Sobre as definições (I)

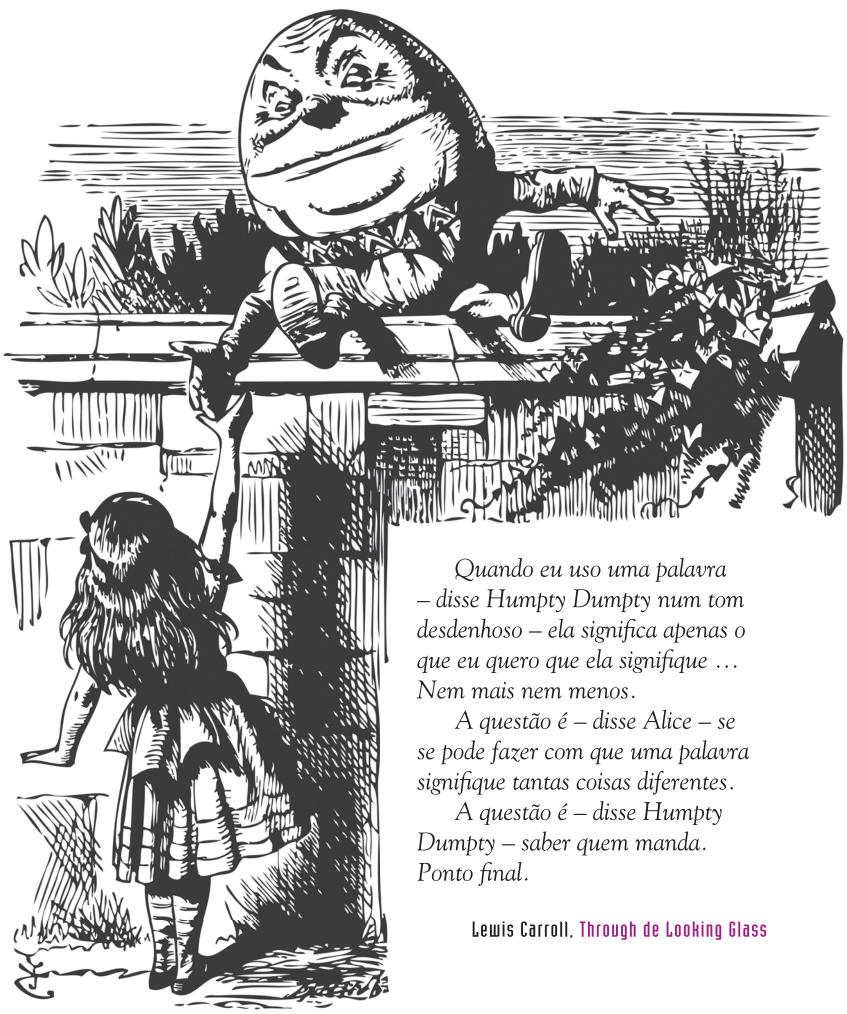
Eduardo Veloso, GTG

Este diálogo entre Alice e Humpty Dumpty tem sido invocado inúmeras vezes quando alguém pretende chamar a atenção para a verdadeira natureza das definições em matemática. No ProfMat 2005 o GTG organizou um grupo de discussão sobre este tema, dada a importância que ele tem no ensino da geometria. No espírito destas notas, vou apresentar algumas observações sobre esta questão, mas elas não pretendem de modo nenhum esgotá-la, e certamente outras notas virão dar mais achegas. Por outro lado, embora reflicta alguma coisa do que se passou nesse grupo de discussão, também não é um relato do mesmo.

O papel das definições, a sua natureza e o modo como devem ser abordadas no ensino básico e secundário dizem respeito à educação matemática em geral, mas o seu relevo no ensino da geometria resulta do facto de durante centenas de anos ter existido o objectivo de usar a geometria, e em particular versões mais ou menos completas dos *Elementos* de Euclides, para fazer compreender aos jovens o carácter hipotético-dedutivo das teorias matemáticas. Esse objectivo foi atingido com maior ou menor êxito ao longo dos séculos, mas em meados do último, vozes tão divergentes como as de Freudenthal[1] e de Dieudonné[2] mostraram como tal pretensão estava votada ao fracasso. Dieudonné chegou mesmo a classificar de *escroquerie* esse modo de ensinar a geometria.

