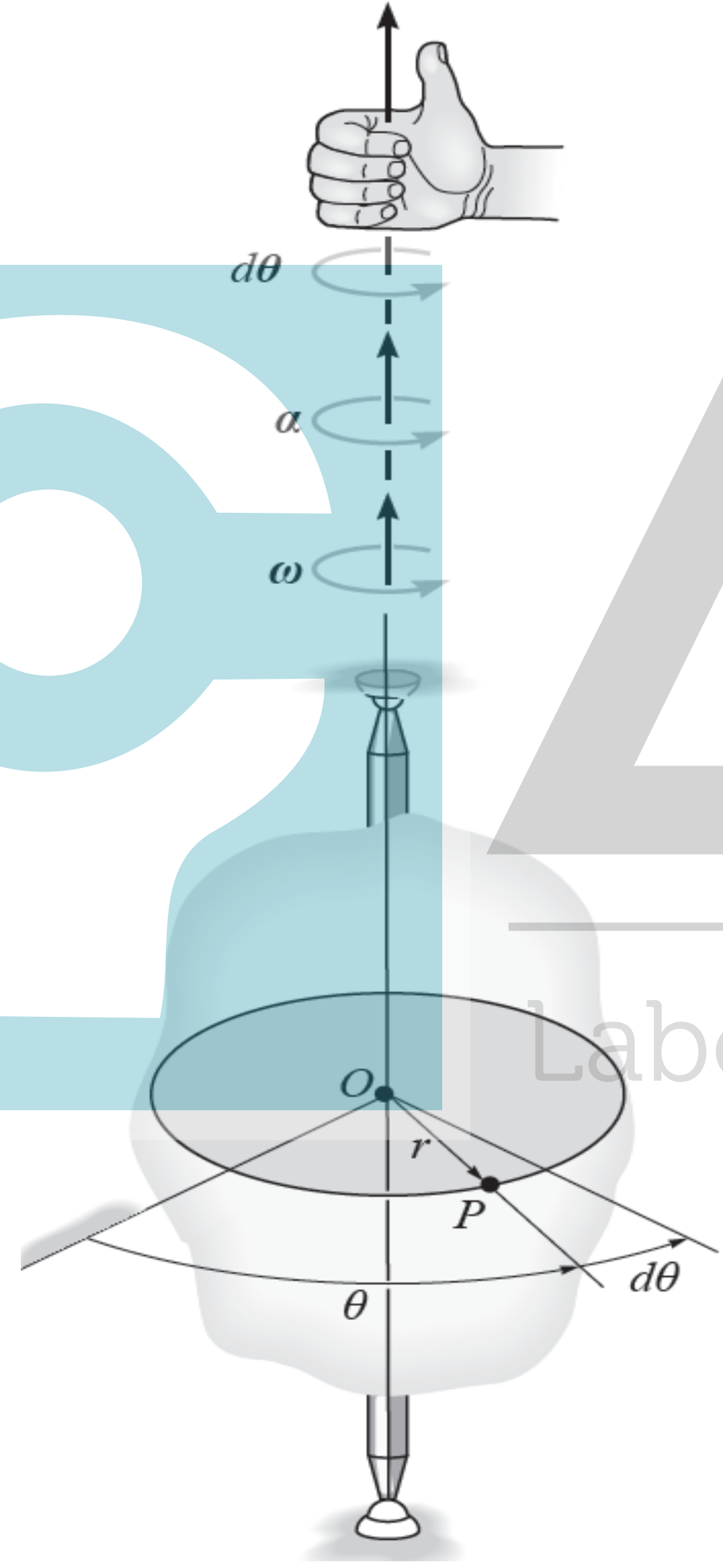
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Posição angular

Introdução

Rotação

Conclusão



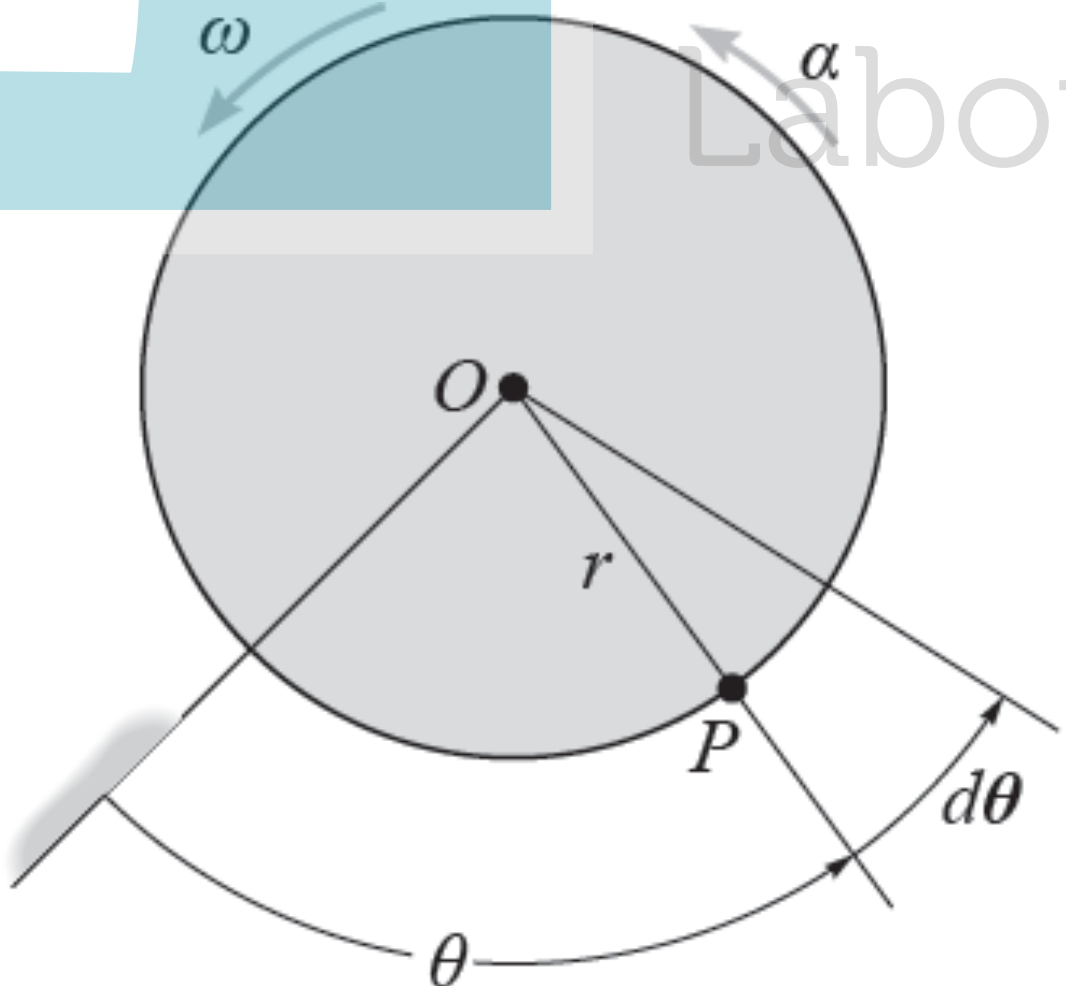
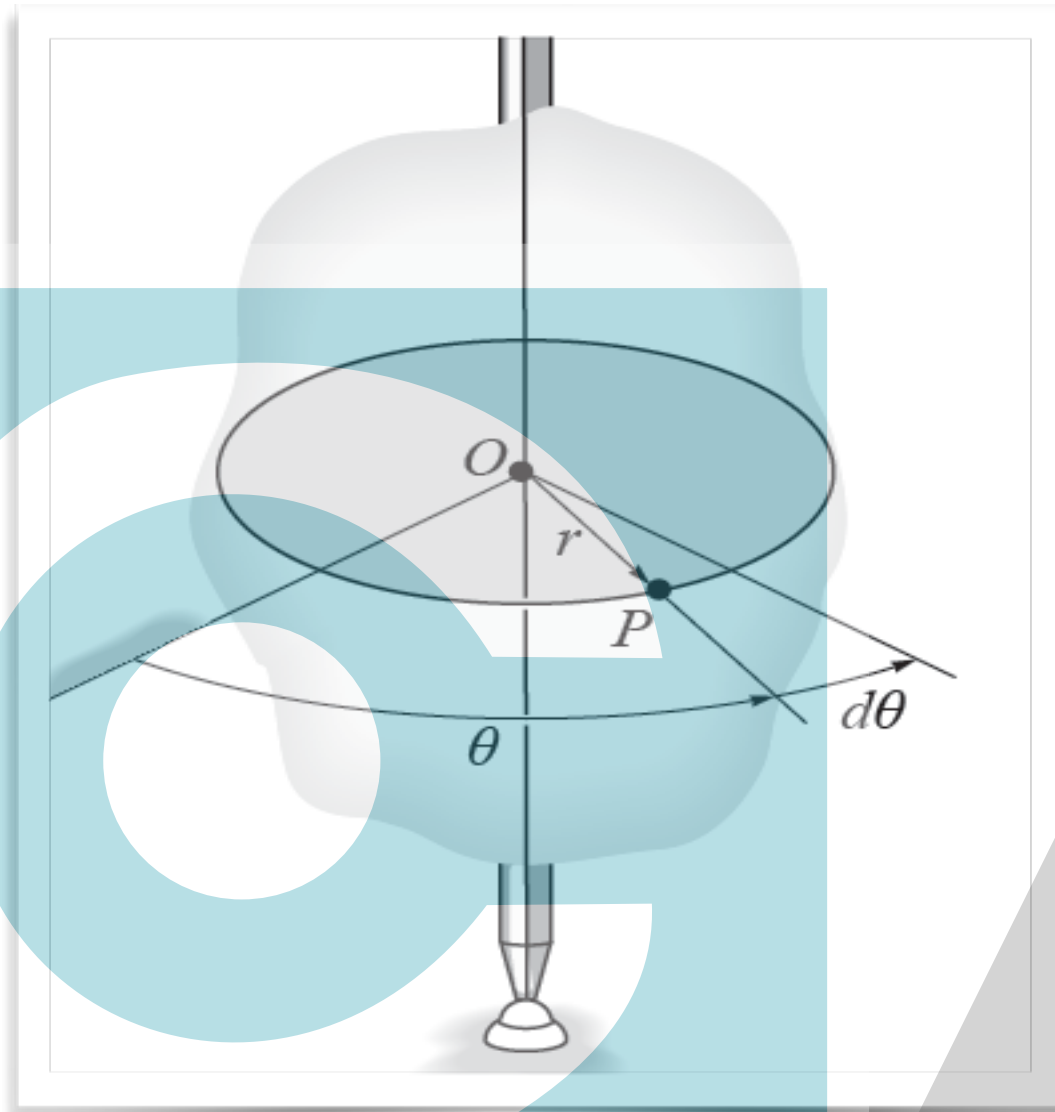
a partir de uma
referência **fixa**

