# Teoria dos jogos aplicada a votação

Matheus Almeida Hereman

Dezembro de 2019

**Proposta de estudo de teoria dos jogos aplicado a votação**
**introdução**

Em uma votação os agentes envolvidos tem seu payoff decidido por um perfil de estratégia. O caráter de interdependência estratégica desse jogo advém do resultado eleitoral depender da maioria dos votos, e cada jogador apenas detêm um voto para utilizar.

O jogador vota de acordo com a maior utilidade auferida diante do conjunto de características, promessas, e políticas dos candidatos. Supondo dois votantes, que tem como estratégias votar A; votar B.

E dois candidatos A e B que correspondem respectivamente a votar A, e votar B. O candidato A detêm as seguintes características, promessas, e políticas: Quer realizar política X, e não quer realizar política Y. O candidato B detêm as seguintes características, promessas, e políticas: Não quer realizar política X, e quer realizar política Y.

A utilidade do jogador 1 é dada por

$$Utilidade_1 = \begin{cases} 10, & \text{realiza política X; não realiza política Y} \\ 0 & \text{não realiza política X; realiza política Y.} \\ 5 & \text{C.C..} \end{cases}$$

A utilidade do jogador 2 é dada por

$$Utilidade_2 = \begin{cases} 10, & \text{não realiza política X; realiza política Y} \\ 0 & \text{realiza política X;não realiza política Y.} \\ 5 & \text{C.C..} \end{cases}$$

O payoff será a utilidade se o candidato respectivo a aquela utilidade ganhar a eleição, ou seja deter maioria dos votos. No caso de 2 jogadores ter todos os votos. Caso contrário A o payoff será nulo para os votantes.

A matriz payoff tem a seguinte composição.

| | Votar A | Votar B |
|---|---|---|
| Votar A | (10;0) | (0;0) |
| Votar B | (0;0) | (0;10) |

Pela metodológia de estratégia fracamente dominante se percebe que para o jogador 1 não irá jogar "votar B", portanto "Votar A" domina fracamente "Votar B". Simétricamente para o jogador 2 "Votar B" domina fracamente "Votar A", portanto o perfil de estratéia que resultado do jogo é ("Votar A","Votar B").

O interesse deste tipo de aplicação da teoria dos jogos é a modição do desenho de mecanismo da votação e da utilidade dos jogadores para mudar os equilibrios do jogos. Além da introdução de incerteza sobre as características, promessas, e políticas. Assim como em quais cenários os jogares tem incentivoa mentir sobre seus candidatos favoritos para ter um payoff maior.

**Matheus Almeida Hereman Apresentação 1**

**Estudo em teoria dos jogos aplicado a votação com 3 jogadores**

Suponha um jogo com 3 jogadores $\{1,2,3\} = I$, no qual os três jogares tem a possibilidade de jogar as mesmas três estratégias $A, B, C = S_i$ e o payoff do jogador que era indentificado como eleitor sera dado por $f_i(\text{Utilidade}_i, \text{Estratégia jogada pelos jogadores})$.

A utilidade do jogador $i$ tem como paramêtro um político. Um candidato é um conjunto de políticas. Uma política é expressa por um valor entre 0 e 1, o qual representa o quanto o candidato esta comprometido a seguir uma certa política. Supondo que as estratégias (os políticos) tenham as seguintes políticas.

- Candidato A = $\{0,8;0,5\}$
- Candidato B = $\{0,5;0,5\}$
- Candidato C = $\{0,01;1\}$

E supondo que a utilidade dos eleitores tenham as seguintes formas:
$Utilidade_1 == (2 * [\text{Política } 1])^{0,2} * (2 * [\text{Política } 2])^{0,8}$
$Utilidade_2 == (2 * [\text{Política } 1])^{0,8} * (2 * [\text{Política } 2])^{0,2}$
$Utilidade_3 == (2 * [\text{Política } 1])^{0,5} * (2 * [\text{Política } 2])^{0,5}$
Pode-se auferir que:
$Utilidade_1(A) = (2 * 0,8)^{0,2} * (2 * 0,5)^{0,8} = 1,098560543$
$Utilidade_1(B) = 1; Utilidade_1(C) = 0,796205545$
$Utilidade_2(A) = 1,456451362$; $Utilidade_2(B) = 1$; $Utilidade_2(C) = 0,061801133$
$Utilidade_3(A) = 1,264911064$; $Utilidade_3(B) = 1$; $Utilidade_3(C) = 0,199998082$
Ou seja todos detem a mesma ordenação de preferências que é $A \succ B \succ C$.
Definida a utilidade por consequencia a ordenação de preferencias e supondo que a eleição realizada é uma eleição de maioria simples. Podem-se definir o Payoff como:

$$Payoff_i == \begin{cases} Utilidade_i(X), & \text{Se candidato X ganhar a eleição por maioria} \\ -10 & \text{C.C.} \end{cases}.$$

