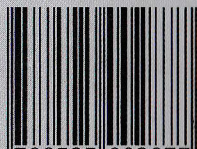


Você que calcula, soma ou subtrai, multiplica ou divide todos os dias, muitas vezes o dia todo, já chegou a se perguntar de onde vêm os números? Como o homem “descobriu” a matemática, como chegou ao estágio em que ele se encontra nas diversas ciências que compõem a área de exatas?

*Os números* traça uma resumida mas completa história da matemática. Ao acompanhar a evolução do raciocínio dos nossos ancestrais desde a pré-história e passando por todos os povos que desenvolveram a arte de calcular — egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, judeus, maias, chineses, hindus e árabes —, você terá contato com uma história fascinante, relacionada com o processo de surgimento, apogeu e declínio dessas civilizações.

ISBN 85-250-0287-9



9 788525 002877

Georges Ifrah



OS NÚMEROS



9ª EDIÇÃO

Georges Ifrah



# OS NÚMEROS

a história de  
uma grande invenção



EDITORIAL  
GZBO



*GEORGES IFRAH*

**OS NÚMEROS**  
História de uma grande invenção

*Tradução*  
Stella M. de Freitas Senra

*Revisão Técnica*  
Antonio José Lopes  
Jorge José de Oliveira

*9ª Edição*



Título original em francês:  
*Les Chiffres ou L'Histoire d'une Grande Invention*

Copyright © 1985 by Éditions Robert Laffont S.A., Paris

Capa: Eliane Piccardi

Direitos de edição em língua portuguesa adquiridos por  
EDITORA GLOBO S.A.  
Avenida Jaguaré, 1485

CEP 05346-902 - Tel.: 3767-7000, São Paulo, SP, Brasil  
e-mail: atendimento@edglobo.com.br

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta edição pode ser utilizada ou reproduzida - em qualquer meio ou forma, seja mecânico ou eletrônico, fotocópia, gravação etc. - nem apropriada ou estocada em sistema de banco de dados, sem a expressa autorização da editora.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ifrah, Georges.

Os números : história de uma grande invenção / Georges Ifrah : tradução Stella Maria de Freitas Senra : revisão técnica Antonio José Lopes, Jorge José de Oliveira. - 9. ed. - São Paulo : Globo, 1998.

ISBN 85-250-0287-9

1. Numeração - História 2. Números - História I. Título.

88-0905

CDD-513.15

Índices para catálogo sistemático

1. Numeração : História 513.5
2. Números : História 513.5

Plena expressão de minha paixão e de meu entusiasmo, este livro é dedicado

*a minha mulher Ana,*

*a minhas filhas Gabrielle e Emmanuelle,*

*a todos os jovens espíritos curiosos...*

*e a meu amigo Gerard Klein*

e constitui minha verdadeira resposta  
a suas perguntas de há pouco tempo.

díssimo problema da origem de “nossos” algarismos, os chamados algarismos “arábicos”, nascidos na Índia há mais de quinze séculos da improvável junção de várias práticas e tradições. É uma história espantosa, muito próxima da história da inteligência humana. Mas antes de chegar a ela, de atingir o último capítulo numerado “zero”, será preciso percorrer os nove precedentes, exatamente um para cada algarismo...

## 1

## A PRÉ-HISTÓRIA DOS NÚMEROS

Onde e quando esta fantástica aventura da inteligência humana começou? Na Ásia, na Europa ou em algum lugar na África? Na época do homem de Cro-Magnon, há trinta mil anos? Ou no tempo do homem de Neandertal, há quase cinquenta milênios? Ou ainda há cem mil anos, talvez quinhentos mil, ou até, por que não, um milhão de anos? Não sabemos de nada. O acontecimento se perde na noite dos tempos pré-históricos, e dele não resta hoje traço algum.

No entanto, o fato é certo: *houve um tempo em que o ser humano não sabia contar*. A prova: atualmente existem ainda homens incapazes de conceber qualquer número abstrato e que não sabem nem que dois e dois são quatro!

