Circuitos de Primeira Ordem

Magno T. M. Silva e Flávio R. M. Pavan, 2015

1 Introdução

Em geral, um circuito de primeira ordem tem um único elemento armazenador de energia (um capacitor ou um indutor)[1] e é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem, ordinária, linear e a coeficientes constantes[2]. Considere, por exemplo, o circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão e com condição inicial $i(t_0) = i_0$, como mostrado na Figura 1.

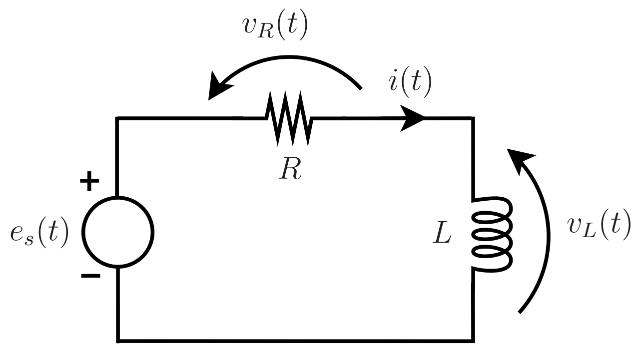

Figura 1: Circuito R, L série alimentado por um gerador ideal de tensão.

Escrevendo a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t).$$

Usando as relações constitutivas do indutor e do resistor (lei de Ohm), chega-se a

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t). \tag{1}$$

Dividindo essa equação por L, obtemos

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t). \tag{2}$$

Dessa forma, o circuito da Figura 1 é descrito pela equação diferencial acima e a corrente $i(t)$ é a função incógnita. Essa equação diferencial é:

[1] Pode haver circuitos de primeira ordem com mais de um elemento armazenador de energia. Por exemplo, um circuito que contém dois capacitores em paralelo é equivalente a um circuito com um único capacitor. Há outros casos que são chamados de circuitos redutíveis, como veremos no curso de *Circuitos II*.

[2] Nem todos os circuitos de primeira ordem são descritos por uma equação diferencial desse tipo. No entanto, vamos considerar aqui apenas circuitos elétricos lineares com parâmetros (R, L, C) constantes e sendo t a única variável independente da função incógnita.

1. **de primeira ordem**, pois aparece no máximo a primeira derivada da função incógnita;
2. **ordinária**, pois não há derivadas parciais (derivamos apenas com relação ao tempo, que é a única variável independente);
3. **linear**, pois não há funções não lineares da incógnita e/ou de suas derivadas; e
4. **a coeficientes constantes**, pois consideramos que o resistor e o indutor não variam no tempo.

A seguir, vamos resolver uma equação diferencial desse tipo para então voltarmos a esse circuito. Porém, antes disso, faça o exercício abaixo.

Exercício 1 – Circuito R, C paralelo

Considere o circuito R, C paralelo alimentado por um gerador ideal de corrente e com condição inicial $v(t_0) = v_0$, como mostrado na Figura 2. Verifique que esse circuito pode ser descrito pela equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t). \tag{3}$$

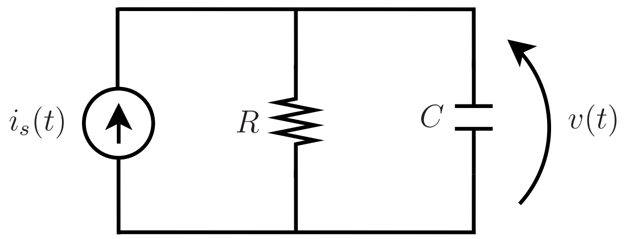

Figura 2: Circuito R, C paralelo alimentado por um gerador ideal de corrente.

2 Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

Considere a equação diferencial do tipo

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \tag{4}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, em que $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t)$ é a função incógnita, τ é uma constante real diferente de zero e $f(t)$ é uma função dada[3]. Como será visto nos cursos de *Cálculo*, a solução geral dessa equação para $t \geq t_0$ é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \tag{5}$$

em que $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

e $x_p(t)$ é uma solução particular da equação completa (4). A seguir, vamos obter $x_h(t)$ e $x_p(t)$.

[3]Em *Circuitos Elétricos*, $f(t)$ é uma função da excitação ou entrada da rede.

