

Introdução às Medidas em Física
4300152
4^a Aula

Experiência II

Densidade de Sólidos

Objetivos

Medidas indiretas

Medida da densidade de sólidos

Noções de Estatística

Propagação de Incertezas

Compatibilidade entre medidas

Incertezas instrumentais

Em geral é a metade da menor divisão

Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex:paquímetro)

incerteza é a menor divisão do mesmo

Dificuldade de leitura

Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)

Incertezas estatísticas

Flutuação no resultado das medidas

medida = média de todas as medidas efetuadas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

incerteza estatística = desvio padrão da média

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Qual é a incerteza de uma medida?

Várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua

$$\sigma_{L_{instr}} = 0,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_{estat}}$$

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estat}}^2}$$

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

Período do pêndulo medido com o relógio de pulso Incerteza instrumental > estatística

Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s Incerteza estatística > instrumental

Medida da Densidade de Sólidos

Objetivo

Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

Identificação

Comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

Densidade (materiais sólidos homogêneos)

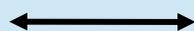
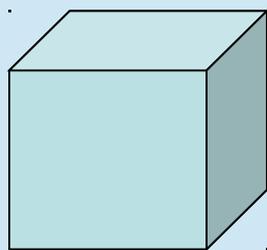
$$d = m/V$$

Necessário medir a massa e o volume do objeto

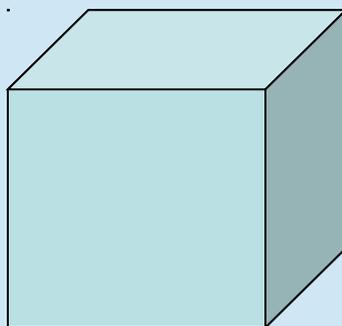
Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

O volume do cubo tem uma incerteza?

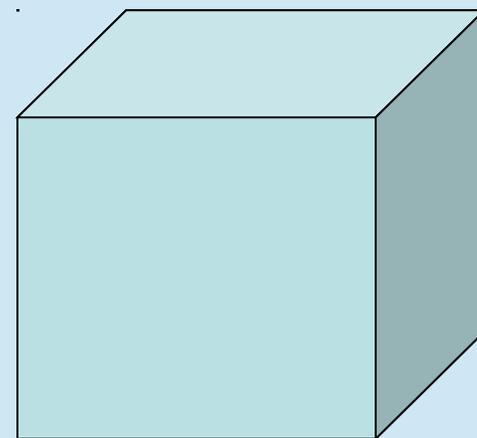
A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se propaga para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).



$L - \Delta L$



L



$L + \Delta L$

Cálculo da densidade

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

onde, o volume V é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

e m , h e D são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro.

Propagação de incerteza

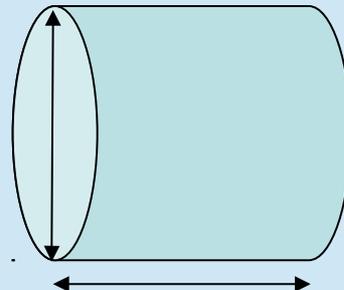
E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?

O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi (D/2)^2 h$$

onde, D é o diâmetro do cilindro e h a sua altura.

$D \pm \Delta D$



$h \pm \Delta h$

Propagação de incerteza

Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

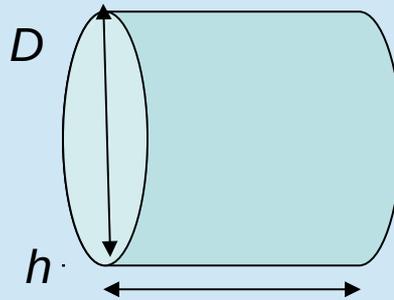
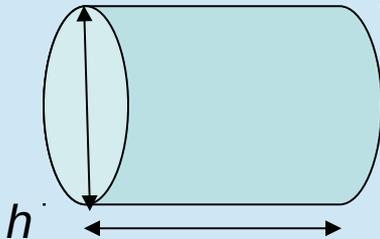
Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D+\Delta D)/2]^2 h$$

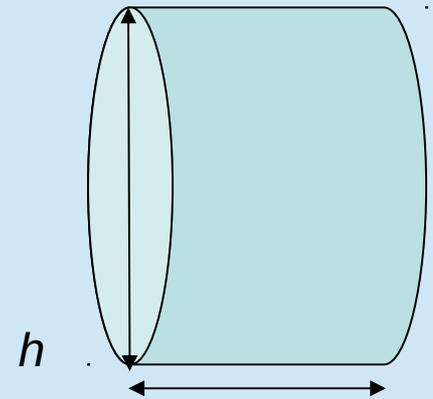
$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$$