Para melhor visualização, tome dado que o jogador 3 jogou $\{A\}$. Melhor resposta$_i =_{x \in \{A;B;C\}}$

| | | Jogador 1 A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| | A | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ |
| 2 | B | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $-10; -10; -10$ |
| | C | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $-10; -10; -10$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |

$\{\text{Payoff}_i(S_i; S^*_{-i})\} = \{A\}$

Como $\forall i \in I\ S^*_i \in_{S_i \in \{A;B;C\}} \{\text{Payoff}_i(S_i; S^*_{-i})\}$.

O perfil de estratégia Nash é {A;A;A} em estratégia pura.

**Matheus Almeida Hereman Apresentação 2**

**Estudo em teoria dos jogos aplicado a votação com preferências distintas**

O jogo é descrito com 3 jogares, um espaço estratégico de 3 candidotos que podem ser votados por cada um, e o payoff dos jogadores é dado abaixo. Como mostrado na apresentação anterior um candidato é um par ordenado de políticas. E cadapolítica é um número entre 0 e 1. No exemplo de jogo para os jogadores terem preferencias distintas os políticos detem as políticas a seguir.

- Candidato A = $\{1; 0,01\}$
- Candidato B = $\{0,5; 0,5\}$
- Candidato C = $\{0,01; 1\}$

E os jogadores auferem utilidades dos políticos com as seguintes funções utilidades.

$Utilidade_1 == (2 * [\text{Política 1}])^1 * (2 * [\text{Política 2}])^0$

$Utilidade_2 == (2 * [\text{Política 1}])^{0,5} * (2 * [\text{Política 2}])^{0,5}$

$Utilidade_3 == (2 * [\text{Política 1}])^0 * (2 * [\text{Política 2}])^1$

$Utilidade_1(A) = (2 * 1)^1 * (2 * 0)^0 = 2$

$Utilidade_1(B) = 1$

$Utilidade_1(C) = 0,02$

---

$Utilidade_2(A) = 0,1414$

$Utilidade_2(B) = 0,49$

$Utilidade_2(C) = 0,1414$

---

$Utilidade_3(A) = 0,02$

$Utilidade_3(B) = 1$

$Utilidade_3(C) = 2$

$$Payoff_i == \begin{cases} Utilidade_i(X), & \text{Se candidato X ganhar a eleição por maioria} \\ -10 & \text{C.C.} \end{cases}.$$

Para melhor visualização, tome dado que o jogador 3 jogou $\{A\}$.

| | | Jogador 1 A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| | A | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ |
| 2 | B | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $-10; -10; -10$ |
| | C | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $-10; -10; -10$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |

Para melhor visualização, tome dado que o jogador 3 jogou $\{B\}$ no primeiro quadro abaixo. Para melhor visualização, tome dado que o jogador 3 jogou $\{C\}$ no segundo quadro a baixo.

É necessário visualizar como tensor. Ou seja uma é um conjunte de matrizes que se empilham criando como se fosse um cubo.

| | | Jogador 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| | A | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $-10; -10; -10$ |
| 2 | B | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ |
| | C | $-10; -10; -10$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |

| | | Jogador 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| | A | $U_1(A); U_2(A); U_3(A)$ | $-10; -10; -10$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |
| 2 | B | $-10; -10; -10$ | $U_1(B); U_2(B); U_3(B)$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |
| | C | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ | $U_1(C); U_2(C); U_3(C)$ |

O Equilíbrio de Nash para o jogo simultanêo puros serão:
{(A,A,A);(A,A,C);(A,B,B);(A,C,C),(B,B,B),(B,B,C),(C,C,C)}

