

# **Introdução às Medidas em Física**

**4300152**

**3<sup>a</sup> Aula**

# **Experiência II**

## **Densidade de Sólidos**

### **Objetivos**

#### **Medidas indiretas**

**Medida da densidade de sólidos**

#### **Noções de Estatística**

**Propagação de Incertezas**

**Compatibilidade entre medidas**

# Características de uma medida

**Medidas repetidas – diferentes**

Diferentes experimentadores

Diferentes instrumentos

**Nunca iremos obter o valor verdadeiro em  
nossas medições**

características da própria grandeza sendo medida  
limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos  
instrumentos e técnicas de medida

# Como realizar medidas

## Análise do instrumento de medida

identificação do tipo e funcionamento

## Fundo de escala e unidade

seleção conveniente

## Precisão e incerteza da medida

**Instrumental**

Escala simples

Duas escalas: principal e auxiliar (nônio ou vernier)

**Método**

Aleatórios

# Como avaliar incerteza

## Tipos de incerteza

**Instrumental:** Aquela associada à precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza.

**Estatística:** Incerteza associada à flutuação no resultado de uma mesma medida.

**Sistemática:** Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados.

# **Incertezas instrumentais**

**Em geral é a metade da menor divisão**

**Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex:paquímetro)**

**incerteza é a menor divisão do mesmo**

**Dificuldade de leitura**

**Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)**

# Incertezas estatísticas

## Flutuação no resultado das medidas

medida = média de todas as medidas efetuadas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

incerteza estatística = desvio padrão da média

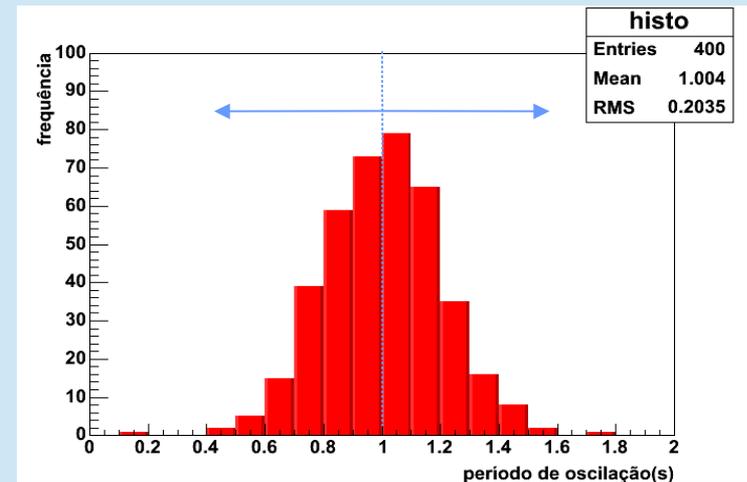
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Obs: o desvio padrão pode ser chamado de  $\sigma$  ou  $s$  ou ainda  $\Delta$ .