2.1 Solução da equação homogênea

Vamos primeiramente resolver a equação homogênea

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{1}{\tau} x_h(t), \tag{6}$$

Note que a função incógnita $x_h(t)$, solução da Equação (6), deve ter derivada proporcional à ela própria. Dada essa observação e descartando a solução trivial $x_h(t) = 0$, cabe uma pergunta: "que função não nula tem derivada proporcional a ela própria?" Uma possível candidata é a função exponencial. Portanto, vamos considerar que a solução de (6) é dada por

$$x_h(t) = Ae^{p(t-t_0)}, \tag{7}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}_h(t) = Ape^{p(t-t_0)}, \tag{8}$$

em que A e p são constantes. Substituindo (8) e (7) em (6), chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0} \left(p + \frac{1}{\tau} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{\tau}.$$

Portanto, a solução não trivial da equação diferencial (6) é dada por

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}.} \tag{9}$$

Note que a constante τ que aparece dividindo $x(t)$ na equação completa (4) aparece na solução da equação homogênea dividindo $-(t - t_0)$ no argumento da exponencial. Essa constante desempenha um papel importante na solução. Para $\tau > 0$, quanto maior o valor de τ, mais lentamente a solução da equação homogênea $x_h(t)$ se aproxima de zero. É possível notar por análise dimensional que τ deve ter unidade de tempo e por isso é chamada de **constante de tempo**. Por exemplo, a constante de tempo do circuito R, L da Figura 1 vale

$$\tau = \frac{L}{R},$$

enquanto a constante de tempo do circuito R, C da Figura 2 vale

$$\tau = RC.$$

A constante A será determinada posteriormente. Como veremos, essa constante depende da solução particular da equação completa (4) e também da condição inicial $x(t_0) = x_0$.

2.2 Solução particular da equação completa

Substituindo (9) em (5), a solução da equação completa (4) se reduz a

$$x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t). \tag{10}$$

Ainda precisamos de uma solução particular $x_p(t)$ da equação geral. Note que a solução da equação homogênea, parcela $Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$ em (10), corresponde a uma resposta transitória que desaparece (tende a zero) para $\tau > 0$ e $t \to \infty$. Dessa forma, calculando o limite para $t \to \infty$ em ambos os lados de (10), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \underbrace{\lim_{t\to\infty} Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}_{=0} + \lim_{t\to\infty} x_p(t). \tag{11}$$

Em outras palavras,

> uma solução particular da equação completa (4) é dada pela resposta permanente de $x(t)$, ou seja, a expressão de $x(t)$ quando $t \to \infty$.

Como veremos nos exemplos seguintes, a solução particular da equação completa é de fato a resposta em regime permanente de $x(t)$, quando um circuito elétrico é excitado por uma função do tipo degrau ou senoidal. No entanto, para alguns tipos de excitação como a exponencial, por exemplo, é necessário encontrar uma solução particular que não é a de regime permanente. Não veremos esses casos nesta apostila pelo fato de serem mais facilmente tratados por meio da Transformada de Laplace.

Exemplo 1 – Resposta do circuito R, L ao degrau

No circuito da Figura 1, considere que a excitação seja dada por

$$e_s(t) = EH(t - t_0)$$

e que a corrente inicial do indutor valha $i(t_0) = i_0$. Sabemos que para essa excitação, o indutor irá se comportar como um curto-circuito em regime ($t \to \infty$) e portanto

$$i(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{E}{R} = i_p(t).$$

Neste caso, a solução particular da equação geral é constante e é fácil verificar que ela satisfaz (2) para $t \geq t_0$. Assim, a expressão da corrente do indutor do circuito da Figura 1 é dada por

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0. \tag{12}$$

Como vimos, a constante de tempo desse circuito vale $\tau = L/R$. Para completar a resposta, ainda precisamos calcular a constante A. Para isso, vamos impor a condição inicial $i(t_0) = i_0$, ou seja,

$$i(t_0) = i_0 = A + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad A = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right).$$

Cabe observar que A depende da condição inicial e da excitação. Substituindo A em (12), chegamos a

$$\boxed{i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0.} \tag{13}$$

Como discutimos anteriormente, a parcela que corresponde à solução da equação homogênea desaparece com o passar do tempo e por isso é chamada de **resposta transitória**, enquanto a parcela que corresponde à solução particular da equação completa é a **resposta permanente**. Note que calculando $i(t)$ em $t = t_0$, obtemos a condição inicial $i(t_0) = i_0$ e calculando o limite dessa expressão para $t \to \infty$, chega-se a $i(\infty) = E/R$, que é a resposta em regime permanente.

Além disso, se $e_s(t) = 0$, dizemos que o circuito está **livre** e a resposta se reduz a

$$i_{\text{livre}}(t) = i_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}, \quad t \geq t_0,$$

que é chamada de **resposta livre** e ocorre devido apenas às condições iniciais. Em contrapartida, se $i_0 = 0$ e $e_s(t) = EH(t - t_0)$, a resposta se reduz a

$$i_{\text{forçada}}(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}\right), \quad t \geq t_0.$$

que é chamada de **resposta forçada** e ocorre devido apenas à função de excitação. Os gráficos dessas respostas estão mostrados na Figura 3 para $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$ e $e_s(t) = 12H(t)$ (V, s).