$$\Delta V \text{ devido a } \Delta D = (V_{max} - V_{min})/2$$

$D-\Delta D$



$D+\Delta D$



Propagação de incerteza

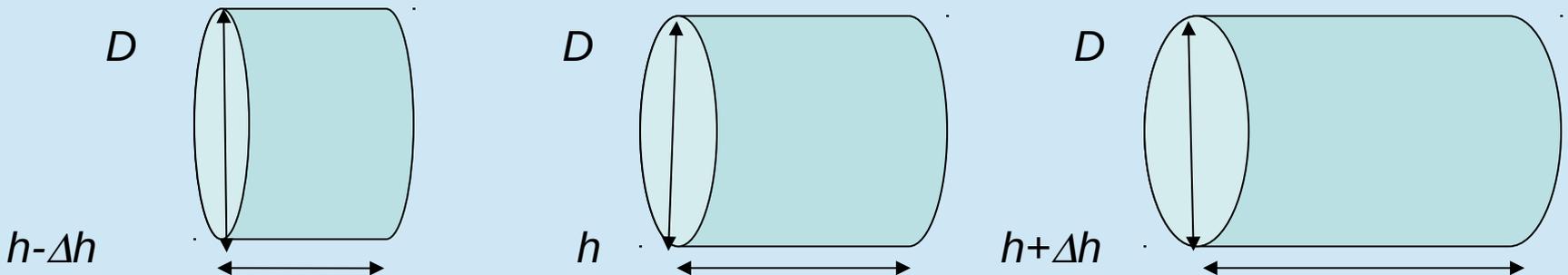
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h + \Delta h)$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h - \Delta h)$$

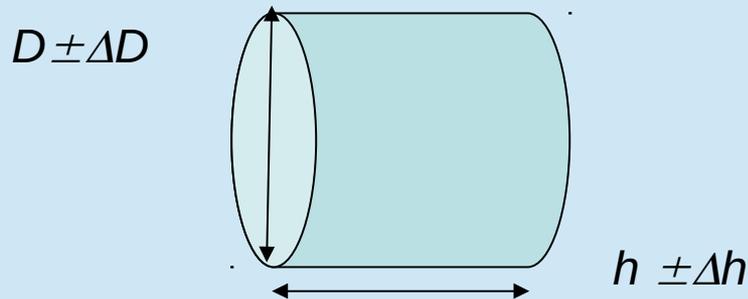
$$\Delta V \text{ devido a } \Delta h = (V_{max} - V_{min})/2$$



Propagação de incerteza

E combinamos as duas incertezas com uma soma quadrática. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$



$$s_V = \sqrt{(s_V^D)^2 + (s_V^h)^2}$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2} \right]$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x') - f(x - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

Cálculo da incerteza do volume do cilindro

Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x') - f(x - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2} \right] \cdot \frac{s_D}{s_D}$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2 \cdot s_D} \right] \cdot s_D \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$