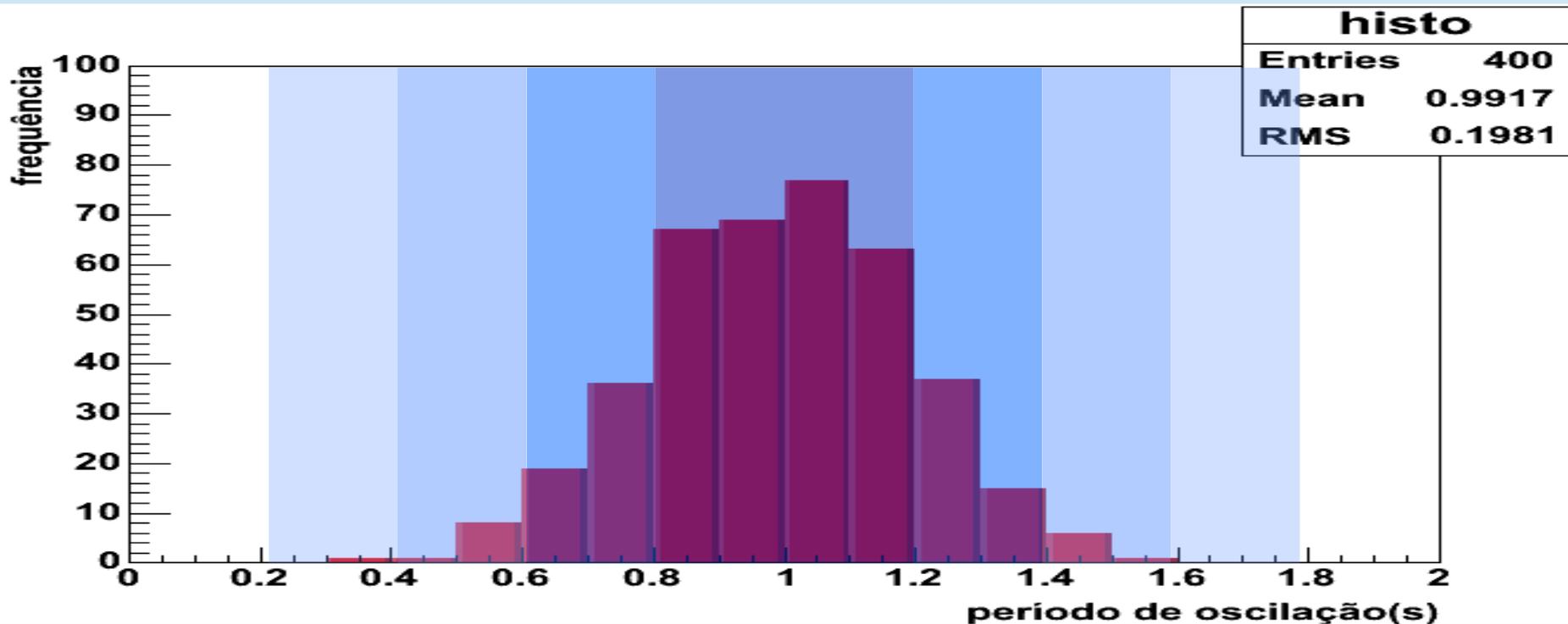
# Erros Estatísticos ou Aleatórios

Inicialmente, que características devemos esperar para a distribuição dos dados obtidos?

Simétrica em torno de um certo valor, e decresce ao se afastar desse valor.



# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



Quase  
Impossível

Muito  
Pouco  
Provável

Pouco  
Provável

Provável

Muito Provável

Provável

Pouco  
Provável

Muito  
Pouco  
Provável

Quase  
Impossível

# **Incertezas sistemáticas**

## **Aquelas que falseiam a medida**

**Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe**

**Ex: uma balança descalibrada e/ou com o zero deslocado**

**Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado**

**Devem ser corrigidas ou refeitas**

# Qual é a incerteza de uma medida?

Várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua

$$\sigma_{L_{instr}} = 0,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_{estat}}$$

$$\sigma^2_{L_{final}} = \sigma^2_{L_{instr}} + \sigma^2_{L_{estat}}$$

(Combinação linear dos erros)  
Soma como o "teorema de Pitágoras"

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

Período do pêndulo medido com o relógio de pulso (1s)

Incerteza instrumental > estatística

Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s

Incerteza estatística > instrumental

# Medida da Densidade de Sólidos

## Objetivo

Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

## Identificação

Comparação das medidas (+ incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

## Densidade (materiais sólidos homogêneos)

$$d = m/V$$

**Necessário medir a massa e o volume do objeto**

# Cálculo da densidade

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

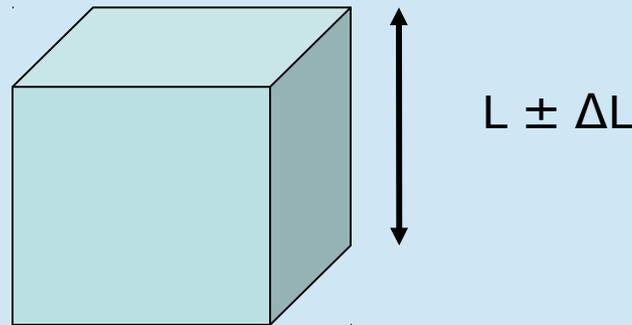
onde, o volume  $V$  de um cilindro é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

e  $m$ ,  $h$  e  $D$  são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro.

# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

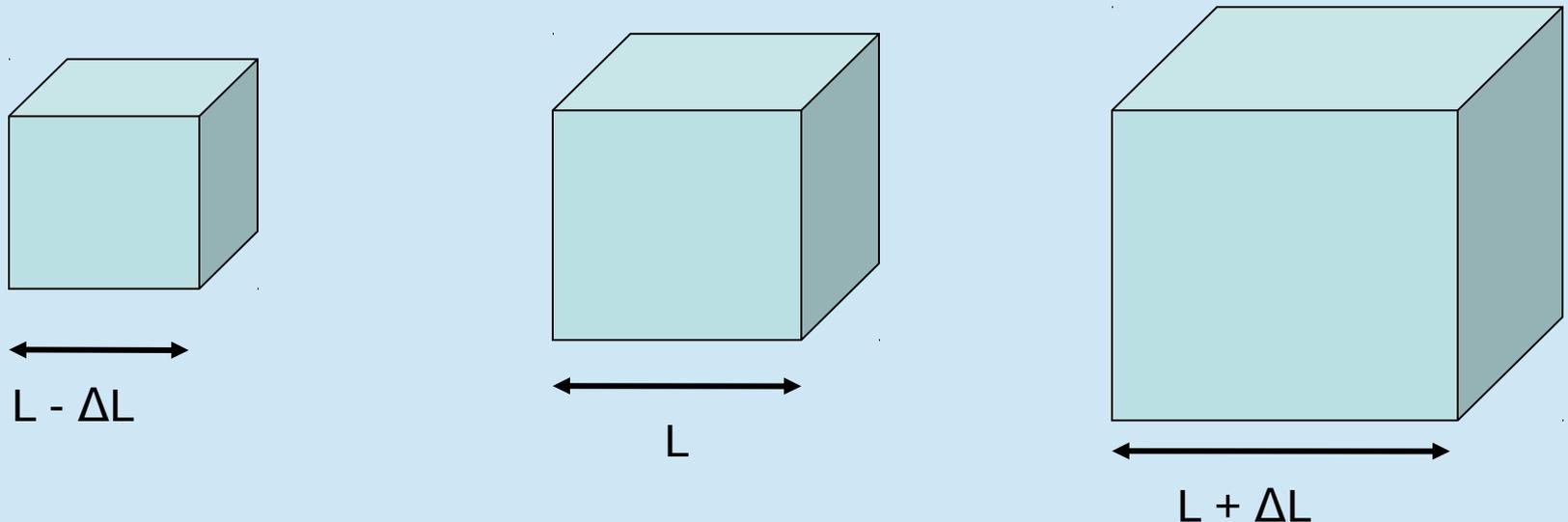
Por exemplo, vamos medir o volume de um cubo. Inicialmente medimos o tamanho de sua aresta com uma régua (que tem uma incerteza associada).



# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

O volume do cubo tem uma incerteza?

A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se propaga para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).



# Como calcular essa incerteza?

Neste exemplo, temos:

$$V = L^3$$

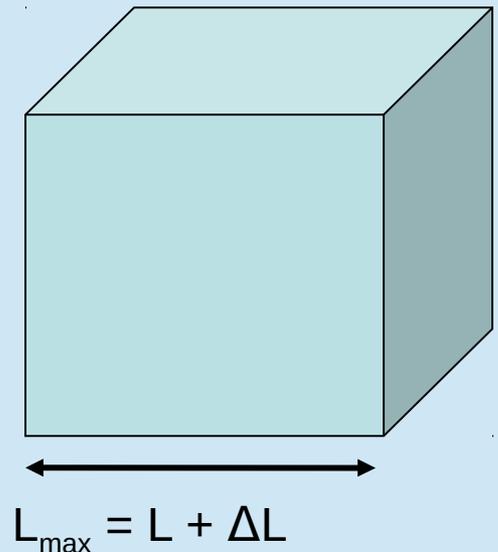
onde:  $(L \pm \Delta L)$  é a aresta do cubo (medido com a régua) e sua incerteza.