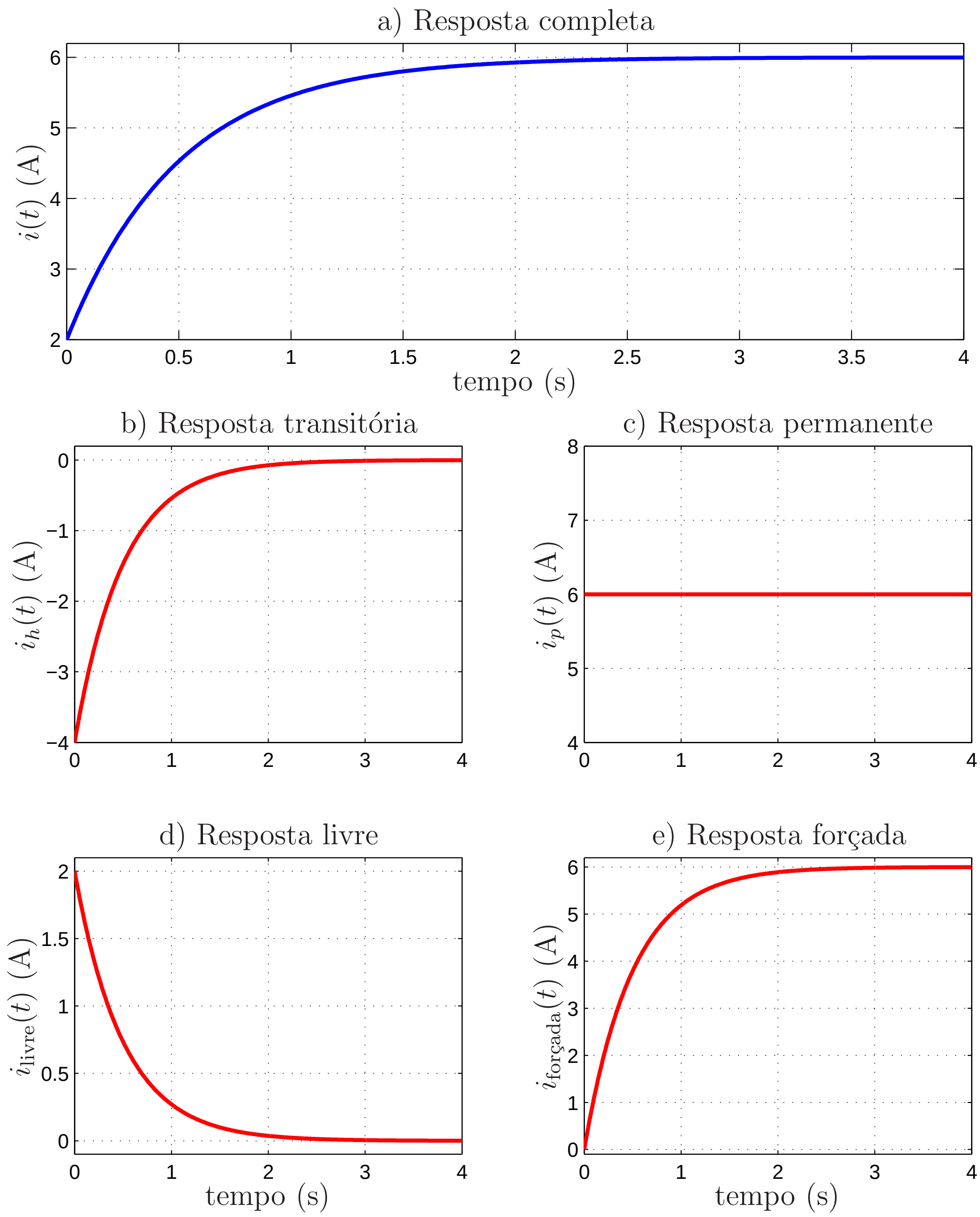

Figura 3: Respostas do circuito da Figura 1, considerando $t_0 = 0$, $i_0 = 2$ A, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$, $e_s(t) = 12H(t)$, (V, s).

Usando o princípio da superposição, podemos verificar que

$$i(t) = i_{\text{transitória}}(t) + i_{\text{permanente}}(t)$$

e

$$i(t) = i_{\text{livre}}(t) + i_{\text{forçada}}(t).$$

Exercício 2 – Resposta do circuito R, C ao degrau

Considere o circuito R, C paralelo da Figura 2 com excitação $i_s(t) = IH(t - t_0)$ e condição inicial $v(t_0) = v_0$. Verifique que a expressão da tensão do capacitor para $t \geq t_0$ é dada por

$$\boxed{v(t) = (v_0 - RI)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} + RI, \quad t \geq t_0.} \tag{14}$$

Obtenha as expressões das respostas transitória, permanente, livre e forçada para esse circuito e faça gráficos dessas respostas para $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 2\ \Omega$, $i_s(t) = 2H(t)$ (A, s).

Exemplo 2 – Resposta do circuito R, C à excitação senoidal

Considere o circuito R, C paralelo da Figura 2 com excitação $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}})H(t)$, (A, s) e condição inicial $v(0) = 8$ V. Adote $C = 0{,}5$ F e $R = 6\ \Omega$ e determine a resposta completa neste caso.