Ora Euclides começa exactamente por apresentar, no primeiro volume dos Elementos, além dos postulados e dos axiomas, 23 "definições". Na realidade, muitas destas definições não definem nada (dão talvez uma vaga ideia do que se pretende estar a falar...). Por exemplo, *um ponto é aquilo que não tem parte, e uma* linha *é um comprimento sem espessura*… Apesar de toda a revisão de Euclides que foi feita no fim do século XIX e princípio do séc. XX, e apesar de muitos professores entre nós terem já interiorizado que é realmente uma *escroquerie* levar os alunos a repetir vacuidades deste tipo, quantas vezes, por exemplo, não ouvimos nós dizer aos alunos, ou não vimos escrito em manuais escolares, que *um poliedro é um sólido geométrico limitado por faces planas?* Dando por adquirido que o autor do manual tenha definido anteriormente o que é um *sólido*, e o que em particular faz dele um *sólido geométrico*, ou o que são *faces* de um tal ente misterioso (o que evidentemente não acontece nunca…), esse mesmo autor reagiria negativamente a um aluno que lhe apresentasse como exemplo o objecto representado na figura 1. Talvez, num rebate de consciência e num assomo de inspiração, dissesse que se tinha esquecido de dizer que faltava uma condição para que a noção de poliedro ficasse bem definida: *não era possível passar de uma face para outra a não ser atravessando uma aresta, mas sem ser numa das suas extremidades* …

Se outro aluno em seguida lhe apresentasse o objecto da figura 2, a nossa esperança é que o tal autor de manuais desistisse de o ser … A filosofia do Humpty Dumpty aplica-se aqui completamente: um poliedro é aquilo que eu quiser que seja, mas eu tenho que saber aquilo que quero!!! e esse é o



Quando eu uso uma palavra – disse Humpty Dumpty num tom desdenhoso – ela significa apenas o que eu quero que ela signifique … Nem mais nem menos.

A questão é – disse Alice – se se pode fazer com que uma palavra signifique tantas coisas diferentes.

A questão é – disse Humpty Dumpty – saber quem manda. Ponto final.

Lewis Carroll, Through de Looking Glass

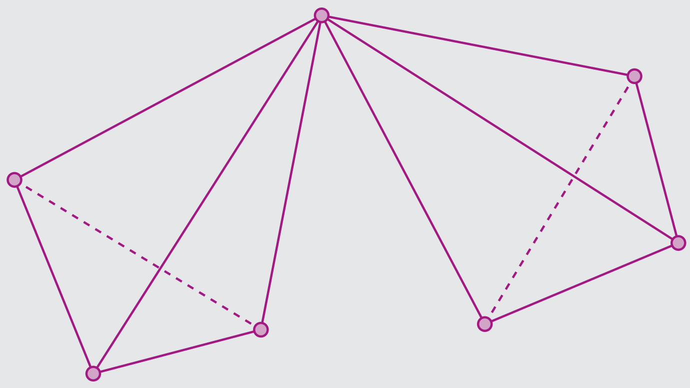


Figura 1.

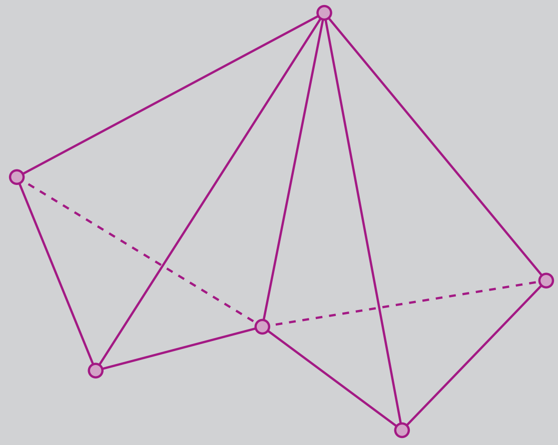


Figura 2.