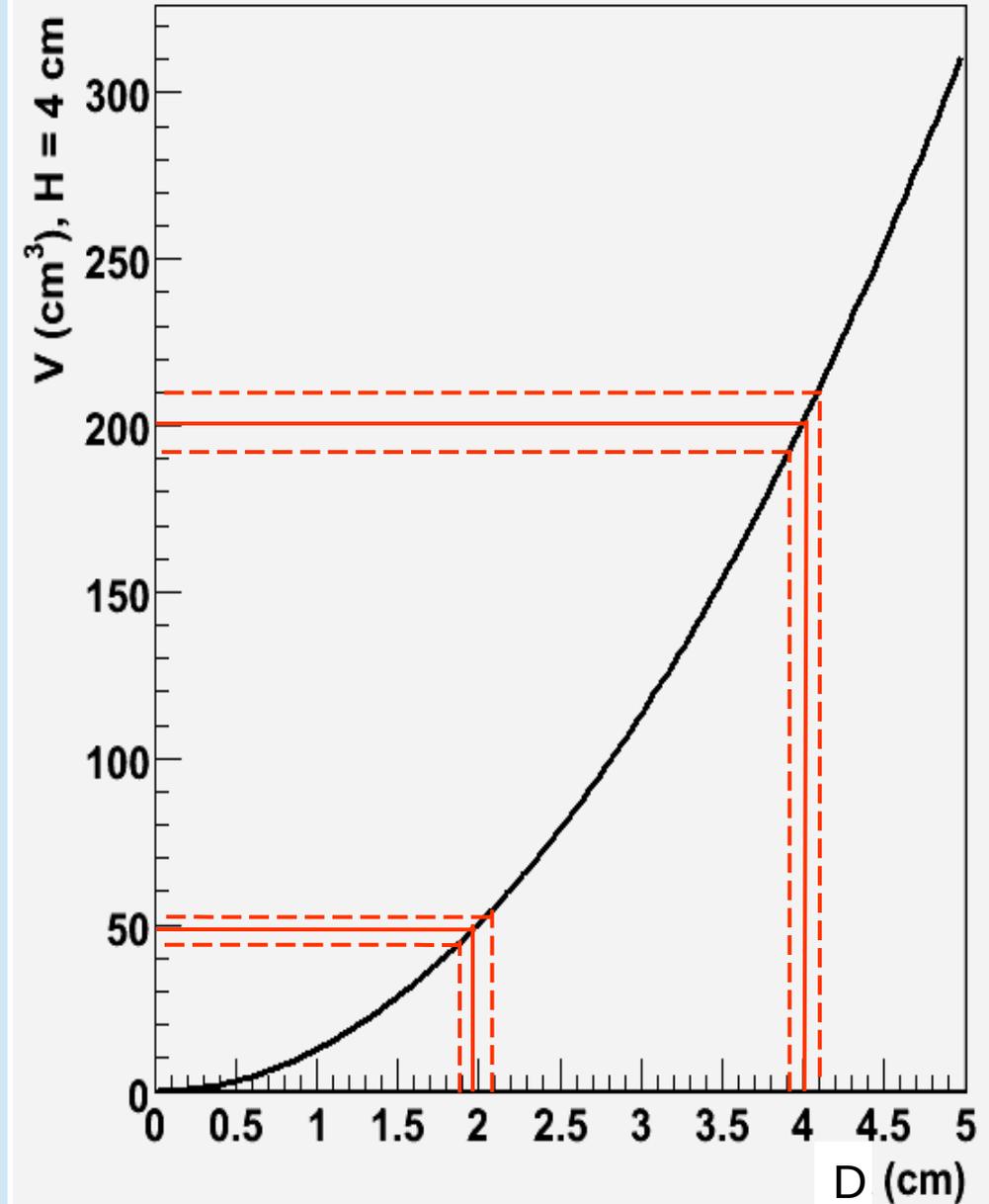
Propagação de incertezas

Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

Esta fórmula é razoável?

$$s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$



Cálculo da incerteza do volume do cilindro

$$s_V^h = \left[\frac{V(h + s_h) - V(h - s_h)}{2 \cdot s_h} \right] \cdot s_h \Rightarrow s_V^h = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot s_h$$

Portanto:

$$s_V = \sqrt{(s_V^D)^2 + (s_V^h)^2}$$

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D} \right)^2 \cdot s_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)^2 \cdot s_h^2}$$

Como calcular as derivadas

Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\pi}{4} D^2 H \right) = \frac{\pi}{4} H \frac{\partial(D^2)}{\partial D} = \frac{\pi}{4} H (2D) = \frac{\pi}{2} DH$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{\pi}{4} D^2 H \right) = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial(H)}{\partial H} = \frac{\pi}{4} D^2 (1) = \frac{\pi}{4} D^2$$

Desse modo...

Incerteza do volume do cilindro

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H} \sigma_H\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} DH \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} D^2 \sigma_H\right)^2} = \frac{\pi}{4} D^2 H \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2}$$

Cálculo da incerteza da densidade

Analogamente ao cálculo da incerteza do volume

$$s_d = \sqrt{(s_d^m)^2 + (s_d^V)^2}$$

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \cdot s_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial V}\right)^2 \cdot s_V^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial V} = m \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{V} \right) = -\frac{m}{V^2} ; \quad \frac{\partial d}{\partial m} = \frac{1}{V} \frac{\partial m}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{1}{V} s_m\right)^2 + \left(-\frac{m}{V^2} s_V\right)^2} \Rightarrow \frac{s_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2}$$

Cálculo direto

$$d = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h} \quad s_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m} s_m\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial D} s_D\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial h} s_h\right)^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h} \frac{\partial m}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