Substituindo os dados na equação diferencial (3), chega-se a

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{3}v(t) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}}). \tag{15}$$

Para resolver essa equação, vamos obter inicialmente uma solução particular. Como a excitação é senoidal e o circuito é linear, sabemos que em regime permanente a tensão do capacitor também será senoidal com $\omega = 2$ rad/s. Para obter $v_p(t)$, podemos usar fasores. A impedância desse circuito é dada por (verifique!)

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC} \Rightarrow Z(j2) = \frac{6}{1 + j6} = 0{,}1622 - j0{,}9730 = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}}\ \Omega.$$

O fasor da tensão do capacitor vale

$$\widehat{V}_p = Z(j2) \cdot \widehat{I}_s = 0{,}9864e^{-j80{,}54^{\mathrm{o}}} \cdot 2e^{j125{,}54^{\mathrm{o}}} = 1{,}9728e^{j45^{\mathrm{o}}}\ \mathrm{V}$$

e consequentemente a expressão de sua resposta permanente é

$$v_p(t) = 1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}),\ (\mathrm{V}, \mathrm{s}). \tag{16}$$

Substituindo $v_p(t)$ em (15), chega-se a

$$-2 \cdot 1{,}9728\,\mathrm{sen}(2t + 45^{\mathrm{o}}) + \frac{1}{3}1{,}9728\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}}),$$

ou ainda,

$$3{,}9456\cos(2t + 135^{\mathrm{o}}) + 0{,}6576\cos(2t + 45^{\mathrm{o}}) = 4\cos(2t + 125{,}54^{\mathrm{o}}).$$

Essa igualdade pode ser verificada facilmente usando fasores, o que mostra que a tensão do capacitor em regime permanente senoidal dada por (16) satisfaz (15), sendo uma solução particular dessa equação diferencial.

Uma vez encontrada a solução particular e lembrando que a constante de tempo do circuito R, C vale $\tau = RC = 3$ s, podemos obter a solução completa dada por

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-t/3} + 1{,}9728\cos(2t + 45^o), \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Ainda precisamos descobrir o valor de A e para isso, vamos impor a condição inicial $v(0) = 8$ V, ou seja,

$$v(0) = 8 = A + 1{,}9728\cos(2 \cdot 0 + 45^o) \Rightarrow A = 8 - 1{,}9728\cos(45^o) = 6{,}6050 \text{ V}. \tag{18}$$

Assim, a expressão da tensão do capacitor para $t \geq 0$ vale

$$\boxed{v(t) = 6{,}6050\ e^{-t/3} + 1{,}9728\cos(2t + 45^o), \ (\text{V, s}).} \tag{19}$$

Essa expressão é composta de dois termos: resposta transitória e resposta permanente. A resposta livre será dada por

$$v_{\text{livre}}(t) = v_0 e^{-t/\tau} = 8\ e^{-t/3}.$$

e a resposta forçada por

$$v_{\text{forçada}}(t) = v(t) - v_{\text{livre}}(t) = \underbrace{-1{,}3950}_{=6{,}6050-8}\ e^{-t/3} + 1{,}9728\cos(2t + 45^o).$$

Os gráficos dessas respostas estão mostrados na Figura 4.

Exercício 3 – Resposta do circuito R, L à excitação senoidal

Considere o circuito R, L série da Figura 1 com excitação $e_s(t) = 10\cos(5t + 30^o)H(t)$, (V, s) e condição inicial $i(0) = -4$ A. Adote $L = 0{,}5$ H e $R = 10\ \Omega$. Obtenha a expressão de $i(t)$ para $t \geq 0$ e obtenha também expressões das respostas transitória, permanente, livre e forçada para esse circuito. Esboce os gráficos dessas respostas.