A incerteza no volume do cubo será dado pelo comprimento máximo que acreditamos que a aresta pode ter:

$$L_{\max} = L + \Delta L,$$

que leva a:

$$V_{\max} = (L_{\max})^3$$



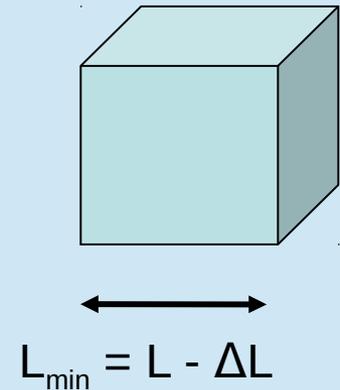
# Como calcular essa incerteza?

e o comprimento mínimo acreditamos que ela possa ter:

$$L_{\min} = L - \Delta L,$$

que leva a um volume mínimo dado por:

$$V_{\min} = (L_{\min})^3$$



Com isso, a incerteza no volume pode ser aproximada inicialmente por:

$$\Delta V = [V_{\max} - V_{\min}] / 2$$

# Propagação de incerteza

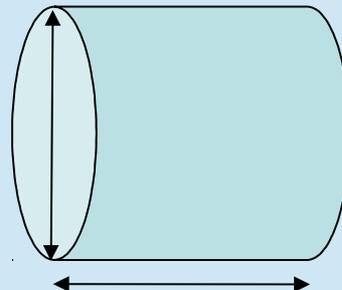
E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?

O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi (D/2)^2 h$$

onde,  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $h$  a sua altura ambos com incerteza

$$D \pm \Delta D$$



$$h \pm \Delta h$$



# 1ª estimativa da incerteza da densidade

Analogamente ao cálculo do volume, usaremos como primeira avaliação para incerteza da densidade o cálculo da variação máxima levando em consideração a propagação simultânea dos valores das incertezas do volume e da massa:

$$s_d = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(m + s_m)}{(V - s_v)} - \frac{(m - s_m)}{(V + s_v)} \right]$$

# Compatibilidade

Como interpretar o significado da incerteza?

O que significa dizer que minha medida, é  $2,74 \pm 0,02$  mm?

Eu tenho confiança que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre  $(2,74 - 0,02)$  e  $(2,74 + 0,02)$

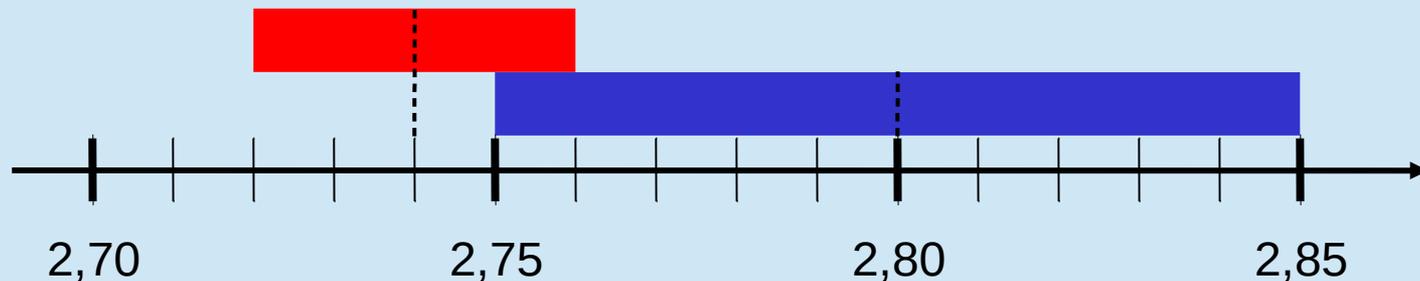


# Como comparar os resultados de duas medidas?

É preciso se levar em consideração sempre a incerteza de medida.