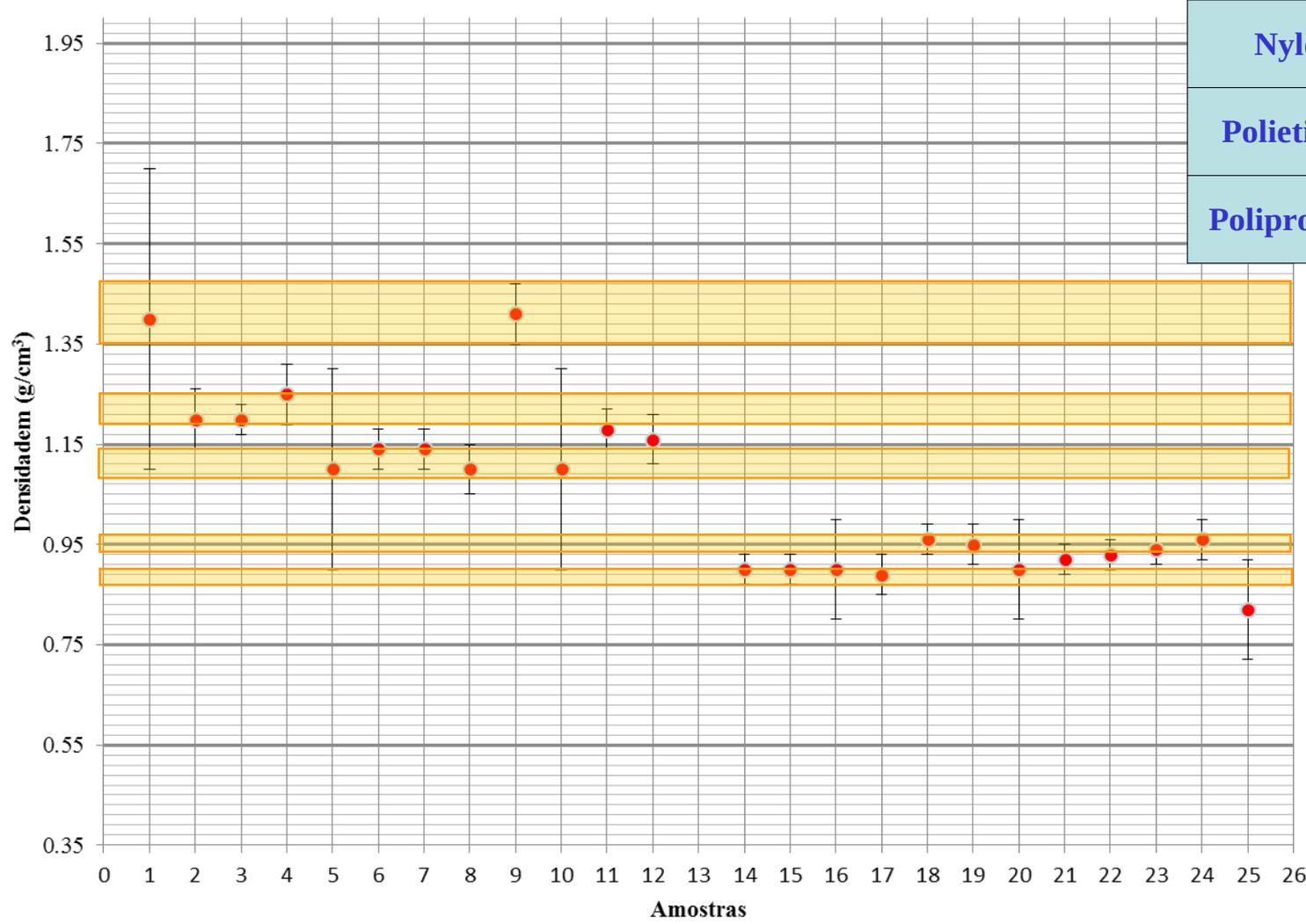
$$\frac{\partial d}{\partial D} = \frac{4m}{\pi h} \frac{\partial(D^{-2})}{\partial D} = \frac{4m}{\pi h} \frac{(-2)}{D^3}$$

$$\frac{\partial d}{\partial h} = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{\partial(h^{-1})}{\partial h} = \frac{4m}{\pi D^2} \frac{(-1)}{h^2}$$

$$\frac{s_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{s_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{h}\right)^2}$$

Dados primeira aula

material	d(g/cm ³)
PVC	1,35 a 1,45
Acrílico	1,17 a 1,20
Nylon	1,09 a 1,14
Polietileno	0,941 a 0,965
Polipropilen	0,900 a 0,915



Conclusões Parciais

Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?

Como seria possível saber isso?

Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades

Procedimento Experimental:

Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros

Cada aluno da dupla fará novamente a medida da massa, mas desta vez usando uma balança analítica

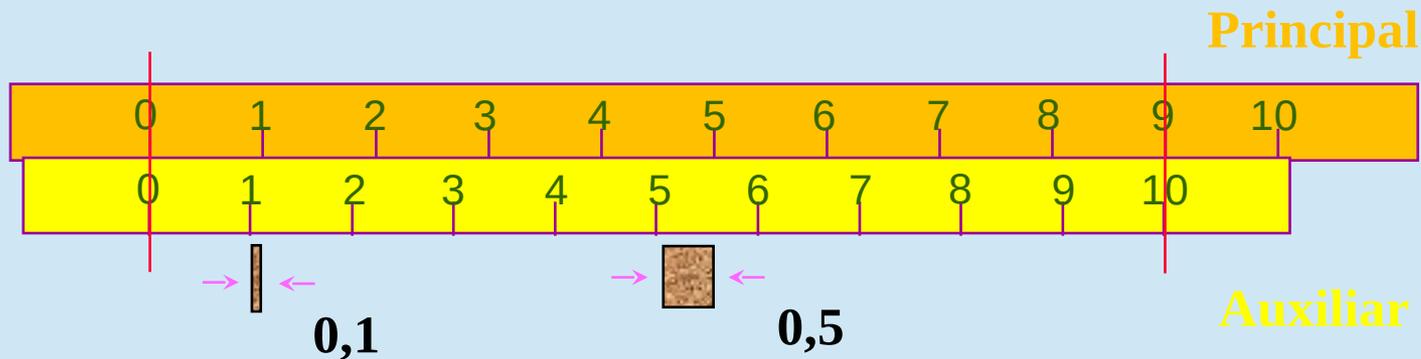
Cada aluno fará novamente as medidas para cálculo do volume, porém usando um paquímetro e micrometro