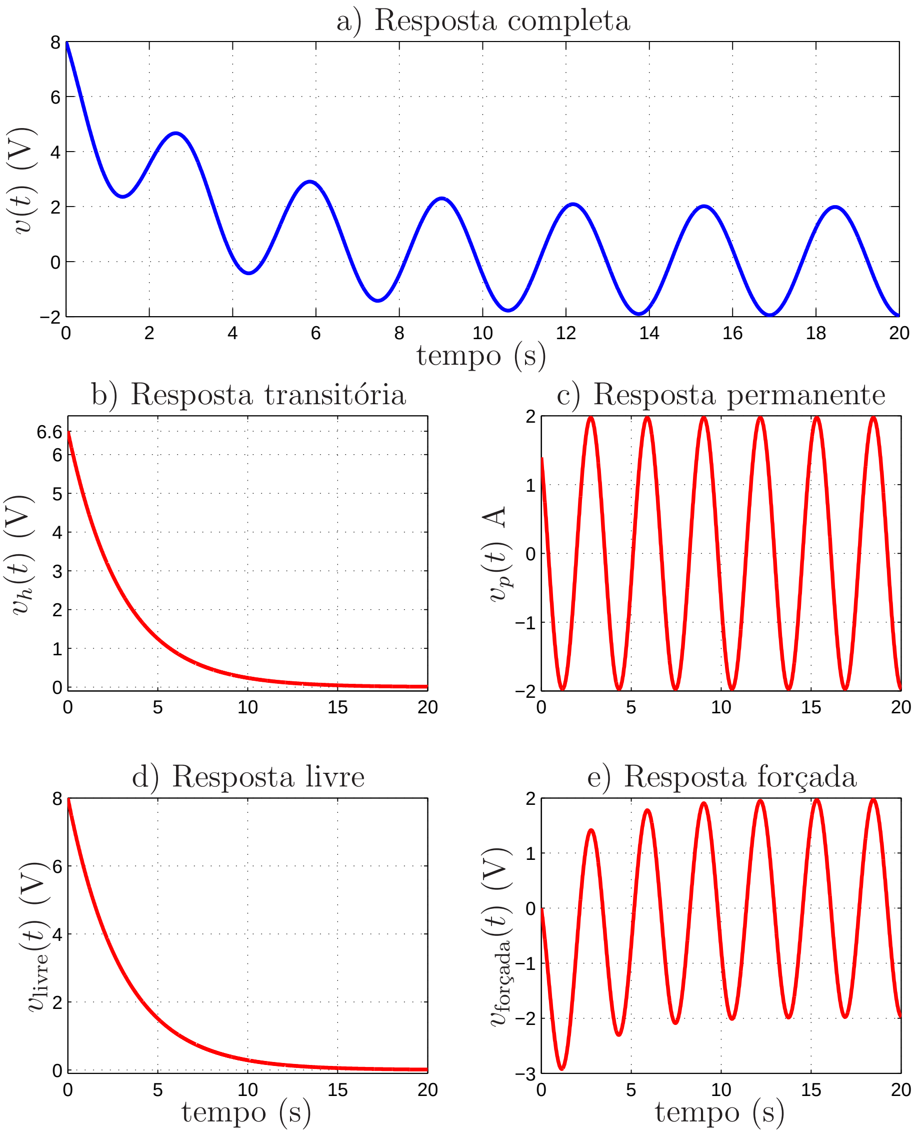

Figura 4: Respostas do circuito da Figura 2, considerando $t_0 = 0$, $v_0 = 8$ V, $C = 0{,}5$ F, $R = 6\ \Omega$, $i_s(t) = 2\cos(2t + 125{,}54^{\text{o}})H(t)$, (V, s).

3 Outras redes de 1ª ordem

Até agora, analisamos o comportamento de circuitos básicos de 1ª ordem sob ação de algumas excitações. Para alguns circuitos mais elaborados, pode ser mais trabalhoso obter a equação diferencial que descreve o comportamento da função incógnita. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 5 com condição inicial $i_L(t_0) = i_0$. Para usar o procedimento de resolução descrito anteriormente, teríamos que descobrir a equação diferencial que descreve o comportamento de $i_L(t)$ para $t \geq t_0$.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff na malha externa desse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_1(t) = e_s(t). \tag{20}$$

Usando as relações constitutivas do indutor e do resistor, chega-se a

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + R_1 i_1(t) = e_s(t). \tag{21}$$

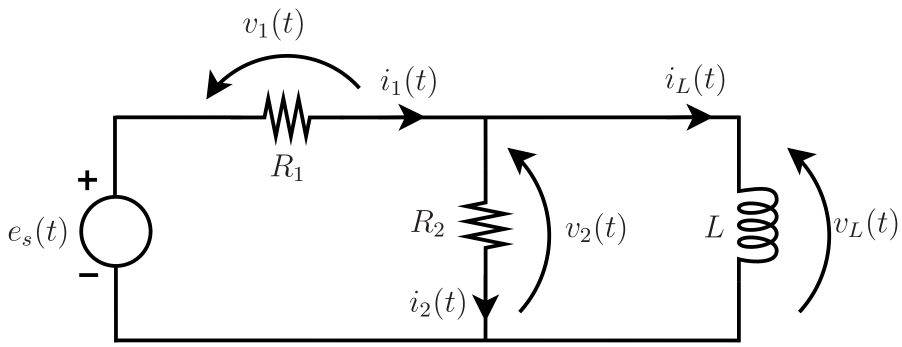

Figura 5: Circuito R, L alimentado por um gerador ideal de tensão.