Deslocamento angular

Introdução

Rotação

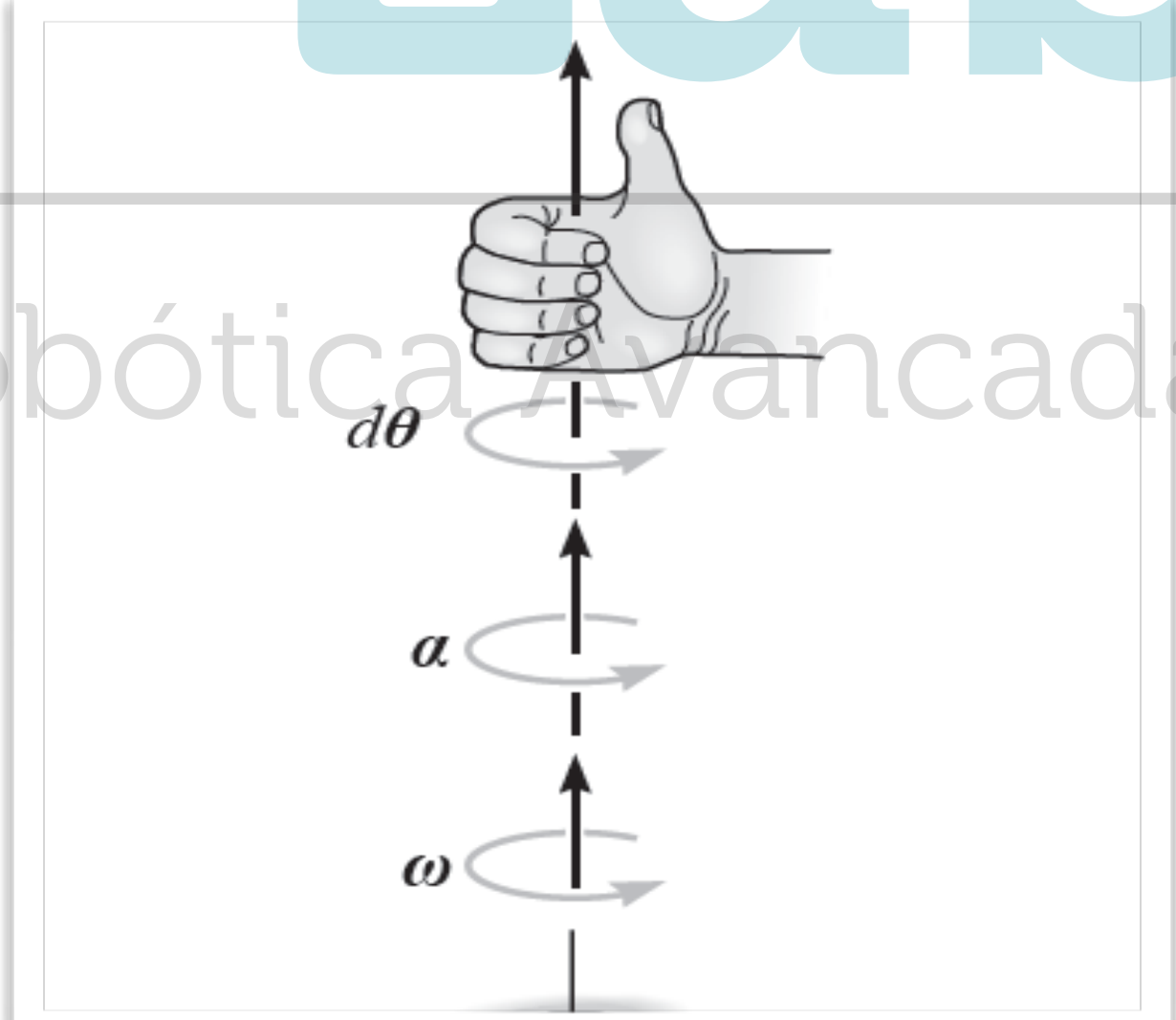
Conclusão



$d\theta$

$$|d\theta| = d\theta$$

direção: regra da mão direita



Lab

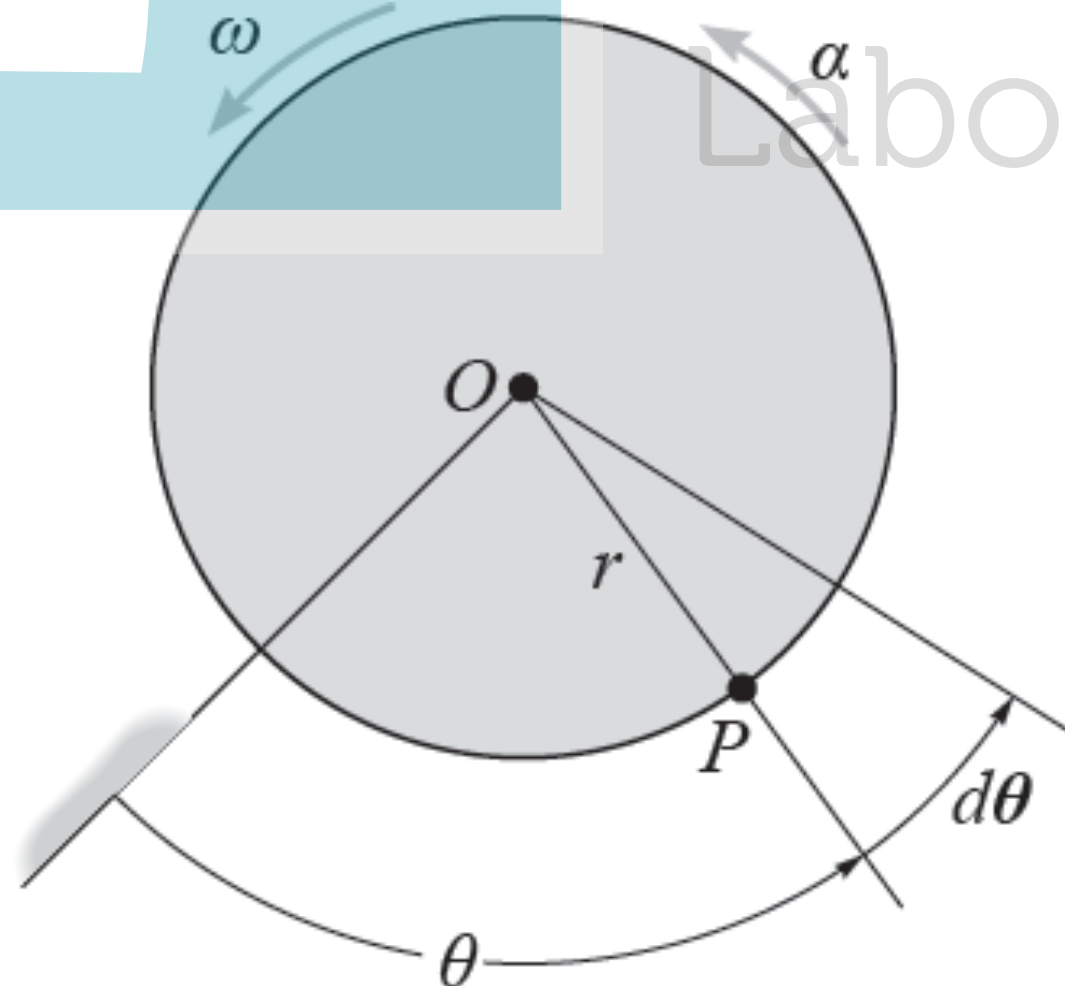
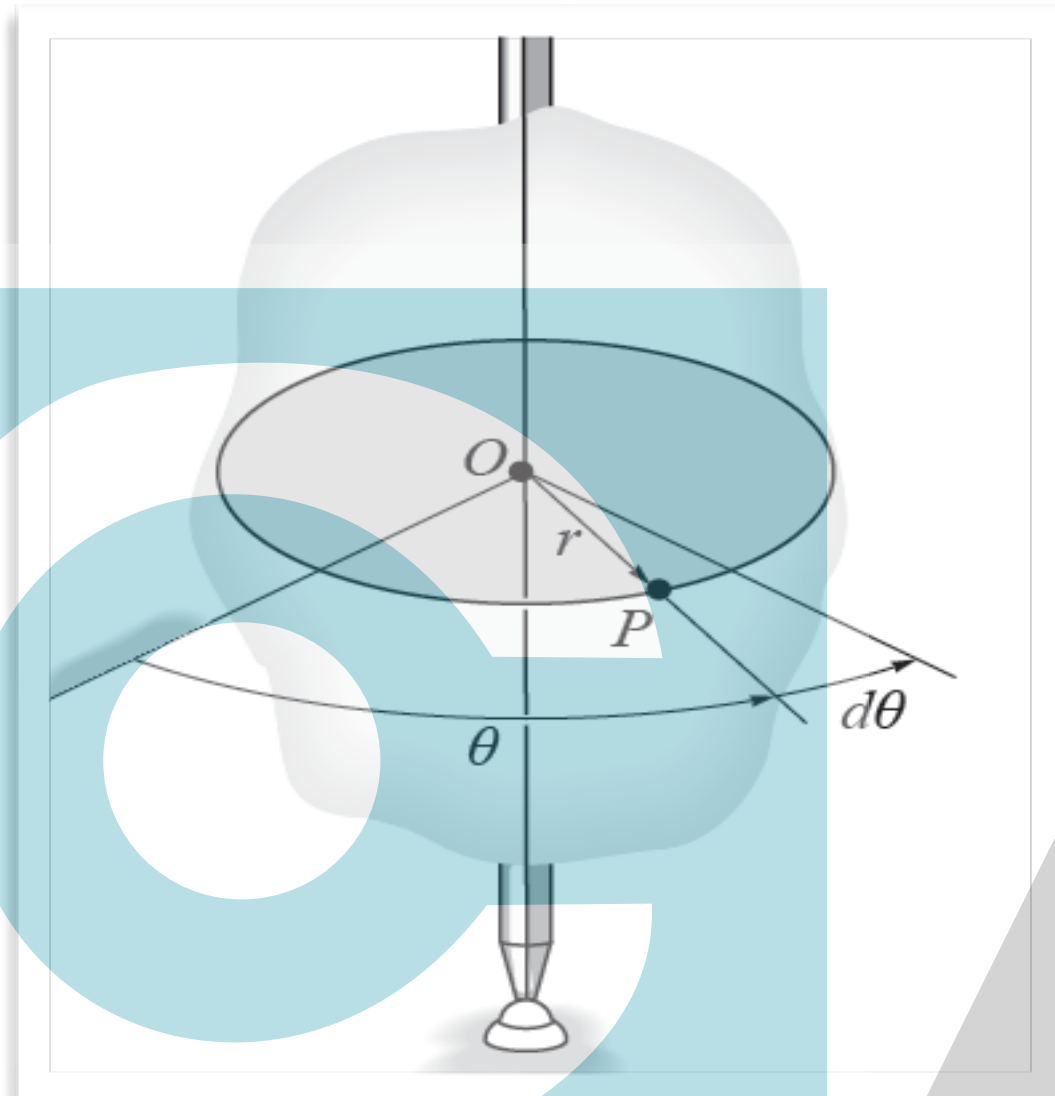
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Velocidade angular