➤ **CUIDADO!!! Agora as medidas podem diferir, portanto fazer várias medidas de cada grandeza (8 no mínimo).**

Paquímetro

Nônio ou Vernier

Escala auxiliar para aumentar a precisão da medida



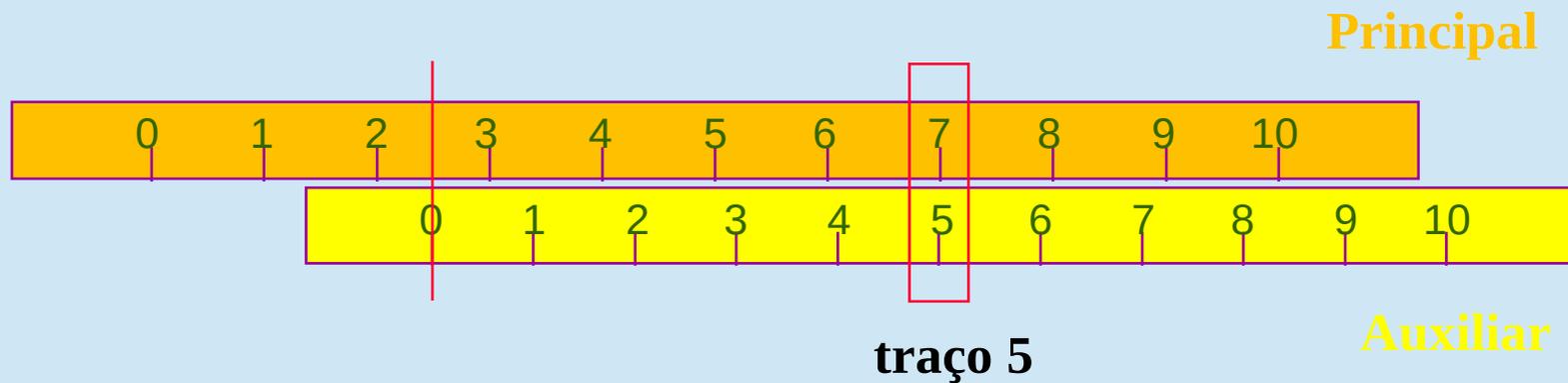
10 div escala auxiliar = 9 div escala principal

Precisão (nônio) = valor da menor divisão do nônio

$$\frac{\text{Valor da menor divisão Principal}}{\text{Número de divisões auxiliar}} = \frac{1 \text{ div}}{10} = 0,1 \text{ div}$$

Leitura com nônio

- 1) Posição zero do nônio
- 2) Número do traço da escala auxiliar que melhor coincidir com traço da escala principal



$$5 \times \text{precisão do nônio} = 5 \times 0,1 = 0,5$$

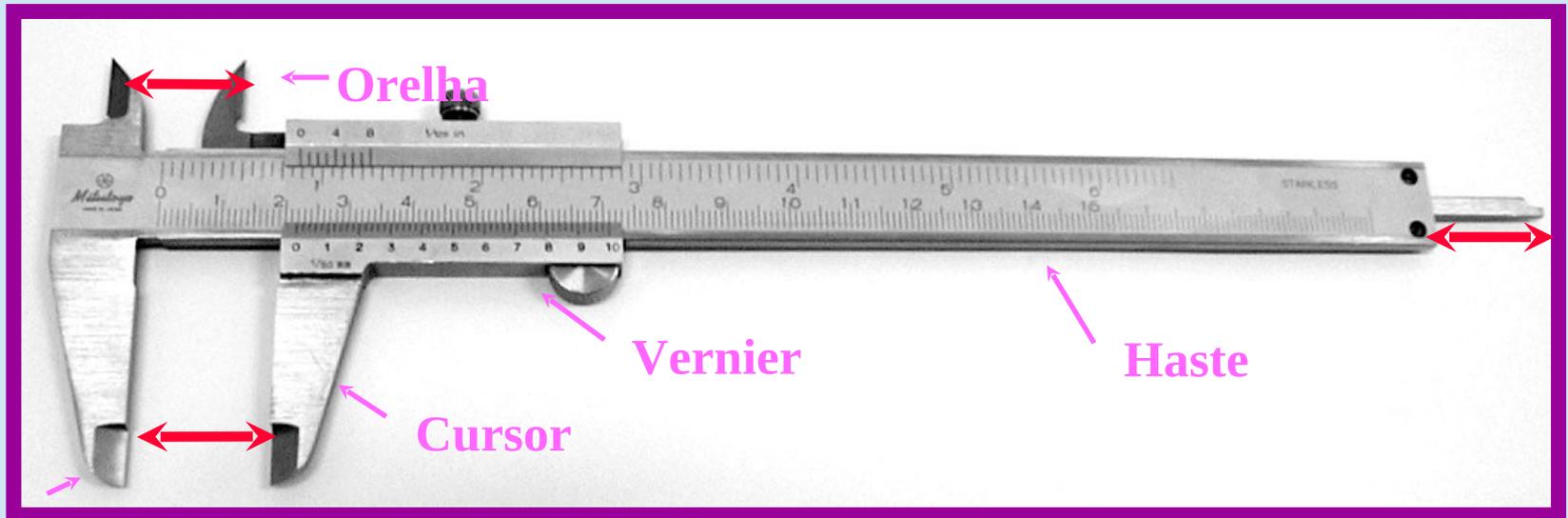
$$\text{Medida} = (2,5 \pm 0,1) \text{ div}$$