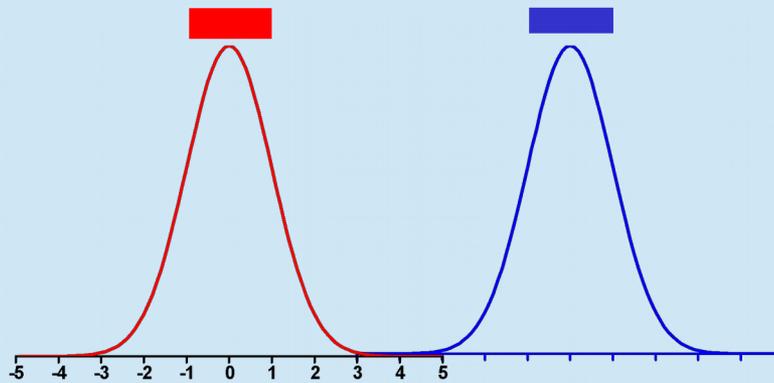
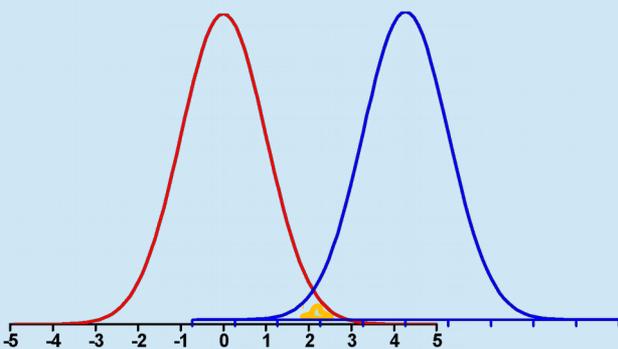
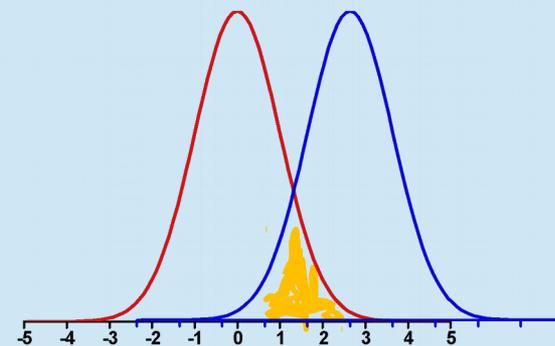
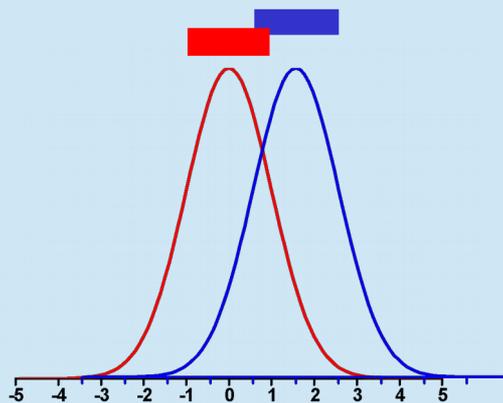
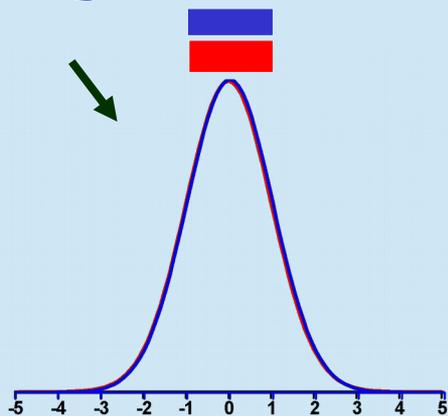
Como devemos considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são compatíveis ao invés de “iguais”;

Por exemplo,  $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$  é compatível com  $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$  ?