Precisamos substituir $i_1(t)$ em (21) por alguma função de $i_L(t)$. Pela primeira lei de Kirchhoff, sabemos que

$$i_1(t) = i_2(t) + i_L(t). \tag{22}$$

Além disso,

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{e_s(t) - v_1(t)}{R_2} = \frac{e_s(t)}{R_2} - \frac{R_1 i_1(t)}{R_2}. \tag{23}$$

Substituindo (23) em (22), chega-se a

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{e_s(t)}{R_2} - \frac{R_1 i_1(t)}{R_2} + i_L(t) \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1(t) &= \frac{e_s(t)}{R_2} + i_L(t) \\ \Rightarrow i_1(t) &= \frac{e_s(t)}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Substituindo (24) em (21), obtemos

$$\begin{aligned} L\frac{di_L(t)}{dt} + R_1 \left(\frac{e_s(t)}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) \right) &= e_s(t) \\ \Rightarrow L\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_s(t). \end{aligned} \tag{25}$$

Finalmente, dividindo (25) por L, resulta

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{L} i_L(t) = \frac{1}{L} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e_s(t). \tag{26}$$

Comparando (26) com (4), notamos imediatamente que

$$\tau = \frac{L}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)} = \frac{L}{R_1 // R_2}.$$

Note que a constante de tempo corresponde à indutância dividida pela **resistência "vista"** pelo indutor no circuito da Figura 5, inativando-se o gerador independente de tensão. Além disso, o termo à direita na Equação (26), ou seja,

$$\frac{1}{L} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e_s(t),$$

corresponde ao inverso da indutância vezes a **tensão em aberto** entre os terminais do indutor (obtida diretamente por ser um divisor de tensão).

Não se tratam de coincidências: para encontrar a equação diferencial em $i_L(t)$ para o circuito da Figura 5, poderíamos ter obtido o gerador equivalente de Thévenin visto entre os terminais do indutor, e redesenhado o circuito como na Figura 6, com

$$R_0 = R_1//R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{(inativou-se o gerador de tensão)}$$

e

$$e_0(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_s(t) \quad \text{(divisor de tensão entre } R_1 \text{ e } R_2\text{).}$$

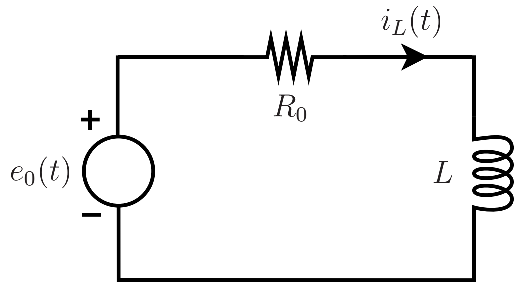

Figura 6: Circuito R, L equivalente ao da Figura 5.

Com essa transformação, fica mais fácil obter a equação diferencial que descreve $i_L(t)$, ou seja,

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_0}{L} i_L(t) = \frac{1}{L} e_0(t), \tag{27}$$

que é igual à Equação (26).

Vimos que podemos transformar a rede "vista" pelo bipolo armazenador de energia em um gerador equivalente de Thévenin (ou Norton), com resistência equivalente R_{eq}, para facilitar a obtenção da equação diferencial que rege o circuito. Como decorrência desse fato, para o caso geral de uma rede de 1ª ordem qualquer, a constante de tempo será

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}},} \tag{28}$$

se o elemento armazenador de energia for um indutor, sendo R_{eq} a resistência "vista" pelo indutor com geradores independentes inativados. Quando o elemento armazenador de energia for um capacitor, a constante de tempo será dada por

$$\boxed{\tau = R_{\text{eq}} C,} \tag{29}$$

em que R_{eq} é a resistência "vista" pelo capacitor com geradores independentes inativados. Finalmente, cabe notar que após a transformação, a obtenção da solução da equação diferencial é feita como mostrado na Seção 2.

Exercício 4 – Circuito com dois resistores e um capacitor

Considere o circuito da Figura 7 com condição inicial $v(t_0) = v_0$.

(a) Verifique que esse circuito pode ser descrito pela equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} v(t) = \frac{1}{C}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) i_s(t). \tag{30}$$

(b) Considere $i_s(t) = IH(t - t_0)$. Verifique que a expressão da tensão do capacitor para $t \geq t_0$ é dada por

$$\boxed{v(t) = (v_0 - R_1 I)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{(R_1+R_2)C}} + R_1 I, \;\; t \geq t_0.} \tag{31}$$

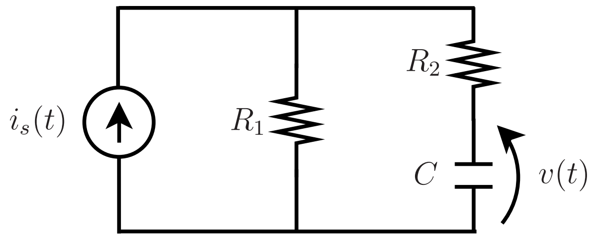

Figura 7: Circuito R, C alimentado por um gerador ideal de corrente.