Paquímetro

Instrumento para medir comprimento

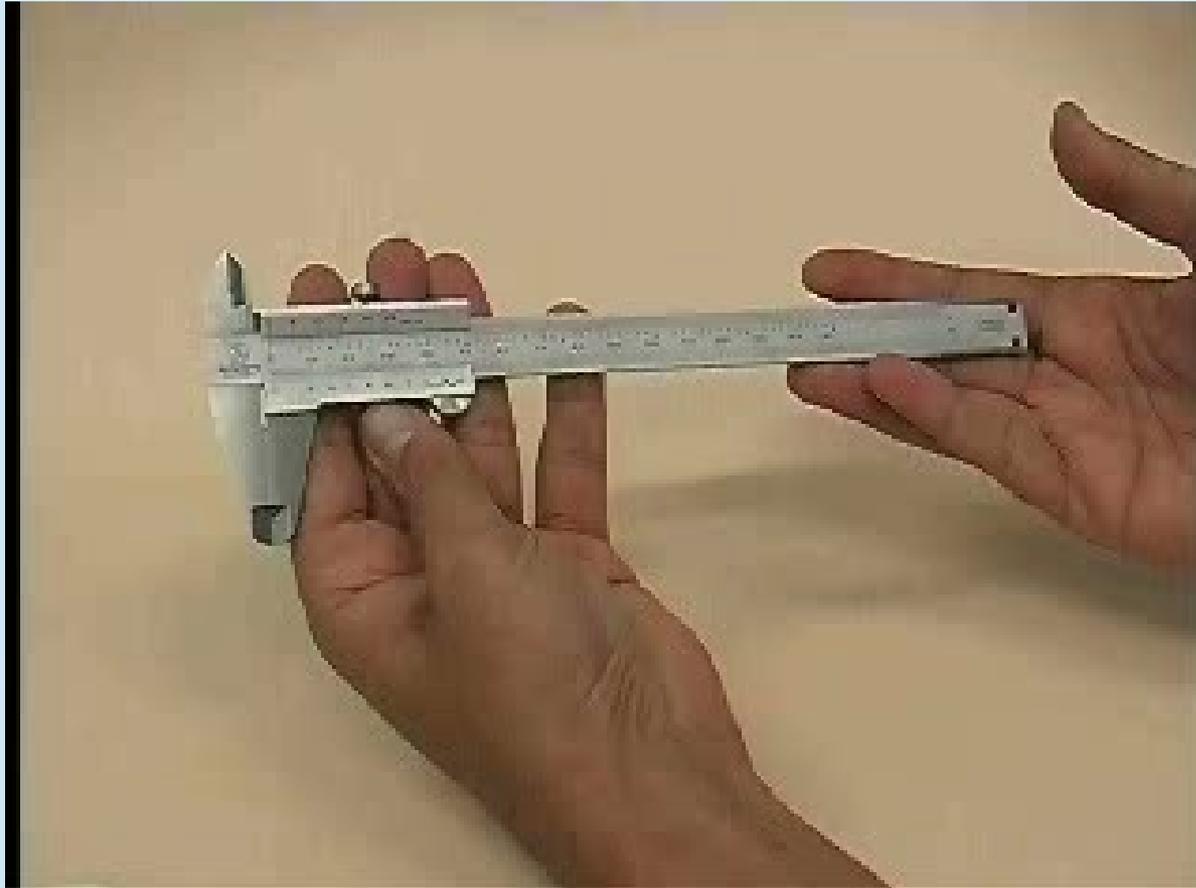
Escala auxiliar (nônio ou vernier)