Introdução

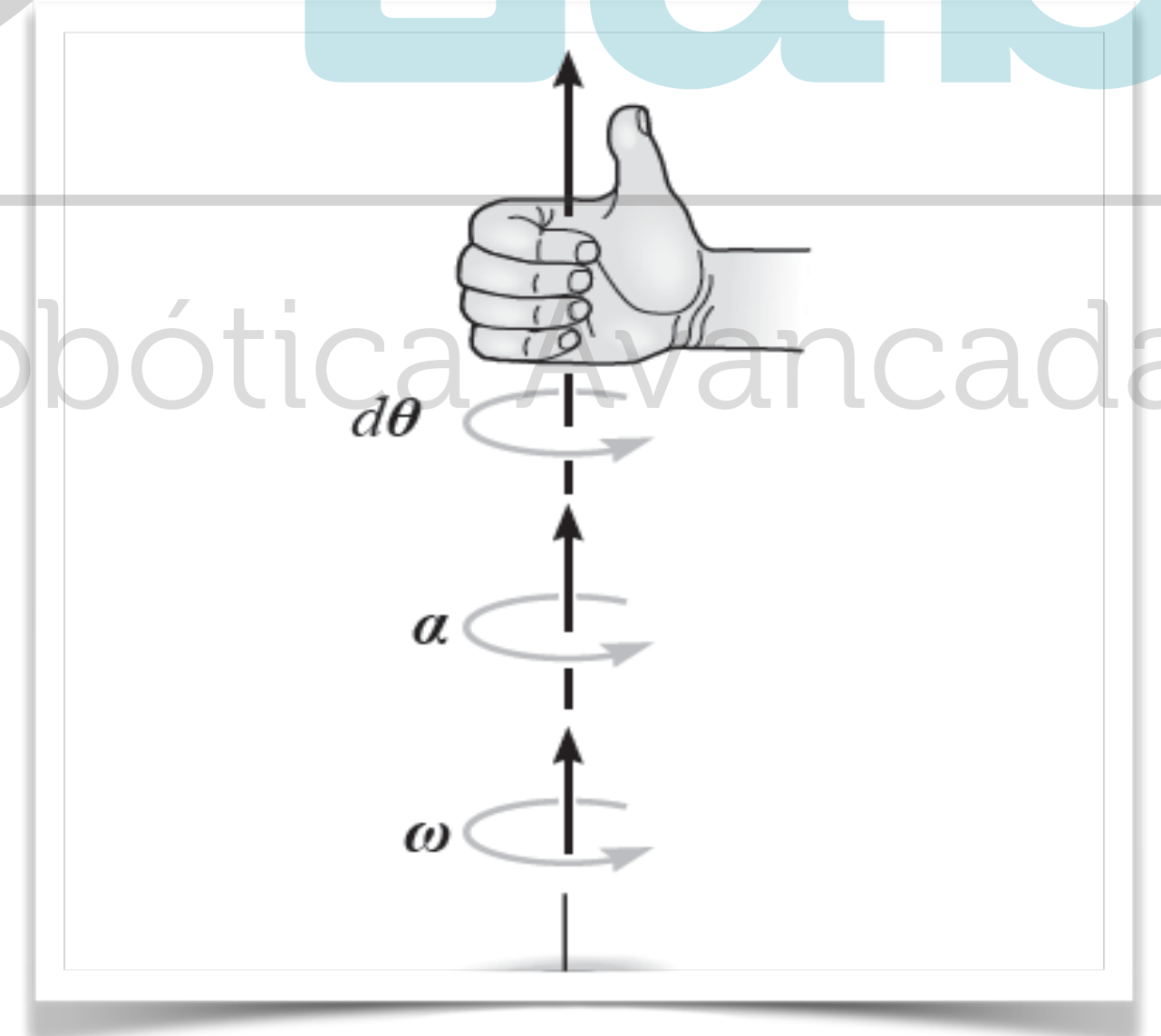
Rotação

Conclusão



$$|\omega| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

direção: regra da mão direita

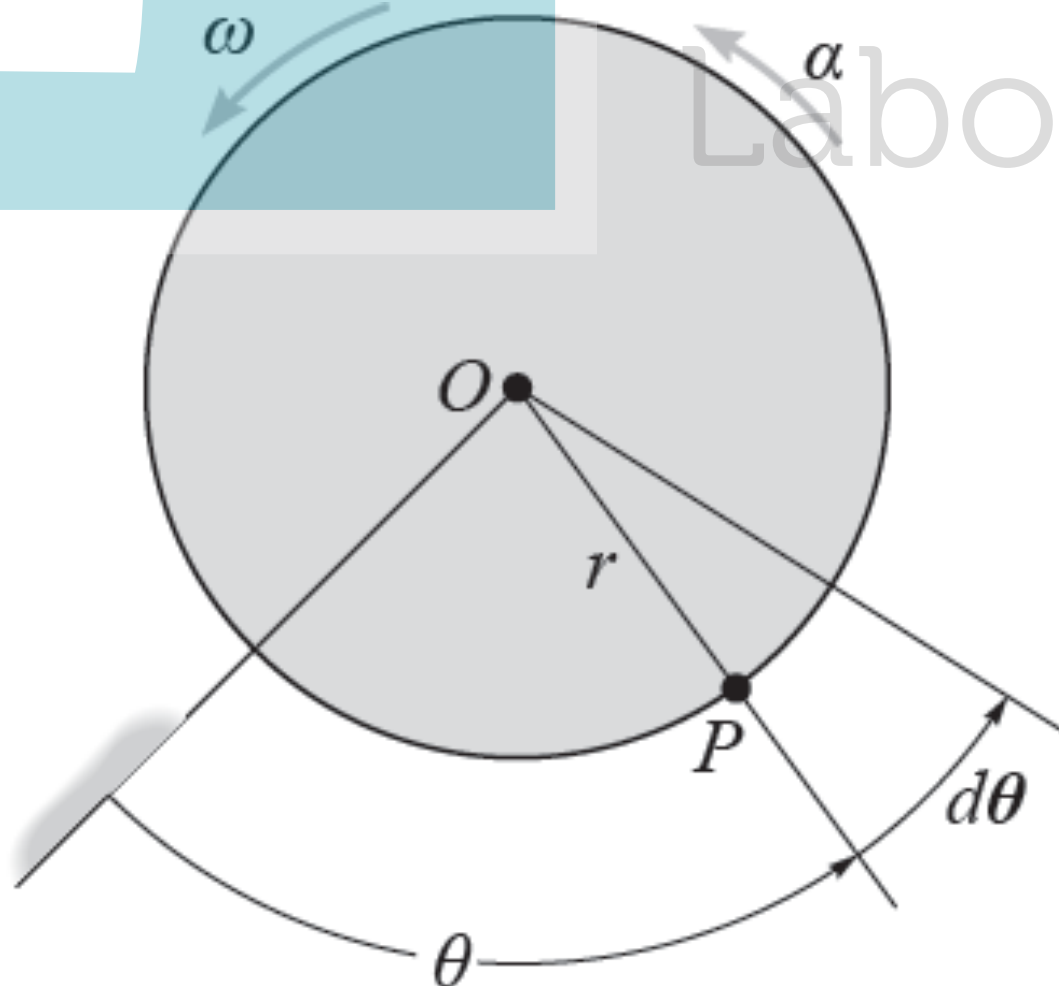
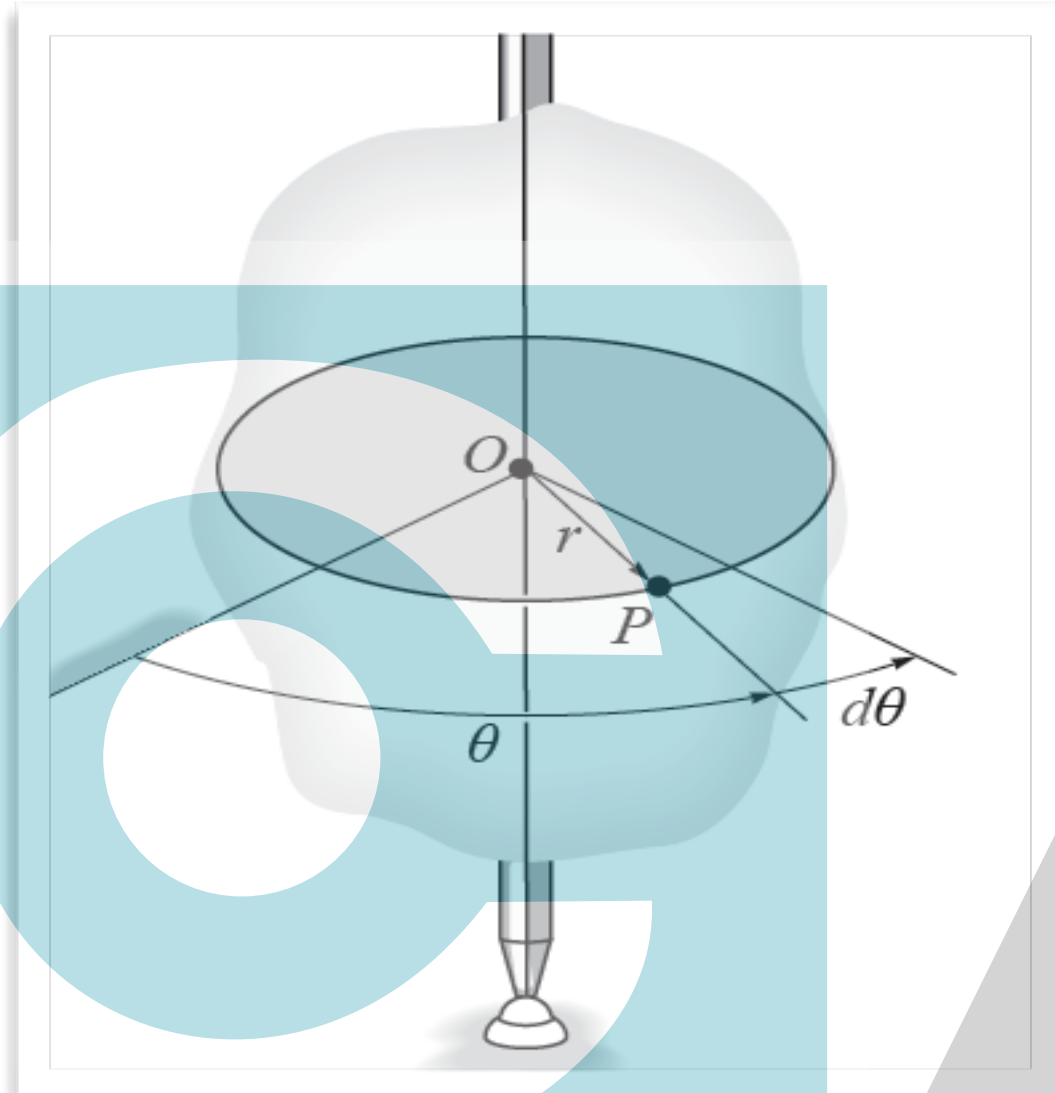