## NO TEMPO EM QUE O NÚMERO ERA “SENTIDO”

Inúmeras hordas “primitivas” se encontram, ainda hoje, nesse “grau zero” — se assim podemos dizer — quanto ao conhecimento dos números. É, por exemplo, o caso dos zulus e dos pigmeus, da África, dos aranda e dos kamilarai, da Austrália, dos aborígenes das ilhas Murray e dos botocudos, do Brasil. *Um, dois e... muitos* constituem as únicas grandezas numéricas desses indígenas que ainda vivem na idade da pedra.

Eles só conhecem dois “nomes de números” propriamente ditos: um para a unidade e um outro para o par. Dentre eles,



os melhores em aritmética chegam certamente a exprimir os números 3 e 4 articulando algo como: *dois-um* e *dois-dois*. Mas não avançam mais. Além daí é a imprecisão, a confusão: empregam então palavras ou expressões que poderíamos traduzir por *muitos*, *vários*, *uma multidão*. E é tão difícil para eles imaginar um número superior ou igual a 5 quanto é para nós representar quantidades como um *trilhão de bilhões*. De tal modo que, quando se trata de mais de 3 ou 4, alguns deles se contentam em mostrar a cabeleira, como se dissessem: “É tão inumerável quanto os cabelos da cabeça!”

Na verdade, o número não é concebido por eles sob o ângulo da abstração. Ele é “sentido”, de modo um tanto qualitativo, um pouco como *percebemos* um cheiro, uma cor, um ruído ou a presença de um indivíduo ou de uma coisa do mundo exterior. O número se reduz, no espírito deles, a uma noção global bastante confusa — a “pluralidade material” — e assume o aspecto de uma realidade concreta indissociável da natureza dos seres e dos objetos em questão. Isto significa que estes indígenas não têm consciência, por exemplo, de que um grupo de cinco homens, cinco cavalos, cinco carneiros, cinco bisões, cinco dedos, cinco cocos ou cinco canoas apresentam uma característica comum, que é precisamente “ser cinco”.

As possibilidades numéricas dessas hordas se reduzem a esta espécie de capacidade natural que chamamos comumente de *percepção direta do número* ou, mais simplesmente, de *sensação numérica*. Aptidão natural que evidentemente não se deve confundir com a *faculdade abstrata de contar*, que por sua vez diz respeito a um fenômeno mental muito mais complicado e constitui uma aquisição relativamente recente da inteligência humana.

#### UM E DOIS: OS PRIMEIROS NÚMEROS INVENTADOS

Sem dúvida não mais dotado que esses indígenas, o homem das épocas mais remotas desta história devia também ser incapaz de conceber os números em si mesmos. E suas possibilidades numéricas deviam, do mesmo modo, resumir-se numa apreciação global do espaço ocupado pelos seres e pelos objetos vizinhos.

Nosso ancestral remoto devia no máximo poder estabelecer uma diferença nítida entre a unidade, o par e a pluralidade.

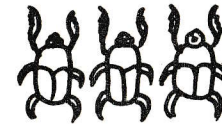
É verdade que *um* e *dois* são os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano. O Um é, com efeito, o homem ativo, associado à obra da criação. É ele próprio no seio de um grupo social e sua própria solidão face à vida e à morte. É também o símbolo do homem em pé, o único ser vivo dotado desta capacidade, como também do falo ereto que distingue o homem da mulher. Quanto ao Dois, ele corresponde à evidente dualidade do feminino e do masculino, à simetria aparente do corpo humano. É também o símbolo da oposição, da complementariade, da divisão, da rivalidade, do conflito ou do antagonismo. E ele se manifesta, por exemplo, na idéia da vida e da morte, do bem e do mal, do verdadeiro e do falso etc.

Inúmeras línguas e escritas, antigas ou modernas, trazem as marcas evidentes destas limitações primitivas. A começar, evidentemente, por esta distinção gramatical que vários povos fizeram (ou ainda fazem) entre o singular, o dual e o plural. Assim, em grego antigo, *ho lukos* significa “o lobo”, *to lukoi*, “os dois lobos” e *hoi lukoi*, “os lobos”. Em árabe moderno, emprega-se igualmente a forma *rajulun* para “um homem”, *rajulani* para “dois homens” e *rijalun* para “homens”.