Precisão de centésimos de mm

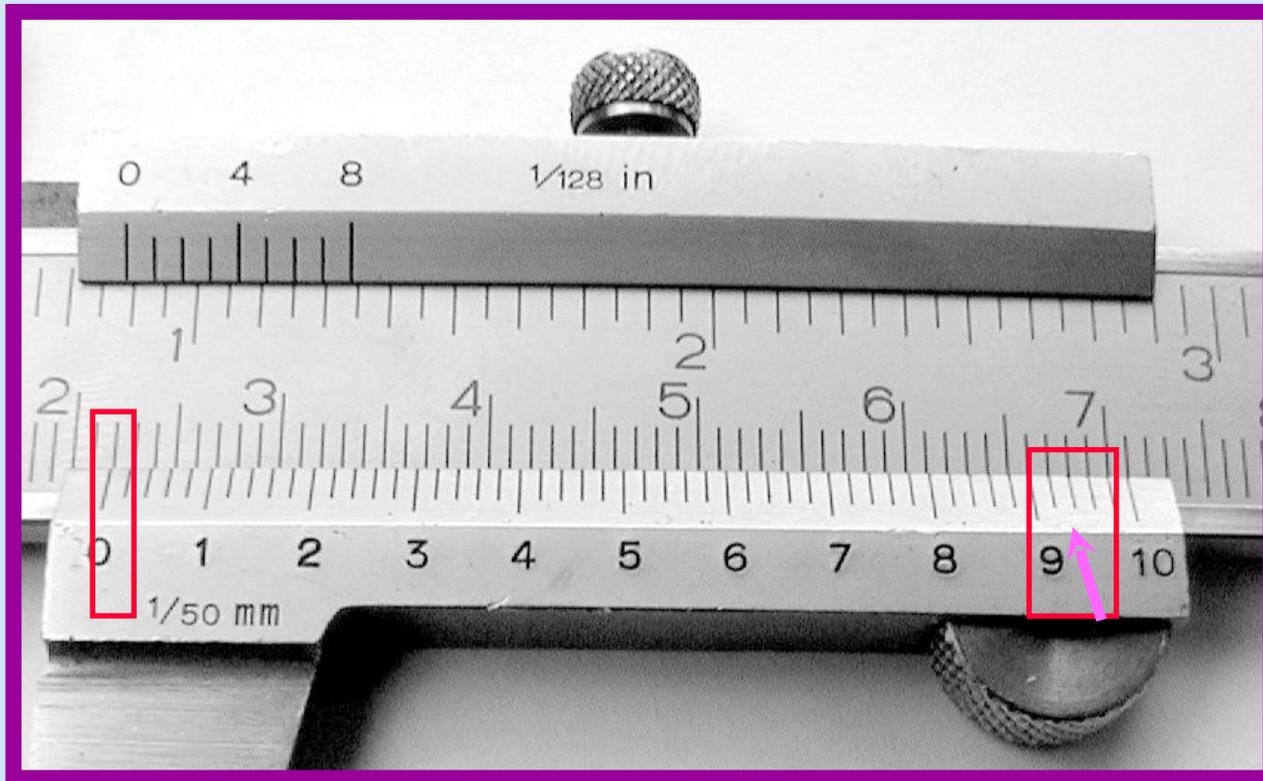


Encosto
fixo

Usando o paquímetro



Leitura com paquímetro



Resolução: $1/50 \text{ mm} = 0,02 \text{ mm}$

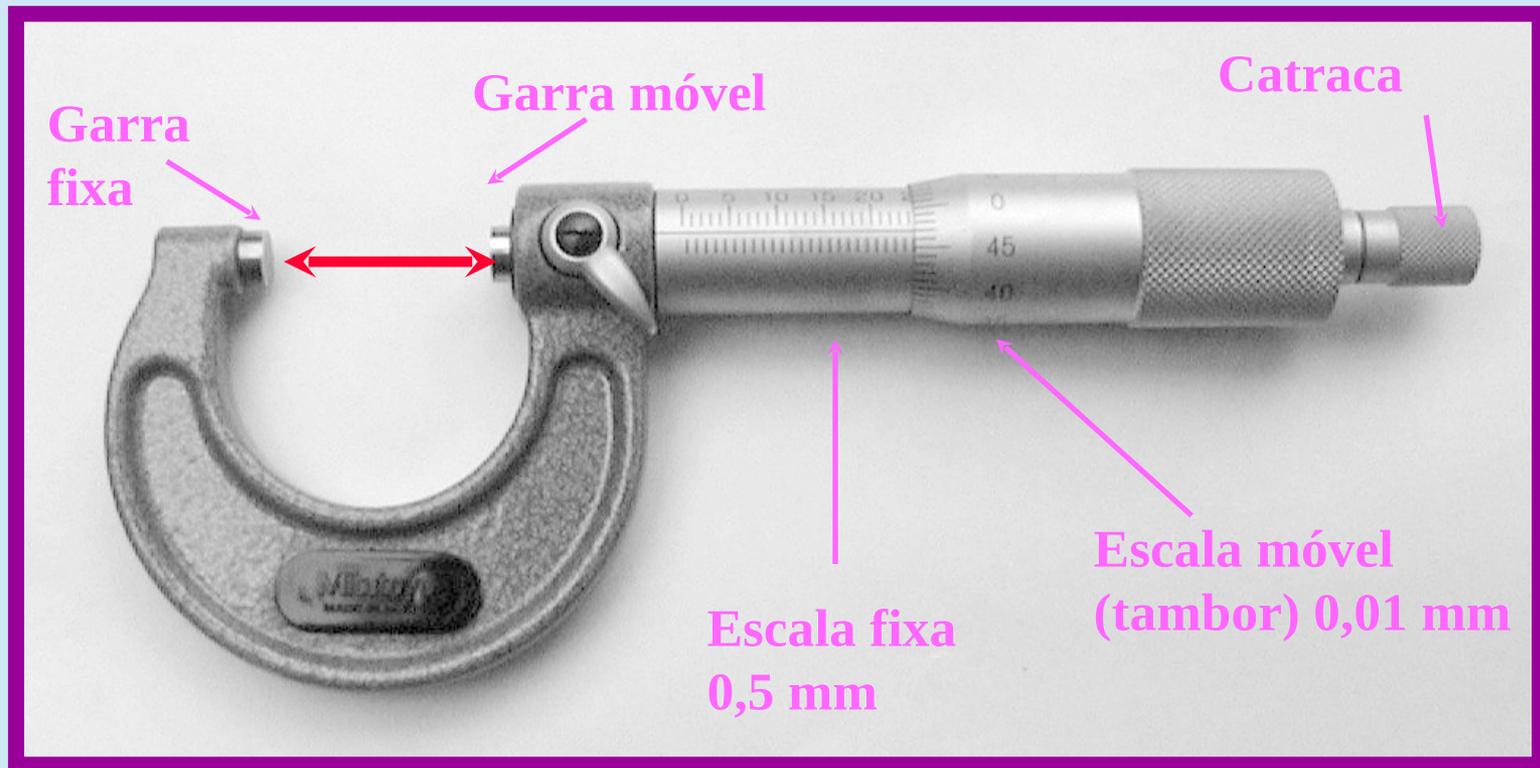
47 traços x precisão $0,02 \text{ mm} = 0,94 \text{ mm}$