Exemplo 3 – Resposta de rede de 1ª ordem com vinculado

Considere o circuito da Figura 8 com $r_m = 1\ \Omega$ e $i_L(0) = 8$ A. Determine a sua resposta completa $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

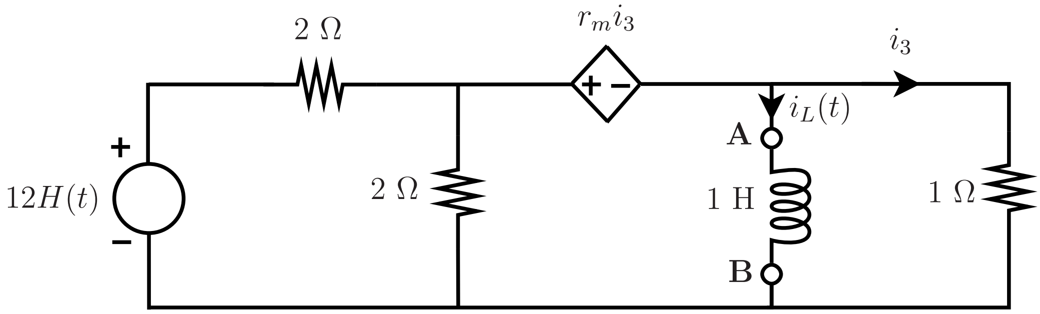

Figura 8: Circuito com gerador vinculado alimentado por um gerador ideal de tensão.

Não precisamos escrever a equação diferencial para determinar a resposta completa do circuito. Basta saber que, por se tratar de um circuito de 1ª ordem, a solução poderá ser escrita como

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t),$$

em que $i_{Lh}(t)$ é a resposta transitória e $i_{Lp}(t)$ é a resposta permanente. Sabemos que, para $t \geq 0$,

$$i_{Lh}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

O cálculo da constante de tempo $\tau = L/R_{\text{eq}}$ do circuito requer o conhecimento de R_{eq}, que é a resistência "vista" pelo indutor no circuito. Em outras palavras, precisamos calcular R_{eq} entre os nós **A** e **B** do circuito da Figura 8, que correspondem aos terminais onde o indutor está ligado. Vamos obter R_{eq} pela razão entre tensão em aberto e corrente de curto-circuito, ou seja,

$$R_{\text{eq}} = \frac{e_0}{i_0}.$$

Inicialmente, vamos fazer o cálculo da tensão em aberto e_0 para $t \geq 0$. Essa tensão é mostrada em vermelho na Figura 9. Note que a fonte de tensão de 12 V em série com o resistor de 2 Ω da Figura 8 foi transformada numa fonte de corrente de 6 A em paralelo com um resistor de 2 Ω. Além disso, esse resistor de 2 Ω foi associado em paralelo com outro de 2 Ω, resultando em um resistor de 1 Ω em paralelo com a fonte de corrente.

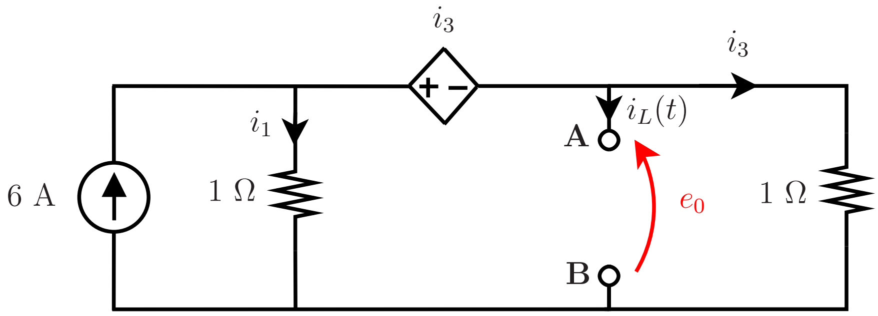

Figura 9: Circuito com gerador vinculado – tensão em aberto, $t \geq 0$.

Note que $i_L(t) = 0$ neste caso, pois os terminais **A** e **B** estão em aberto. Assim, aplicando a primeira lei de Kirchhoff, temos

$$6 = i_1 + i_3 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 6 - i_3.$$

Igualando a tensão dos dois ramos que estão em paralelo com o gerador de corrente, resulta

$$1 \cdot (6 - i_3) = i_3 + 1 \cdot i_3 \quad \Rightarrow \quad i_3 = 2 \text{ A}.$$

Portanto,

$$e_0 = 1 \cdot i_3 = 2 \text{ V}.$$

Para o cálculo da corrente de curto-circuito, vamos levar em conta o circuito mostrado na Figura 10.

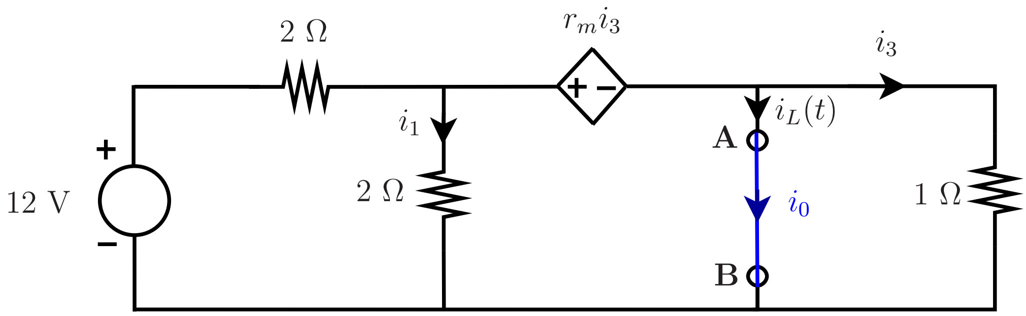

Figura 10: Circuito com gerador vinculado – corrente de curto-circuito, $t \geq 0$.