Conhecemos, do mesmo modo, uma “ortografia” consignada nas inscrições pictóricas do Egito dos faraós. Ela consistia em repetir três vezes um mesmo hieroglifo (ou ainda em acrescentar três pequenos traços verticais à imagem correspondente): *não apenas para figurar três exemplares do ser ou do objeto assim representado, mas também para indicar o seu plural*.



“Um escaravelho”



“Escaravelhos”



Em chinês antigo, exprimia-se a idéia de “floresta” repetindo três vezes o pictograma de uma árvore, e a idéia de “multidão” reproduzindo três vezes a imagem de um ser humano.



Ainda mais: na língua dos sumérios, os termos empregados para 1, 2 e 3 eram, respectivamente, *gesh*, *min* e *esh*. O primeiro significava também “o homem, o macho, o membro viril”, e o segundo tinha como sentido suplementar “a mulher”; quanto ao termo *esh* (três), ele tinha também o sentido de “muitos” e servia normalmente como sufixo verbal para marcar o plural (mais ou menos como o “s” português).

Existe na língua francesa uma aproximação evidente entre a palavra *trois* (três), o advérbio *très* (“muito”, que marca, para um adjetivo ou advérbio, uma intensidade elevada a seu mais alto grau) e a preposição de origem latina *trans*, que significa especificamente “além de”. Em francês antigo, o termo *très* era empregado como preposição, com o sentido de “até”, e o verbo *transir* significava “falecer” (no sentido de “ir para o além”).

Em latim, a palavra *tres* (três) e o prefixo *trans* evidentemente tinham o mesmo radical, enquanto *ter* servia não só para indicar o sentido de “três vezes” mas também a idéia de uma certa pluralidade.

Em inglês, a palavra *thrice* tem também duas significações: “três vezes” e “vários”. Enquanto as palavras *three* (três), *throng* (multidão) e *through* (através) têm visivelmente a mesma raiz etimológica. Do mesmo modo, o antigo termo anglo-saxão *thria* (“três”, do qual derivaram, no sentido indicado, a palavra inglesa *three* e as do germânico antigo *dri*, *drio* e *driu*, que por sua vez deram origem ao termo *drei*, do alemão atual) tem uma raiz comum com a palavra *throp* (amontoado), outrora utilizada em frâncico (língua dos antigos francos aparentada com o velho-saxão e com as línguas germânicas ocidentais). Deste último termo derivam, de um lado, o advérbio francês *trop* (muito) e seu homólogo italiano *troppo* (no sentido de “muito”, “demais”), e, de outro, o antigo termo do latim medieval *troppus* (rebanho, bando), que deu origem, por sua vez, aos termos franceses *troupe* (grupo de pessoas ou tropa) e *tropeau* (rebanho), ao espanhol *tropa*, ao italiano *truppa*, ao inglês *troop* e ao alemão *Trupp*.

Desde a noite dos tempos o número 3 foi, assim, sinônimo de pluralidade, de multidão, de amontoado, de além, e constituiu, conseqüentemente, uma espécie de limite impossível de conceber ou precisar. O que significa que, no espírito do homem, a inção dos números fez uma primeira pausa no 2...

## O NÚMERO E A CRIANÇA PEQUENA

É o que ilustra, aliás, o estudo do comportamento do homem desde pequeno, já que no desenvolvimento da criança se encontram as diversas etapas da evolução da inteligência humana.

*Entre seis e doze meses*, um bebê adquire mais ou menos uma certa capacidade de apreciação global do espaço ocupado pelas coisas ou pelas pessoas próximas. Ele assimila então agrupamentos relativamente restritos de seres e objetos que lhe são familiares pela natureza e pelo número. Em geral, nesta idade ele pode também reunir num único grupo alguns objetos análogos previamente separados. E, se falta algo a um desses conjuntos familiares, o bebê logo percebe. Mas o número simplesmente *sentido e percebido* não é ainda concebido por ele de modo abstrato, e ele nem sequer terá a idéia de se servir de seus dez dedos para designar um dos primeiros números.