problema deste autor e de todos nós que somos professores. Mas não podemos fugir dele, como este autor tentou fazer. Somos nós que mandamos, mas temos que saber mandar …

Noções primitivas e noções derivadas

Com a sua cristalina clareza, foi o seguinte texto de Sebastião e Silva que mostrou a muitos de nós, seus alunos, o ponto de partida para compreender o que é uma definição em matemática:

> […] as noções que nós possuímos efectivamente sobre um dado assunto são em número *finito*, de modo que, se procurarmos definir logicamente umas noções a partir das outras, havemos de chegar automaticamente a *um fim* (a não ser que se volte ao ponto de partida, caindo num ciclo vicioso). Por conseguinte, haverá sempre noções que devemos renunciar a definir e que temos portanto de admitir como dadas *a priori*, intuitivamente: tais são as chamadas noções primitivas. O *necessário é fixar, em cada teoria dedutiva, quais as noções aí consideradas primitivas — de contrário toda a definição deixará de ter sentido.*[3]

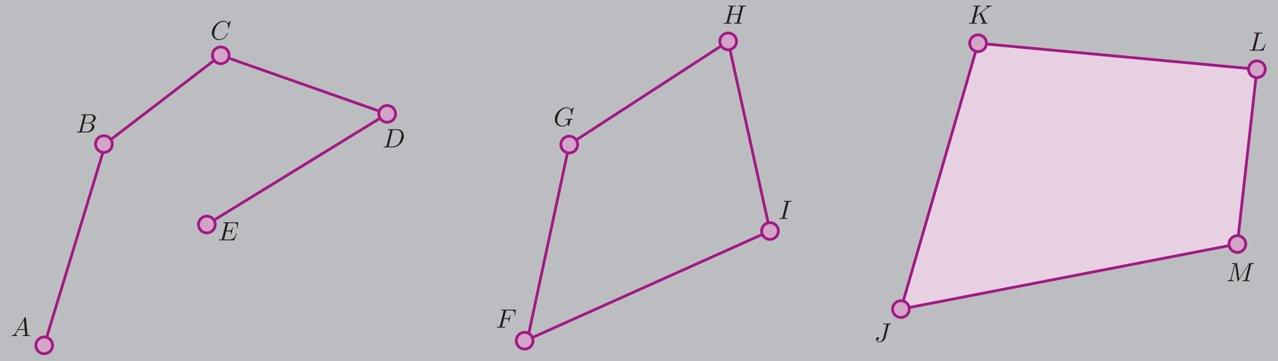
Uma teoria matemática, como por exemplo a geometria euclidiana, pode admitir diversas formulações como sistema axiomático. Assim, as noções de *ponto*, *recta*, *plano*, *situado entre* e *congruência*, são primitivas da geometria euclidiana, na construção axiomática apresentada por Hilbert nos *Fundamentos da Geometria*[4]. Mas na chamada construção axiomática por via métrica — seguida por alguns autores[5] — a noção de *distância* é primitiva.

Todas as noções não primitivas de uma dada teoria — as chamadas *noções derivadas* — devem ser definidas logicamente, utilizando exclusivamente noções primitivas ou outras derivadas que já tenham sido definidas anteriormente. No entanto, a matemática não é uma ciência morta nem sequer "congelada": está em cada momento a crescer, através do desenvolvimento de novos conceitos e obtendo resultados em teorias já existentes, ou mesmo pela criação de novas teorias. Por outro lado, toda a pessoa que trabalha em matemática — por exemplo um professor ou um autor de um artigo científico ou de divulgação — não está preso ao significado que outros já deram dos termos que quer utilizar. Esta liberdade, que deve ser evidentemente usada com bom senso e responsavelmente, é ainda dificilmente aceite por muitos de nós, professores. Vejamos um exemplo.

O que é um polígono?