# Compatibilidade

$a = b$



$a \neq b$

# Critério para compatibilidade

Superposição em  $1\sigma$  = compatíveis

Superposição em  $2\sigma$  ou  $3\sigma$  – **Compatíveis com menor probabilidade**

Teste Z (estimador) indica essa probabilidade

Comparação entre  $(a \pm \sigma_a)$  e  $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$ , compatíveis ao nível de  $1\sigma$

$1 < Z \leq 2$ , compatíveis ao nível de  $2\sigma$

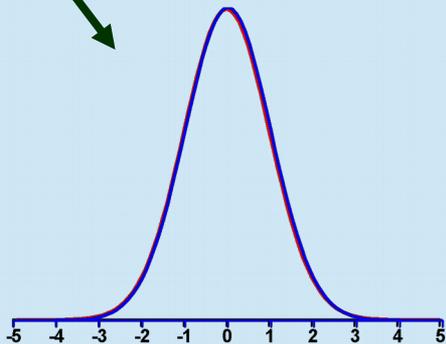
$2 < Z \leq 3$ , compatíveis ao nível de  $3\sigma$

$Z > 3$ , discrepantes

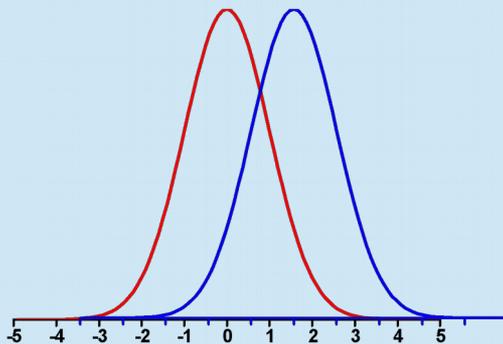
$\sigma$  é o desvio padrão

# Compatibilidade

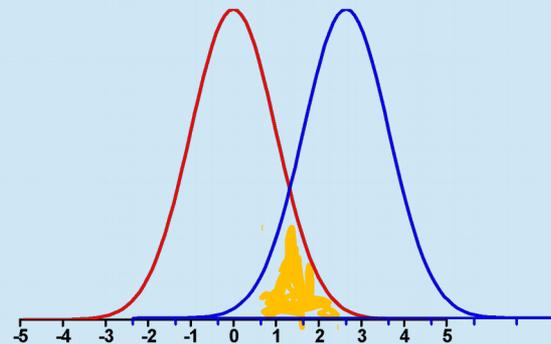
$a = b$



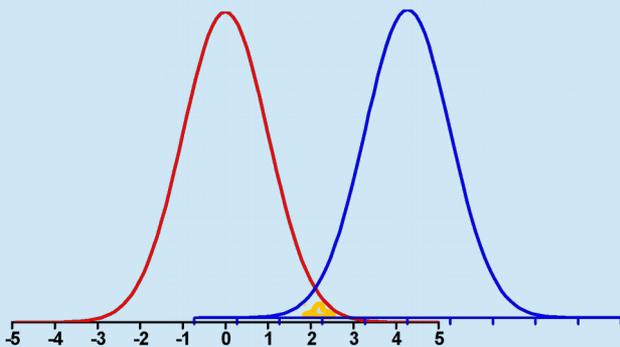
$Z = 0$



$Z = 1$



$Z = 2$



$Z = 3$



$Z > 3$

$a \neq b$

# Procedimento Experimental:

Cada aluno da dupla escolhe dois dos cilindros da caixa (anote o número para usar a mesma na próxima aula)

Em seguida, determina seu volume fazendo todas as medidas necessárias com uma régua. Cada aluno deve determinar quantas vezes é necessário repetir cada medida (geralmente neste caso as medidas podem não variar pois os corpos são muito regulares e a régua não tem precisão para detectar as diferenças)

Mede sua massa usando a balança digital da sala de aula

# Análise dos dados

**Calcular a densidade do objeto estudado e sua incerteza**

**Como calcular a incerteza da densidade já que ela não é medida diretamente, mas é obtida através de outras medidas (diâmetro, altura e massa do cilindro)?**