Aceleração angular

Introdução

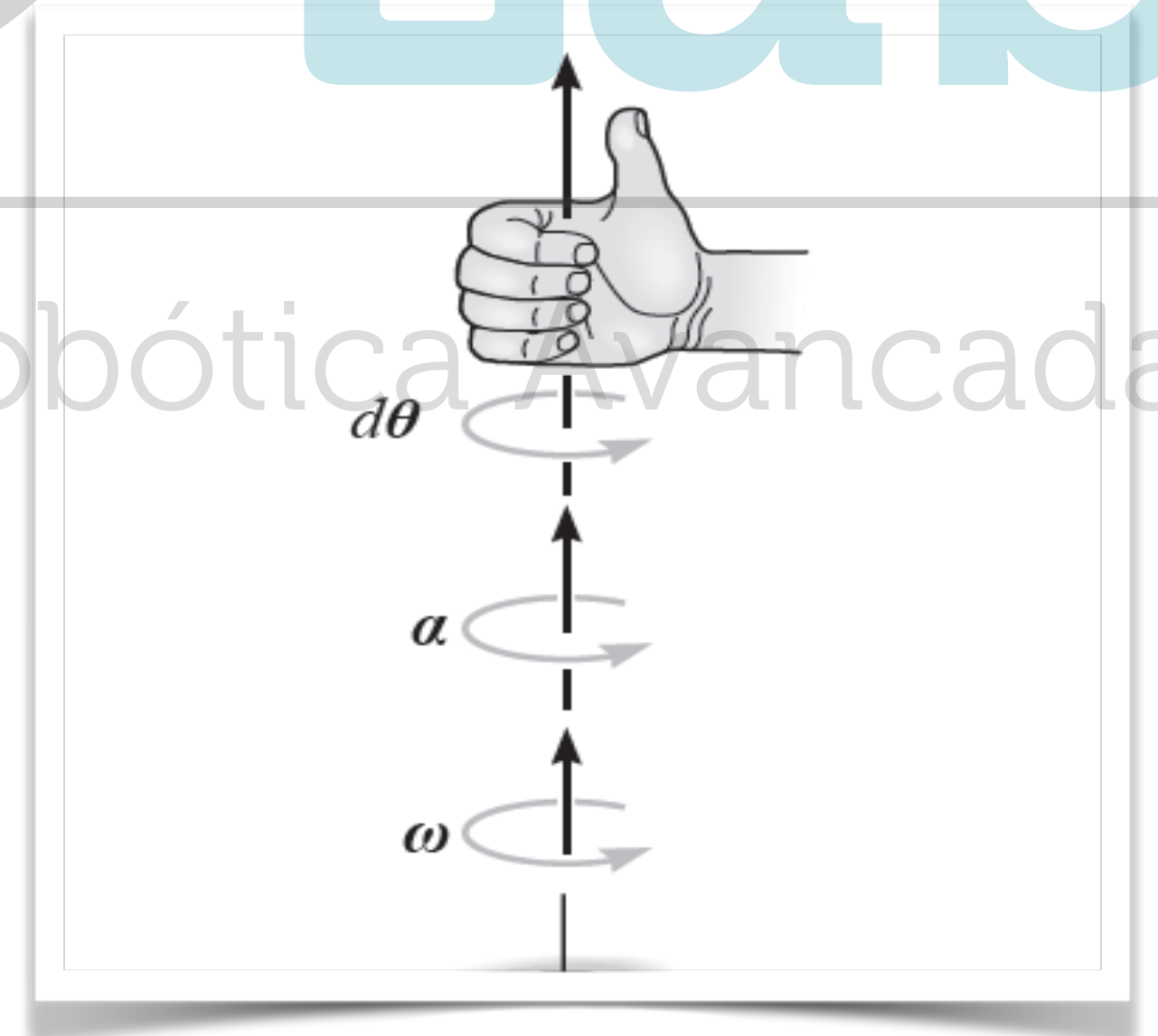
Rotação

Conclusão



$$|\alpha| = \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

direção: regra da mão direita



Movimento angular

Introdução

Rotação

Conclusão

$$d\theta$$
$$\omega$$
$$\alpha$$

$$|\omega| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$|\alpha| = \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$ds$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Movimento angular

Introdução

Rotação

Conclusão

$$a \, ds = v \, dv$$

$$\alpha \, d\theta = \omega \, d\omega$$

Movimento angular

Introdução

Rotação

Conclusão

$$|\omega| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$|\alpha| = \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

ARAC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Movimento angular com aceleração constante

Introdução

Rotação

Conclusão

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Aceleração angular constante

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Lab

Conteúdo

Introdução

- Em torno de um eixo fixo
- **Movimento de um ponto P**
- Exemplo

Rotação

Conclusão

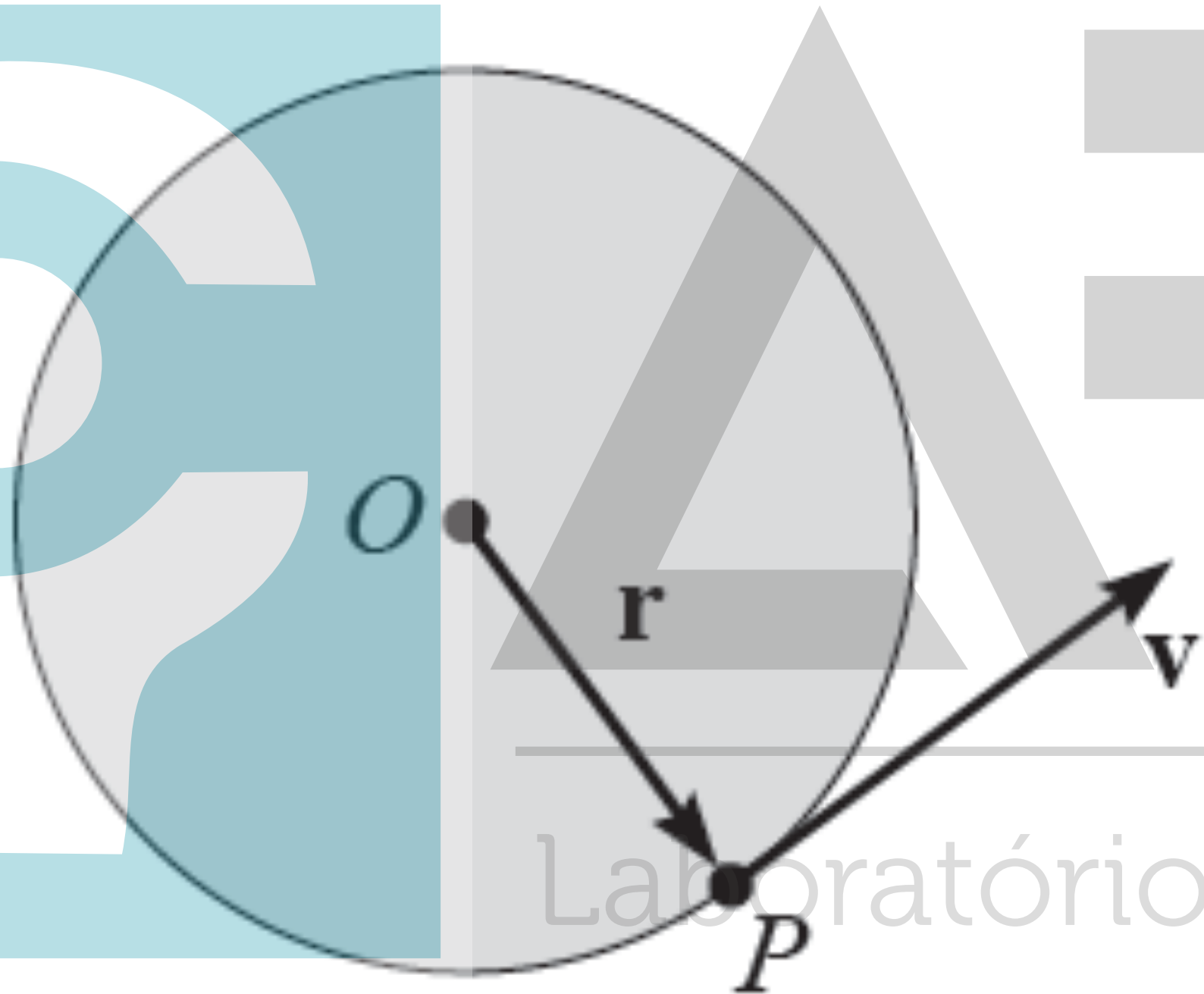
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Posição e deslocamento

Introdução

Rotação

Conclusão

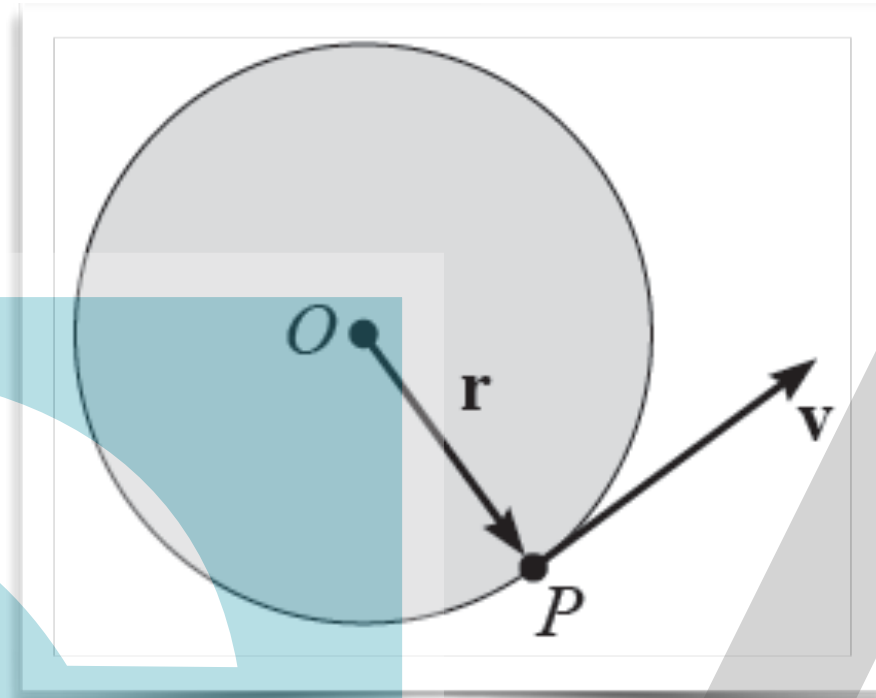


Posição:

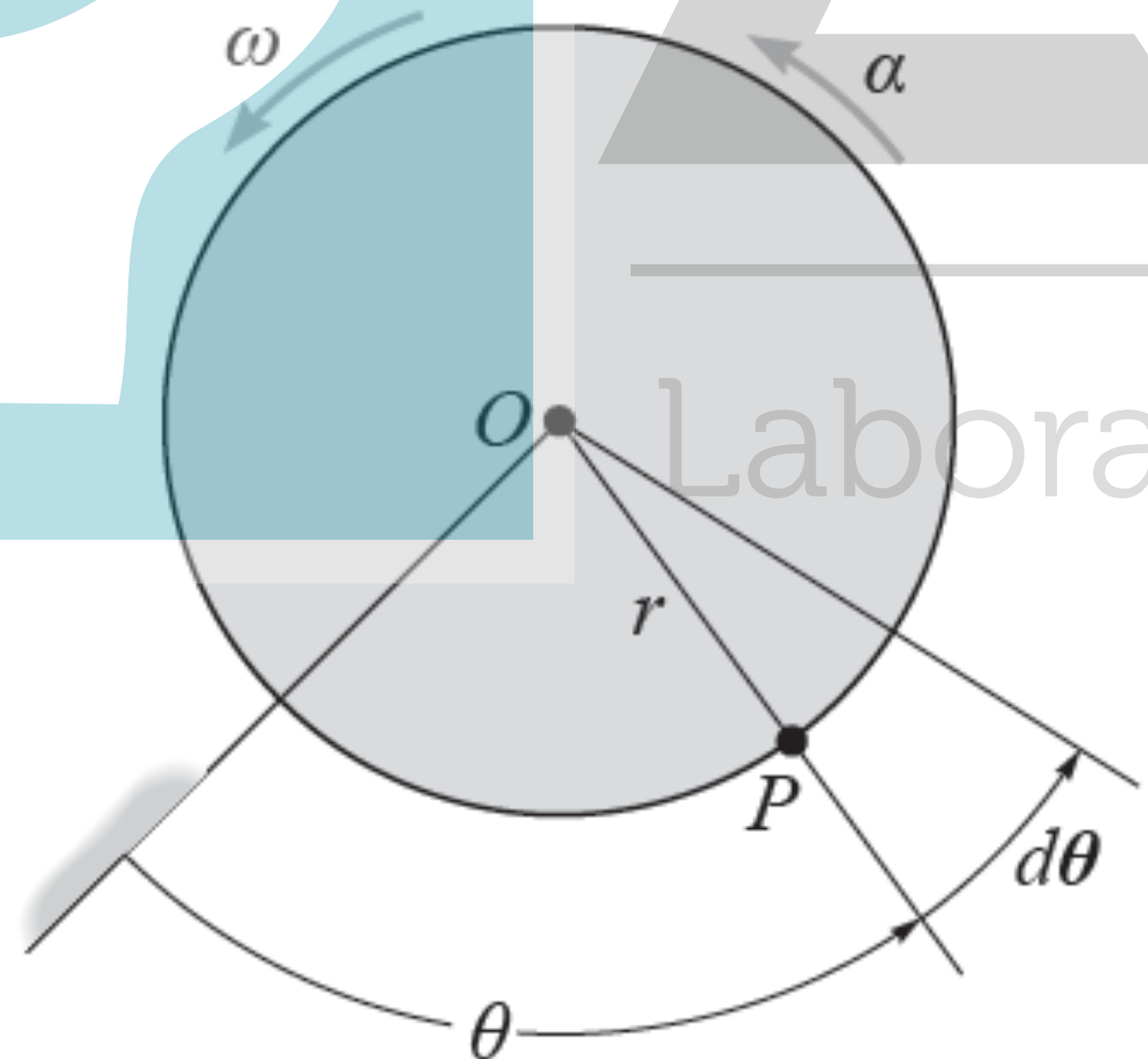
r

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Posição e deslocamento



Posição: r



Deslocamento:

$$ds = r d\theta$$

Introdução

Rotação

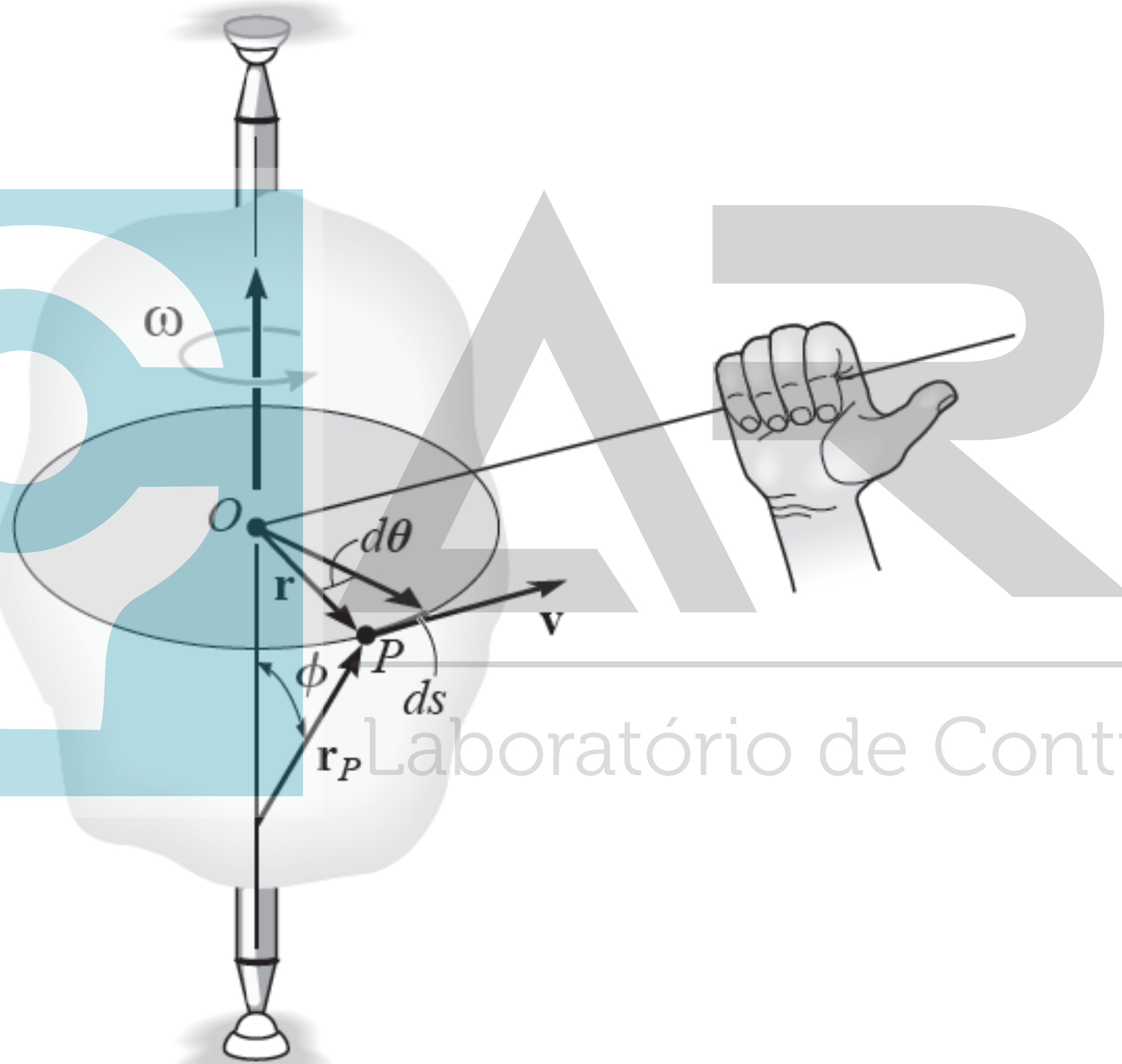
Conclusão

Velocidade

Introdução

Rotação

Conclusão



$$ds = r d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$v = \omega r$$

Velocidade

Introdução

Rotação

Conclusão



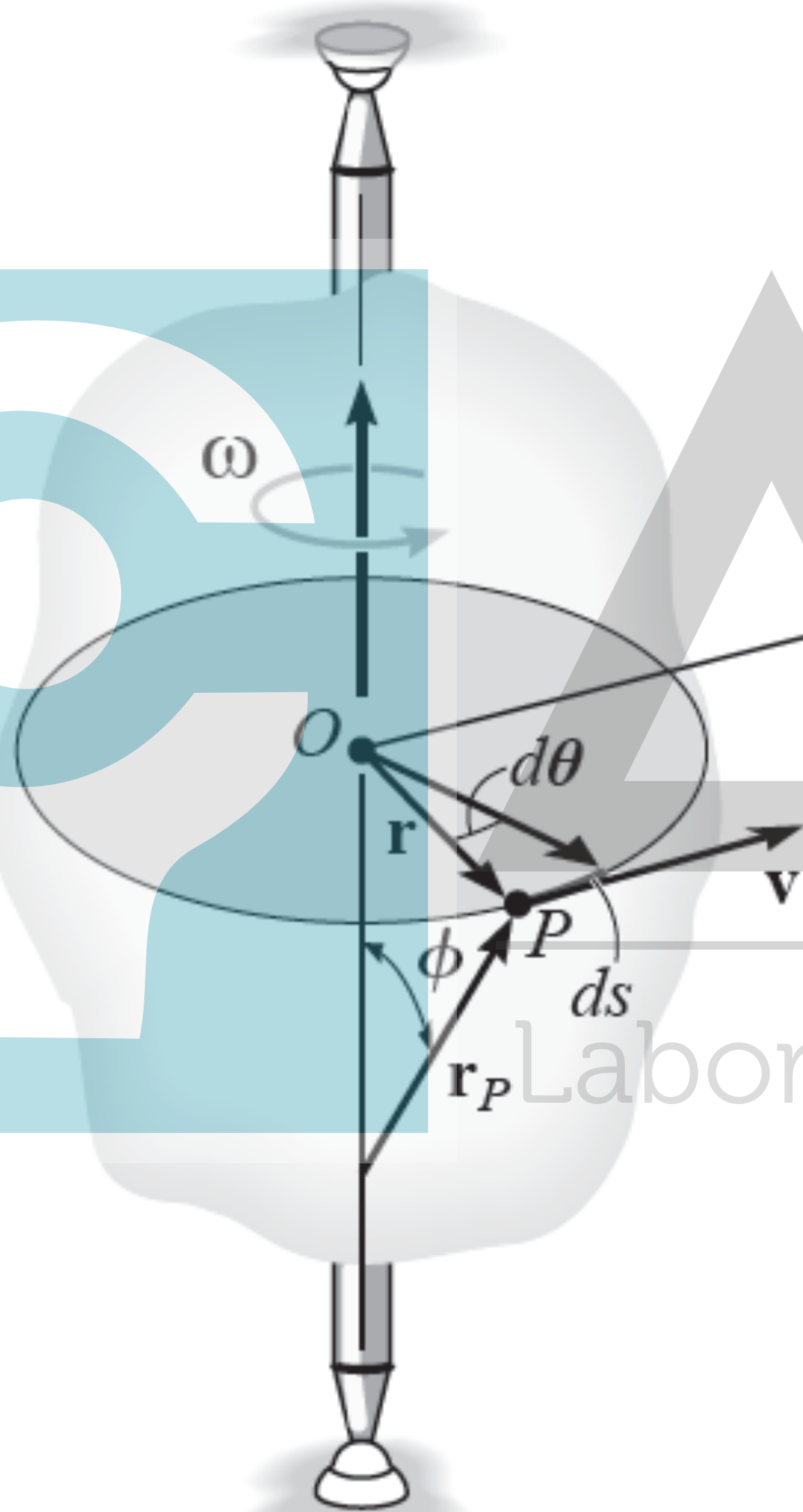
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Velocidade