Se nos mostram uma figura desenhada num papel, e nos perguntam se é um polígono, a melhor resposta a dar é … *depende*. Depende da definição que estamos a adoptar. Mas a definição de polígono, uma noção tão antiga, que já vem do tempo de Euclides, não está já consolidada… ainda pode

Figura 3.



haver dúvidas? Para constatarmos que concretamente, mesmo entre os professores de matemática, existem diferentes concepções do que é um polígono, basta esboçar numa folha de papel seis figuras (ver figura 3) e fazer a pergunta: destas, quais são polígonos?

Muito provavelmente, as respostas obtidas seriam aproximadamente as seguintes (para simplificar, designamos as figuras pela lista dos vértices):

- todos afirmariam que $ABCDE$ e XW não são polígonos; isto porque duas convicções fortes em relação aos polígonos são as seguintes: têm que ser figuras fechadas… (seja lá o que isto quer dizer…) e os "lados" não podem ser curvos…

Relativamente às outras figuras,

- a maioria não aceitaria as figuras *NPQO* e *TUV* (sobretudo esta última) como polígonos
- as figuras $FGHI$ e $JKLM$ seriam aceites, apareceria no entanto alguma hesitação relativamente à aceitação das duas ou apenas da segunda.

Na realidade, se considerarmos que na figura $JKLM$ o interior faz parte do polígono (o que a cor quer dar a entender) e na figura $FGHI$ apenas os segmentos fazem parte do polígono, então a maioria das respostas dirão que o único polígono "verdadeiro" é $JKLM$. Na sessão de discussão do Profmat que referi, praticamente todos os colegas presentes viam um polígono como contendo o interior mas quando se pedia para desenharem um polígono não assinalavam esse facto, e faziam figuras do tipo $FGHI$.

Verdadeiramente, e em teoria, nada nos impede de adoptar definições de polígono em que cada uma das figuras apresentadas se enquadre como exemplo. No entanto, a definição mais habitual no ensino elementar é a que corresponde à figura $JKLM$. A definição mais corrente em matemática é a que corresponde à figura $FGHI$, logo seguida daquela que aceita figuras como $NOQP$. Mas porque não uma definição em que ainda caiba o *dígono*, um polígono formado por dois segmentos, *TU* e *UV*, coincidentes …

Em matemática, se estamos a escrever um livro em que vamos apresentar resultados sobre polígonos, devemos ter o cuidado de dizer qual é a definição de polígono que adoptamos. Mas até é possível adoptar definições diferentes ao longo do mesmo livro! No grupo de discussão a que nos temos referido, o nível de aceitação das ideias propostas pelo GTG aumentou consideravelmente quando mostrámos o seguinte texto de Coxeter, extraído da página 1 do livro *Regular Polytopes*[6]:

Definimos polígono [plano] de n lados como uma cadeia de n segmentos A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1, unindo pares consecutivos de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Os segmentos e pontos dizem-se *lados* e *vértices* do polígono. Até ao início do Capítulo VI, insistiremos que os lados não se intersectam uns aos outros.

Ou seja, até ao capítulo VI a figura $NOQP$ não é um polígono, depois já o é. Ou seja, *depende*…

Naturalmente, os pontos de vista aqui expostos têm consequências no ensino da geometria, como veremos numa nota seguinte.

Notas

1. Ver o capítulo XVI, The Case of Geometry, no livro *Mathematics as an Educational Task*, de Hans Freudenthal. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company, 1973.
2. Intervenção no Seminário de Royaumont, em 1959, onde foi lançado o movimento da Matemática Moderna na Europa: *Mathématiques Nouvelles*, ed. OECE.
3. Ver pág. 200 do vol. I dos *Textos Didácticos* de J, Sebastião e Silva, Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.
4. *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert. Trad. de A. J. Franco de Oliveira, ed. Gradiva, 2003.
5. Por exemplo, no livro *Geometria Euclidana* de A. J. Franco de Oliveira, ed. Universidade Aberta.
6. *Regular Polytopes*, de H.S.M. Coxeter. Ed. Dover, 1973.

Eduardo Veloso, Grupo de Trabalho de Geometria da APM