Leitura = $(21,94 \pm 0,02) \text{ mm}$

Micrômetro

Instrumento para medir comprimento

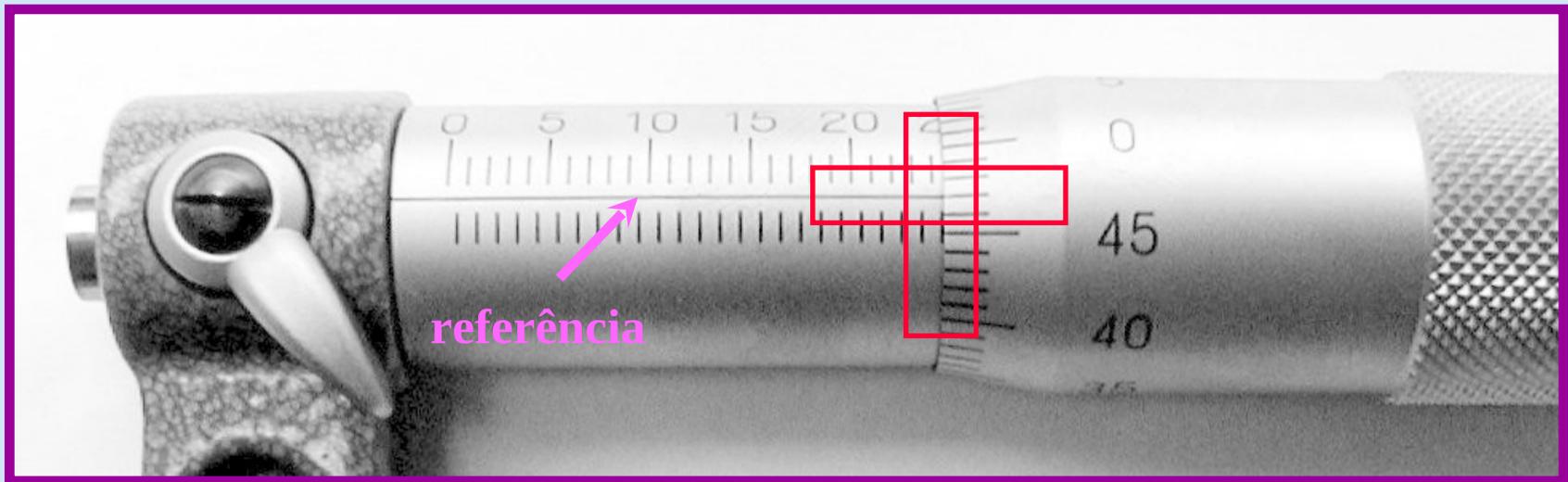
Precisão de microns



Usando o micrometro



Leitura com micrometro



1) Posição da escala móvel (passos de 0,5 mm) **24,0 mm**

Resolução: $0,5/50 \text{ mm} = 0,01 \text{ mm}$

2) Posição da escala fixa (referência)

$46,9 \text{ traços} \times (0,5 \text{ mm} / 50 \text{ traços}) = 46,9 \times 0,01 \text{ mm} = 0,469 \text{ mm}$

Leitura = (24,469 ± 0,005) mm

Análise dos dados

Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas

Comparar as medidas de toda classe novamente. Quantos tipos de plástico podem ser identificados desta vez? Que medida permitiu se obter esse resultado?