**Calcular a densidade do objeto estudado e sua incerteza e colocar os valores no gráfico;**

# Conclusões Parciais

**Será que é possível que exista mais de um tipo de plástico nas peças do grupo?**

**Como seria possível saber isso?**

**Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.**

**Mas, como?**

# **Procedimento Experimental:**

**Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros**

**Cada aluno da dupla fará novamente a medida da massa, mas desta vez usando uma balança analítica**

# Análise dos dados

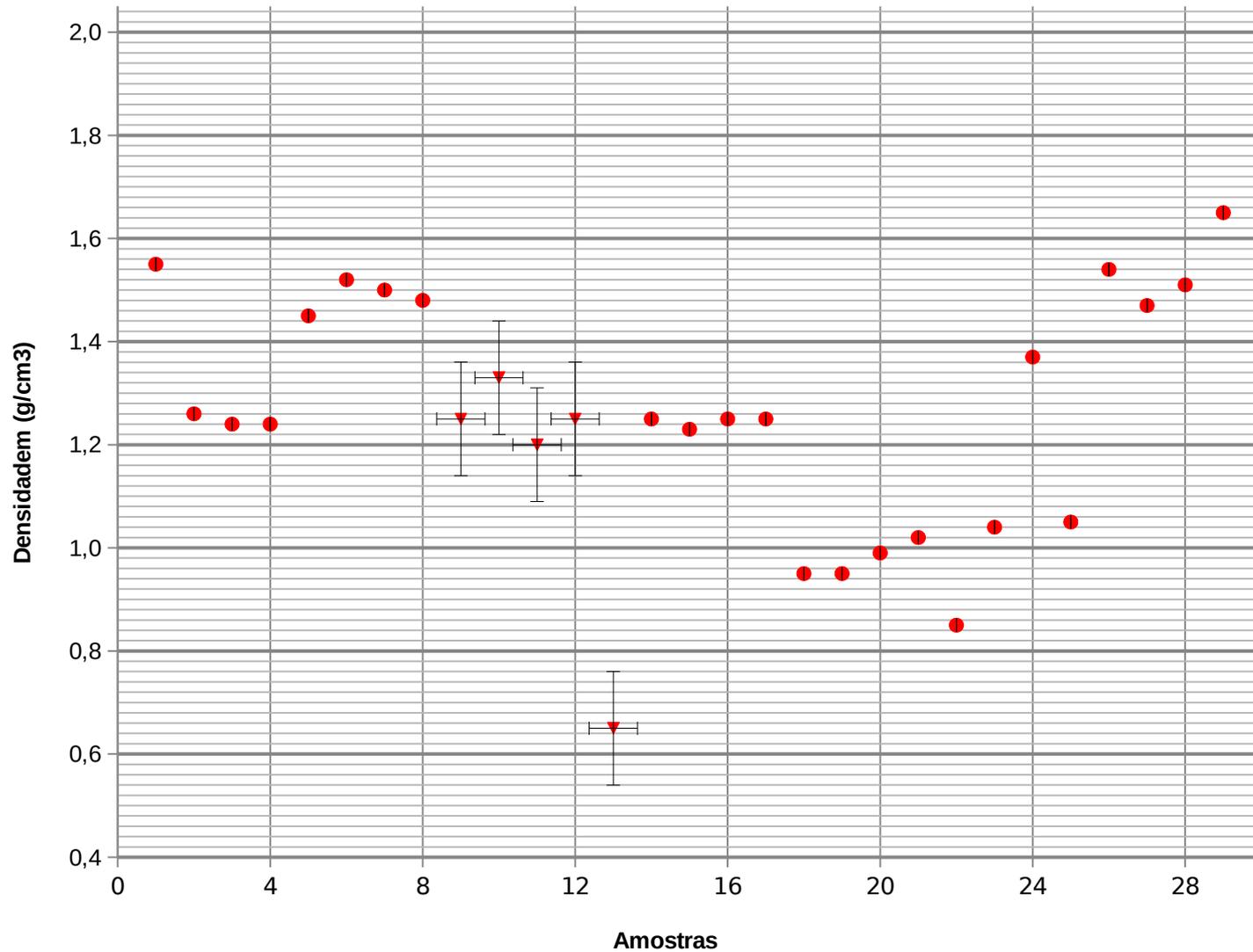
**Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas;**