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

$$v = \omega r_P \text{sen}(\phi)$$

$$r = r_P \text{sen}(\phi)$$

$$v = \omega r$$

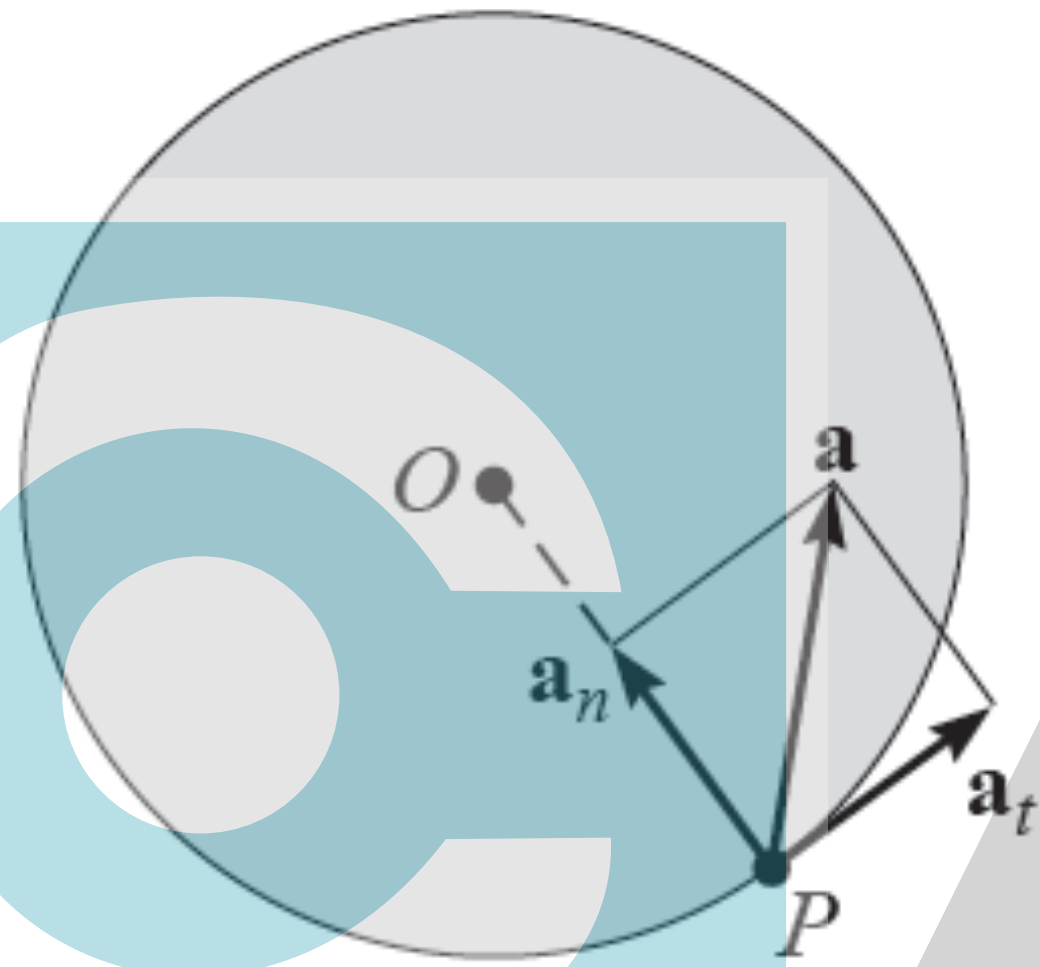
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Aceleração

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = r$$

$$v = \omega r$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$a_t = \alpha r$$

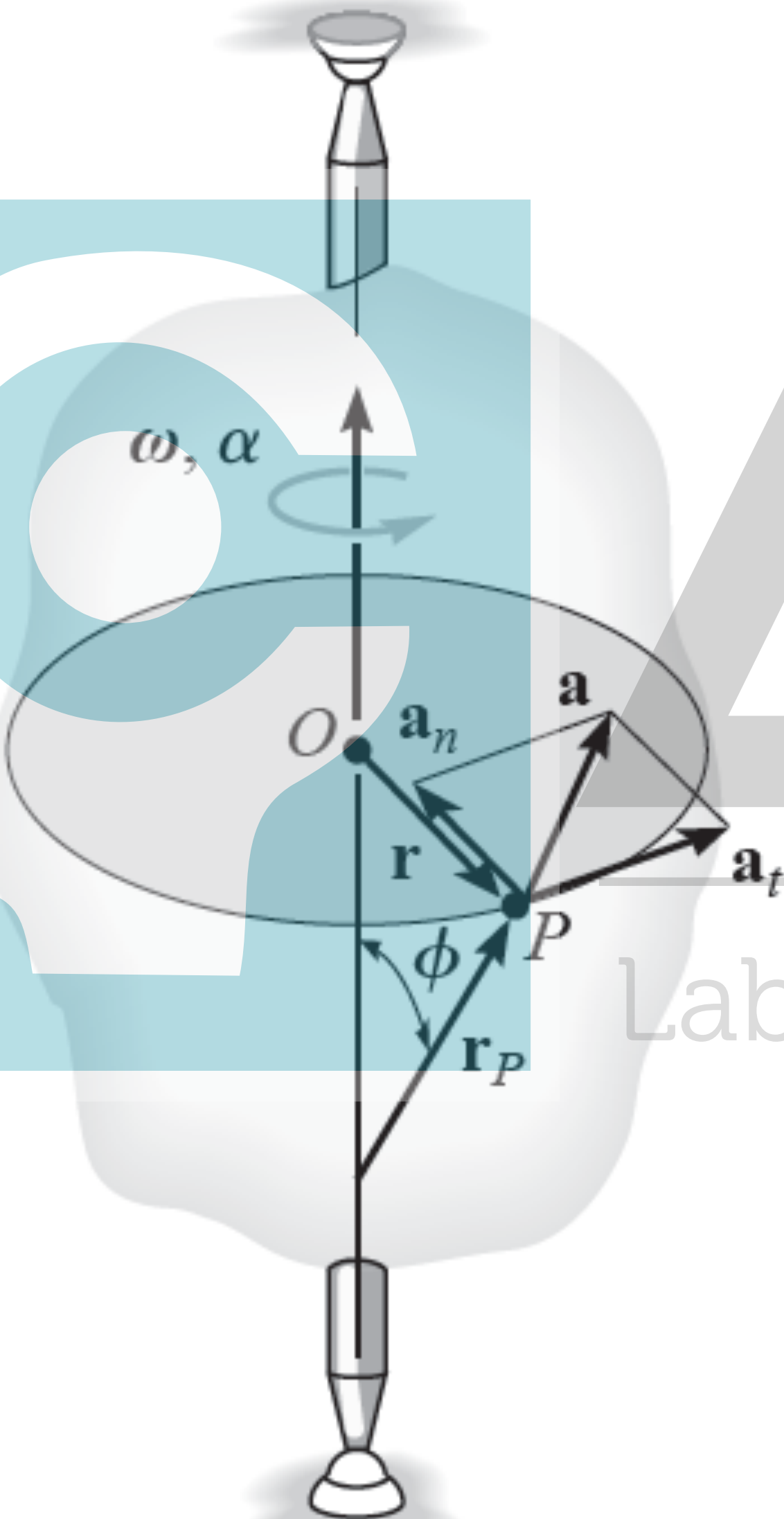
$$a_n = \omega^2 r$$

Aceleração

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

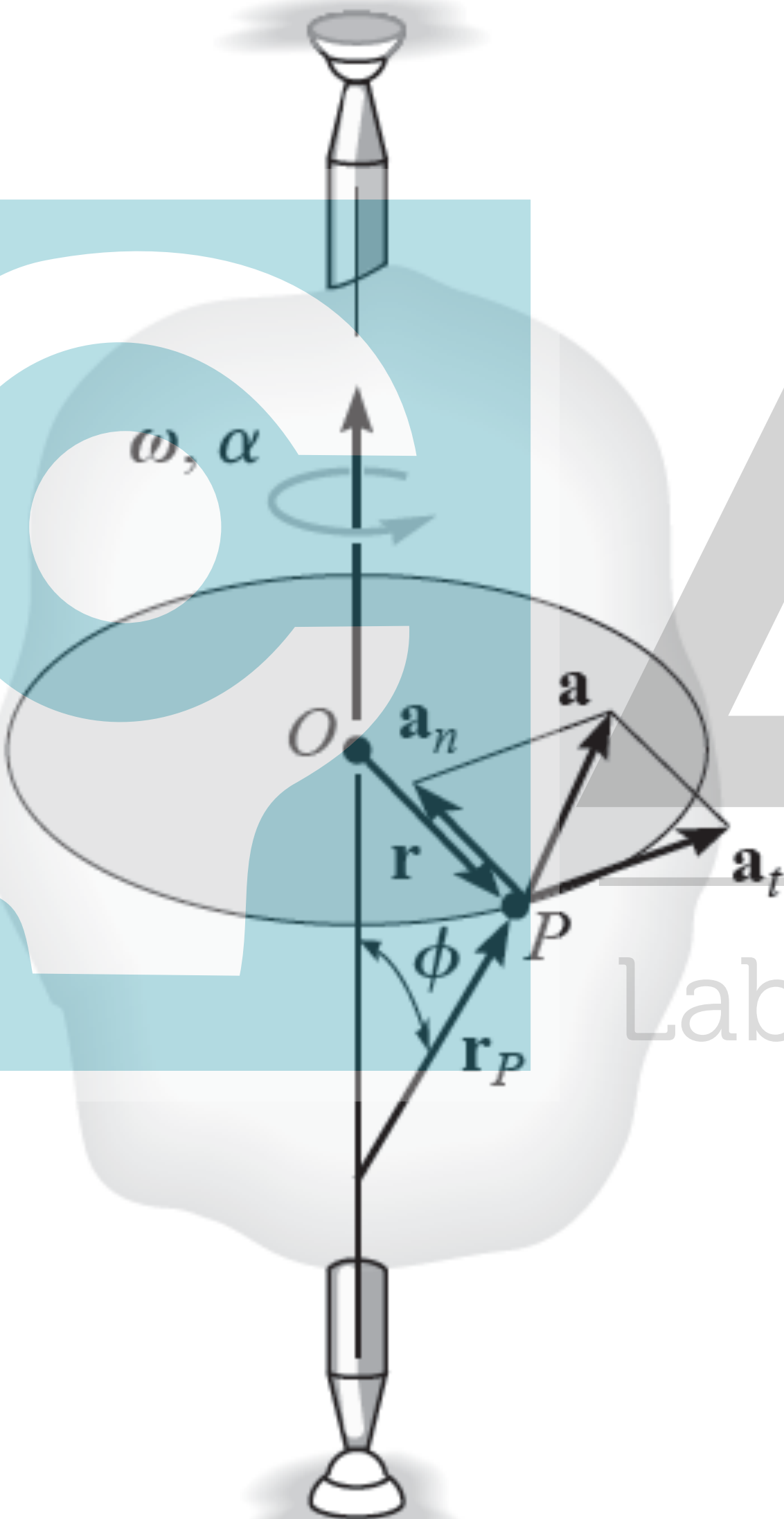
Laboratório de Controle de Robotica Avancada