**Matheus Almeida Hereman Apresentação 3**

**Estudo em teoria dos jogos aplicado a votação jogo sequencial com informação imperfeita**

Há 6 jogadores, 3 candidatos {A, B, C} e 3 votantes {1, 2, 3}. O jogo é sequencial os 3 candidatos jogam primeiro simultaneamente, sua jogada consiste de escolher duas políticas cada, em sequência os votantes jogam vizualizando as políticas escolhidas pelos candidatos, porém também jogam de forma simultanea, após esta jogada os jogadores recebem seus payoffs. As estratégias dos jogadores são as seguintes:

- Canditos podem escolher duas políticas $(\theta, \beta)$, sendo estás $\in [0;1]$.
- Votantes escolhem candidatos de acordo com suas utilidades com suas políticas, caso a maior utilidade advenha de um caso de empate o político será escolhido nesta ordem $A \prec B \prec C$ , suas estratégias são votar em {A, B, C}

O payoff dos jogadores são definidos pelas duas funções a seguir.

$$Payoff_{\text{Candidato i}} == \begin{cases} 10, & \text{Se i ganhar as eleições} \\ -10 & \text{C.C.} \end{cases} \forall i \in \{A, B, C\}.$$

$$Payoff_{\text{Votante i}} == \begin{cases} Utilidade_i(X(política\theta, política\beta)), & \text{Se candidato X ganhar} \\ -10 & \text{C.C.} \end{cases}. \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

A eleição é por maioria. E que as funções utilidade dos votantes são as seguintes:
$Utilidade_1 == ln[([\text{Política}\theta])^1 * ([\text{Política}\beta])^0] = 1 * ln(\text{Política } \theta)$
$Utilidade_2 == (0,5) * ln\text{Política } \theta + (0,5) * ln\text{Política } \beta]$
$Utilidade_3 == 1 * ln\text{Política } \beta$

O timing do jogo é dado a seguir:

(i) Candidato A escolhe simultaneamente com canditos B, e C $\theta$

(ii) Candidato B escolhe simultaneamente com canditos A, e C $\theta$

(iii) Candidato C escolhe simultaneamente com canditos B, e A $\theta$

(iv) Candidato A escolhe simultaneamente com canditos B, e C $\beta$

(v) Candidato B escolhe simultaneamente com canditos A, e C $\beta$

(vi) Candidato C escolhe simultaneamente com canditos B, e A $\beta$

(vii) Votante 1 observa $\theta$s e $\beta$s dos canditos e escolhe seu voto simultaneamente aos votantes 2, e 3.

(viii) Votante 2 observa $\theta$s e $\beta$s dos canditos e escolhe seu voto simultaneamente aos votantes 1, e 3.

(ix) Votante 3 observa $\theta$s e $\beta$s dos canditos e escolhe seu voto simultaneamente aos votantes 2, e 1.

(x) Jogadores recebem seus payoffs

Resolvemos o jogo com uma abordagem com o espírito da indução retroativa. Primeiro achando uma função de melhores melhores respostas dos votantes.

Maximizando a função objetivo dos votantes se tem que para ter o voto do votante 1 deve-se ter $\theta$ o mais próximo de um possível, para conquistar o voto do votante 2 deve-se ter p $\theta$ e $\beta$ o mais próximo de um possível de 1, e para conquistar o voto do votante 3 é necessário ter o $\beta$ o mais próximo de 1 possível. Estes resultados ocorem por conta das derivadas das utilidades dos votantes, e pela restrição do valor das políticas.

Sabendo as melhores respostas dos votantes, os candidatos podem escolher suas melhores estratégias entre os $\theta$ e $\beta$ do conjunto praticável. Os candidatos querem ganhar por conta de ser aunica saída do jogo no qual eles terminam com payoff positivo.

Calculando o equilíbrio de nash sabendo das melhores respostas dos votantes é o jogador A, B e C utilizarem a estratégia $\theta = 1$ e $\beta = 1$, que maximiza a utilidade de todos os eleitores, pois todas as outra estratégias dos políticos são estritamente dominadas por jogar $\theta = 1$ e $\beta = 1$. Porém como definido anteriormente "caso a maior utilidade advenha de um caso de empate o político será escolhido nesta ordem $A \prec B \prec C$", portanto em equilíbrio o perfil de estrategia perfeita em subjogos será $(1, 1, 1, 1, 1, 1, C, C, C)$.

**Matheus Almeida Hereman Apresentação 4**