**Comparar os valores novos com os antigos.**

**Que podemos concluir dessa comparação?**

**FIM**

# Resultados - Tipos de plástico?



# Propagação de incerteza

Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

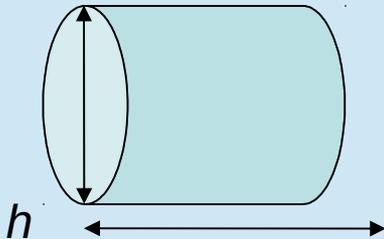
Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D+\Delta D)/2]^2 h$$

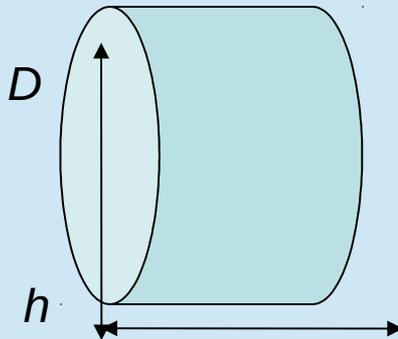
$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$$

$$\Delta V_{\text{ devido a } \Delta D} = (V_{max} - V_{min})/2$$

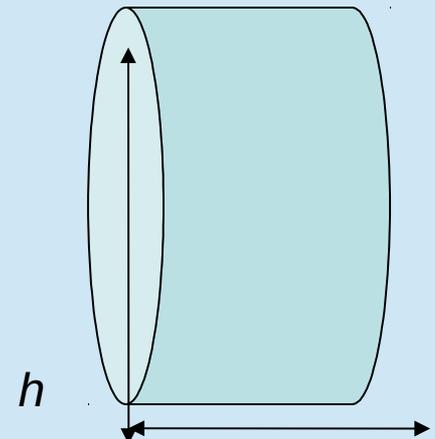
$D-\Delta D$



$D$



$D+\Delta D$



# Propagação de incerteza

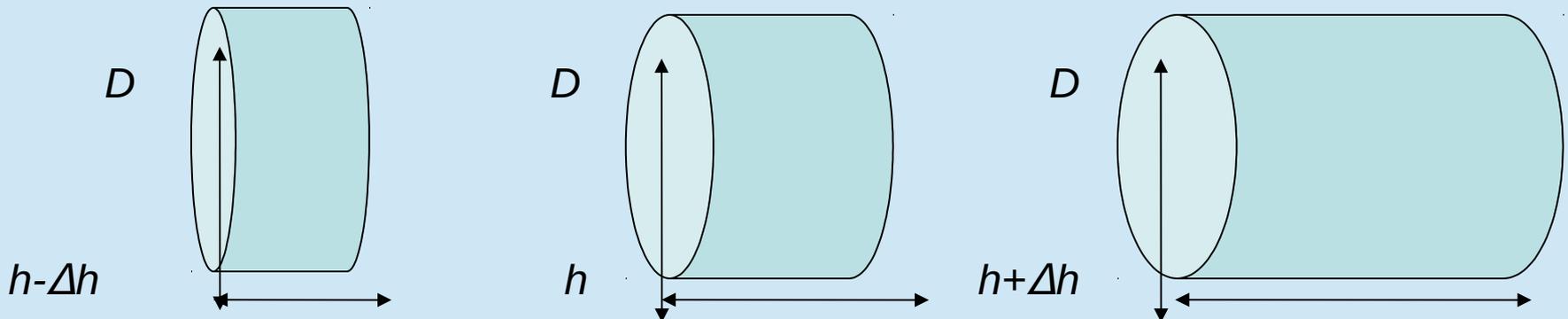
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h + \Delta h)$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h - \Delta h)$$

$$\Delta V_{\text{ devido a } \Delta h} = (V_{max} - V_{min})/2$$



# Propagação de incerteza

E combinamos as duas incertezas com uma soma quadrática. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$