Aceleração

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{a} = \alpha \times \mathbf{r}_P + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_P)$$

$$\alpha r_P \sin(\phi) \quad \omega^2 r_P \sin(\phi)$$

$$a_t = \alpha r$$

$$a_n = \omega^2 r$$

\mathbf{a}_t

\mathbf{a}_n

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

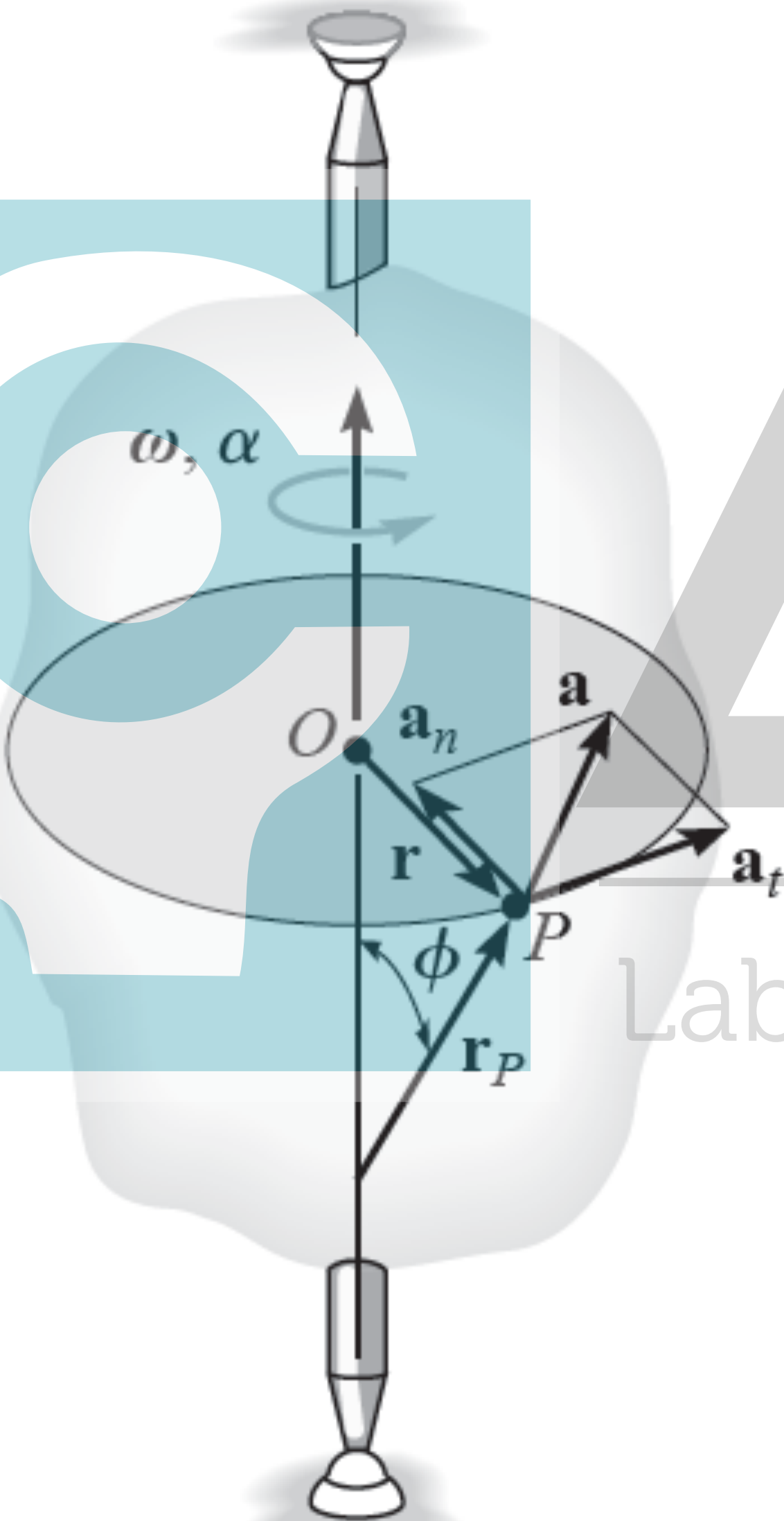
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Aceleração

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

\mathbf{a}_t

\mathbf{a}_n

$$a_n = \omega^2 r$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

Conteúdo

Introdução

- Em torno de um eixo fixo
- Movimento de um ponto P
- **Exemplo**

Rotação

Conclusão

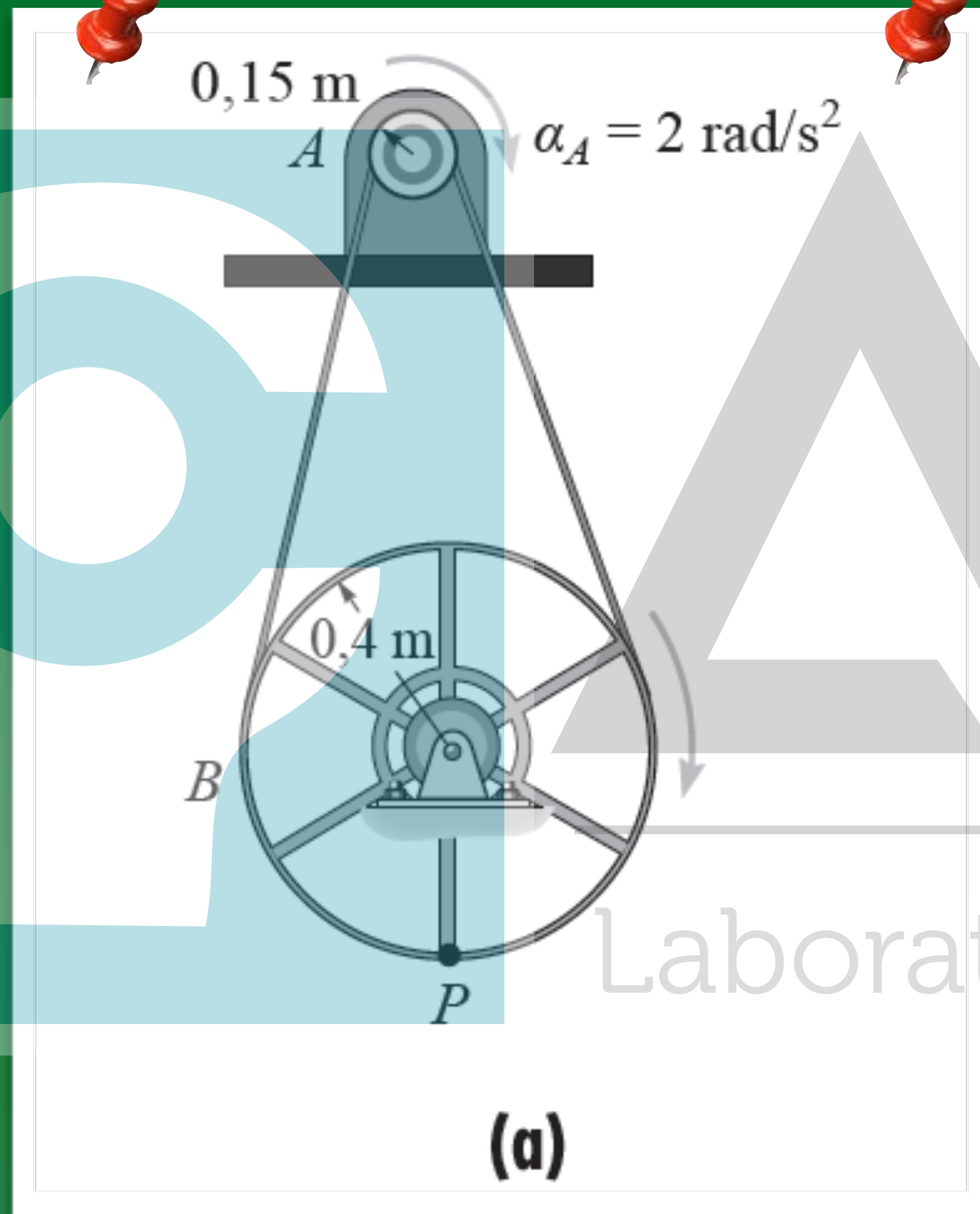
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Exemplo 16.2

Introdução

Rotação

Conclusão



$$\alpha_A = 2 \text{ rad/s}^2$$

$$|\mathbf{v}_P| = ? \quad |\mathbf{a}_P| = ?$$

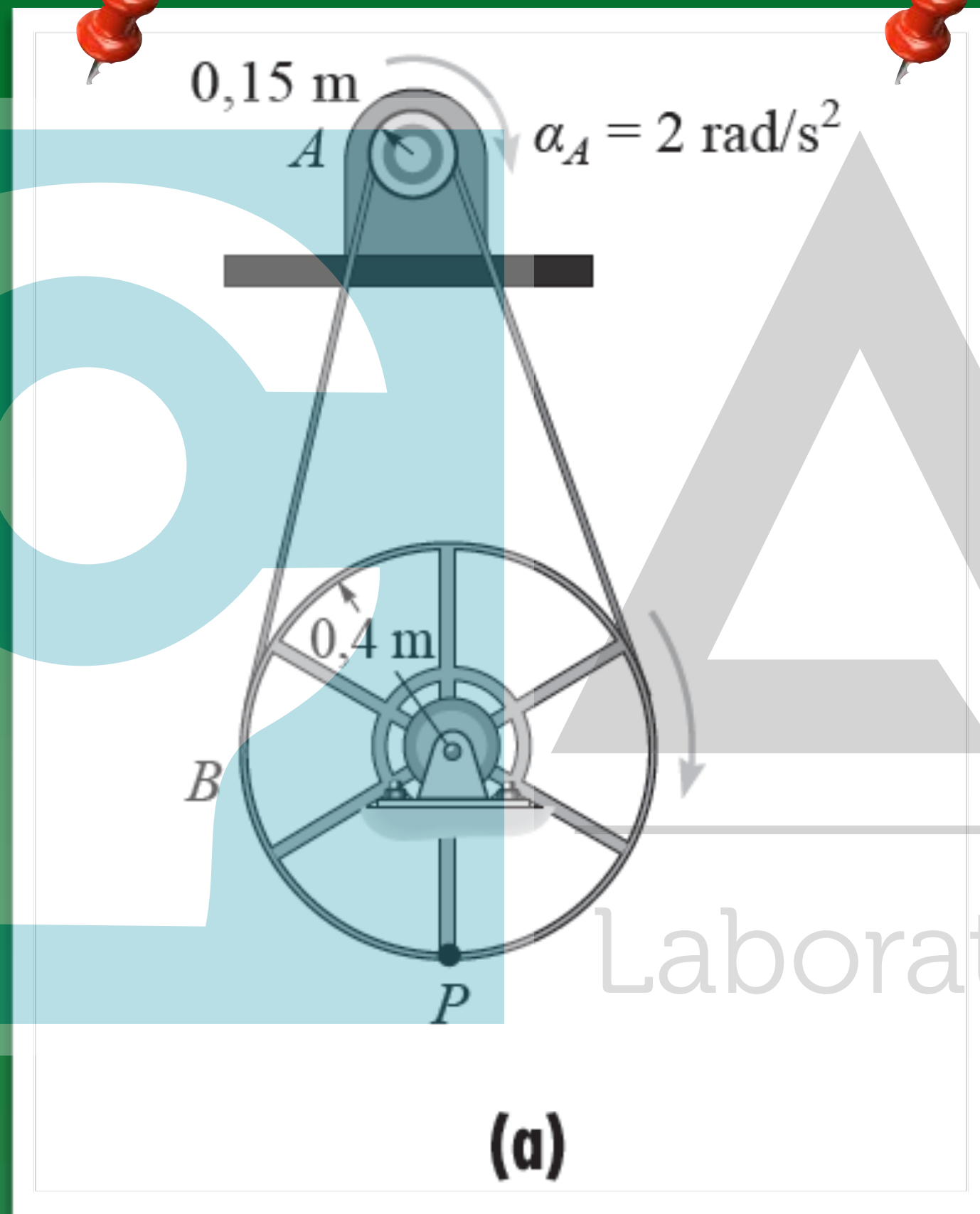
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Exemplo 16.2