Devido ao curto-circuito, temos que $i_3 = 0$. Isso implica que a tensão do gerador vinculado será nula. Por isso, o curto-circuito está em paralelo com o resistor de 2 Ω. Logo, $i_1 = 0$ e temos

$$i_0 = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}.$$

Portanto, a resistência equivalente vale

$$R_{\text{eq}} = \frac{e_0}{i_0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ \Omega \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = 3 \text{ s}.$$

Com o valor de R_{eq}, reescrevemos as respostas transitória e completa como

$$i_{Lh}(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + i_{Lp}(t), \quad t \geq 0.$$

A resposta permanente $i_{Lp}(t) = i_L(\infty)$ é encontrada considerando que em corrente contínua o indutor é um curto-circuito. Assim, a resposta permanente é igual à corrente de curto-circuito que já calculamos. Logo,

$$i_{Lp}(t) = i_L(\infty) = i_0 = 6 \text{ A}.$$

Portanto, a resposta completa será

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 6, \quad t \geq 0.$$

Para encontrar A, impomos a condição inicial $i_L(0) = 8$ A. Desse modo, temos

$$i_L(0) = 8 = A + 6 \quad \Rightarrow \quad A = 8 - 6 = 2.$$

Finalmente, escrevemos a resposta completa como

$$\boxed{i_L(t) = 2e^{-\frac{t}{3}} + 6, \quad t \geq 0.} \tag{32}$$

O gráfico da resposta completa $i_L(t)$ do circuito da Figura 8, para $t \geq 0$, é mostrado na Figura 11.

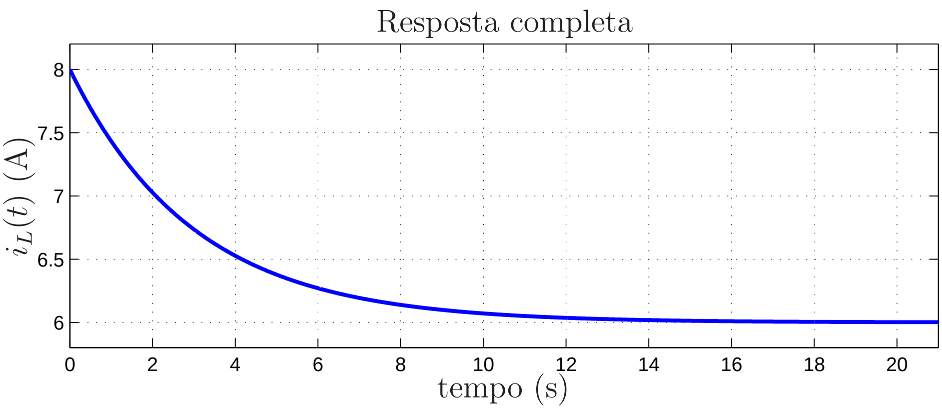

Figura 11: Resposta completa do circuito da Figura 8.

Ao observar o gráfico, notamos que a resposta transitória praticamente desaparece após a passagem de 5 constantes de tempo, ou seja, 15 segundos desde que o circuito foi ligado.

Exercício 5

Considere o circuito da Figura 12 em que a chave estava fechada há muito tempo e abre em $t = 0$.

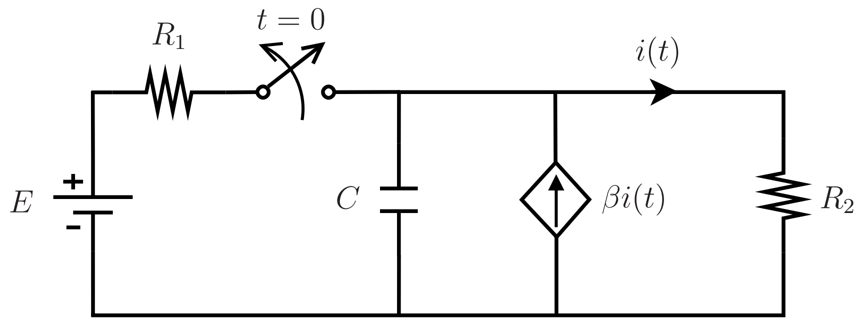

Figura 12

Sem obter diretamente a equação diferencial que descreve a corrente para $t \geq 0$, mostre que $i(t)$ vale

$$\boxed{i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0,} \tag{33}$$

com

$$i_0 = \frac{E}{R_1(1-\beta) + R_2}$$

e

$$\tau = \frac{R_2 C}{1-\beta}.$$