Introdução

Rotação

Conclusão



$$|\mathbf{a}_P| = 2,84 \text{ m/s}^2$$

$$|\mathbf{v}_P| = 1,06 \text{ m/s}$$

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Conteúdo

Introdução

Rotação

ARCO Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada



– “Take-home messages”

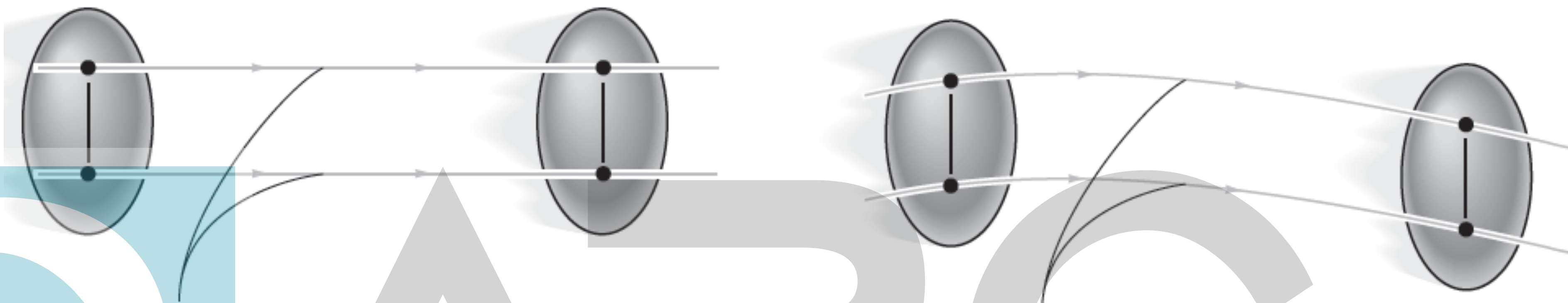
Conclusão

“Take-home messages”

Introdução

Rotação

Conclusão

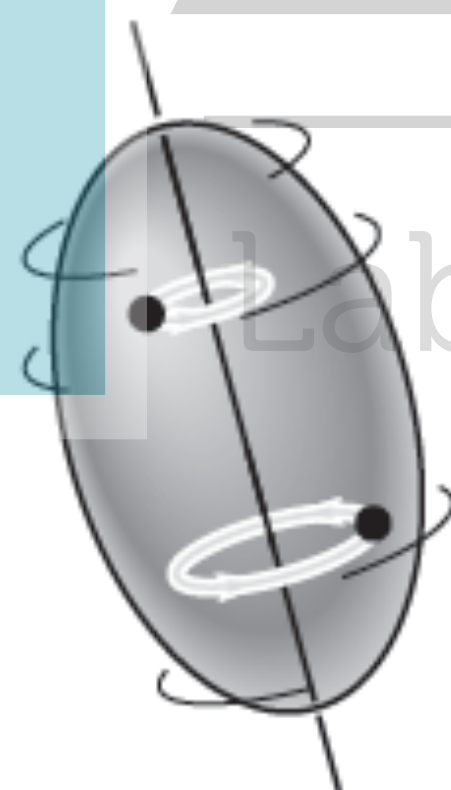


Trajétória de translação retilínea

Trajétória de translação curvilínea

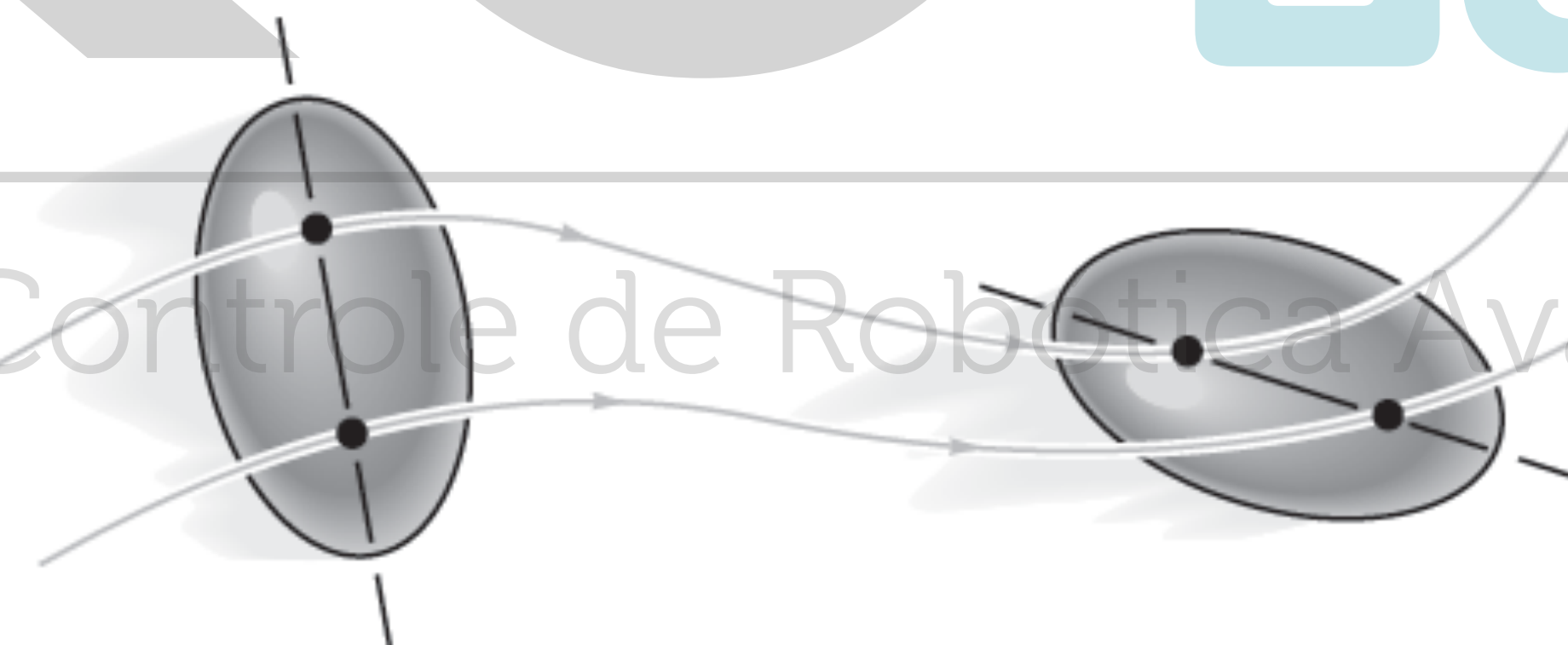
(a)

(b)



Rotação em torno de um eixo fixo

(c)



Movimento plano geral

(d)

ARCO Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avançada

“Take-home messages”

Introdução

Rotação

Conclusão



Rotação em torno de um eixo fixo

$$\omega = d\theta/dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\alpha = d\omega/dt$$

ou

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

α_c Constante

$$v = \omega r$$

$$\alpha_t = \alpha r, a_n = \omega^2 r$$

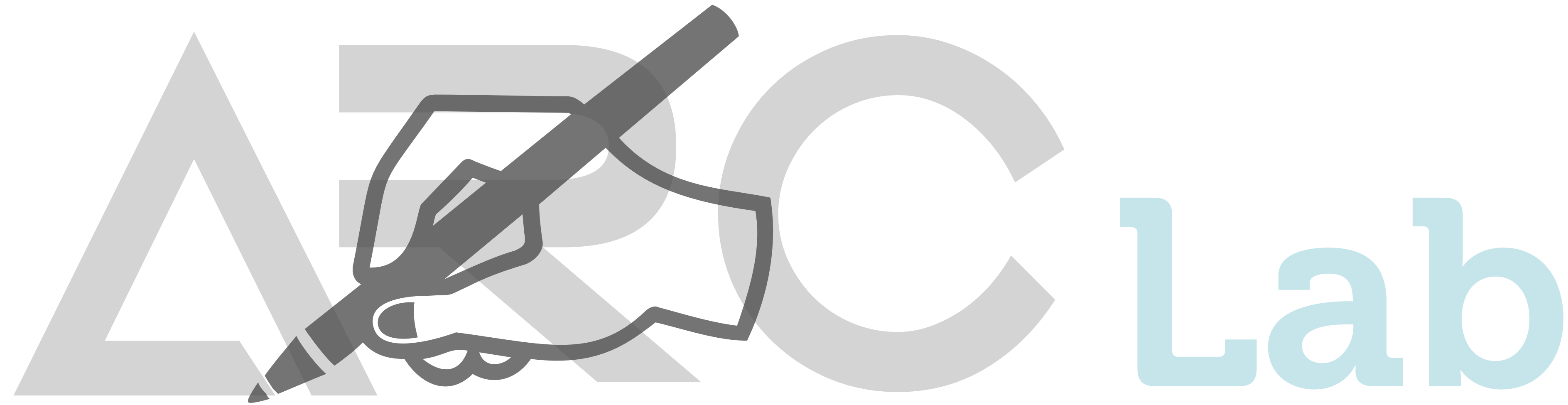
Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Lista de exercícios para próxima aula...

Introdução

Rotação

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avancada

16.1, 16.21, 16.18, 16.31, 16.36



That's all Folks!

Laboratorio de Control de Robótica Avanzada