*Entre doze e dezoito meses*, a criança aprende, pouco a pouco, a fazer distinção entre *um*, *dois* e *muitos* objetos, e a discernir com um só golpe de vista a importância relativa de duas coleções reduzidas de seres ou de objetos. Mas sua capacidade numérica ainda permanece no interior de limites tão estreitos que lhe é impossível fazer uma diferença nítida entre os números e as coleções das quais eles são parte.

Em seguida, um fato admirável que pude pessoalmente observar diversas vezes: *entre dois e três anos*, quando a criança já adquiriu o uso da fala e aprendeu a nomear os primeiros números, ela esbarra durante certo tempo numa grande dificuldade de conceber e dizer o número 3. Ao contar, ela começa pelo 1 e 2, mas esquece em seguida o terceiro número: 1, 2, 4!

## OS LIMITES DA SENSAÇÃO NUMÉRICA

Determinadas espécies animais também são dotadas de um tipo de percepção direta dos números. Em alguns casos, esta capacidade natural lhes permite reconhecer que um conjunto (numericamente reduzido), observado pela segunda vez, sofreu uma modificação depois que um ou vários componentes foram retirados ou acrescentados.

Assim, um pintassilgo que aprendeu a escolher seu alimento entre dois pequenos montes de grão geralmente consegue distin-



guir três de um, três de dois, quatro de três e seis de três. Mas ele confunde quase sempre quatro e cinco, sete e cinco, seis e oito, dez e seis.

Numerosas experiências demonstraram que os rouxinóis, as pegas e os corvos eram capazes de distinguir quantidades concretas de um a quatro.

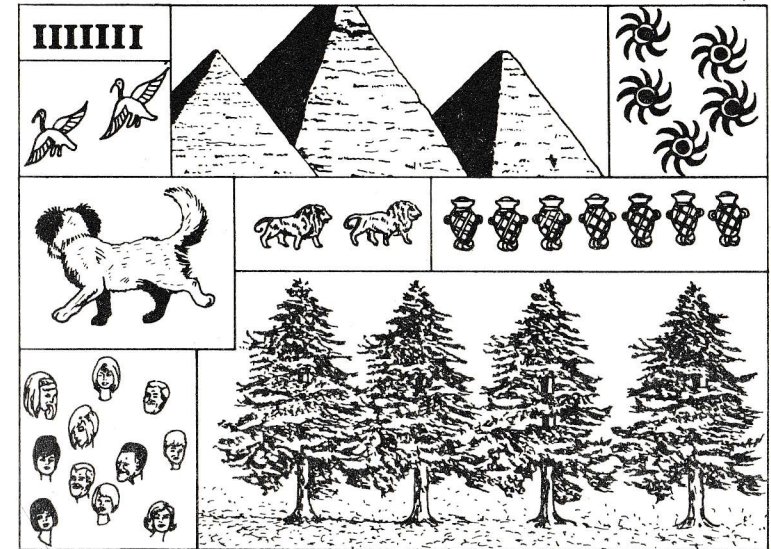
Um castelão decidiu matar um corvo que fez seu ninho na torre do castelo. Já tentara várias vezes surpreender o pássaro, mas ao se aproximar o corvo deixava o ninho, instalava-se numa árvore próxima e só voltava quando o homem saía da torre. Um dia, o castelão recorreu a uma artimanha: fez entrar dois companheiros na torre. Instantes depois, um deles desaparecia, enquanto o outro ficava. Mas, em vez de cair nesse golpe, o corvo esperava a partida do segundo para voltar a seu lugar. Da próxima vez ele fez entrar três homens, dos quais dois se afastaram em seguida: o terceiro pôde então esperar a ocasião para pegar o corvo, mas a esperta ave se mostrou ainda mais paciente que ele. Nas tentativas seguintes, recomeçou-se a experiência com quatro homens, sempre sem resultado. Finalmente, o estratagema teve sucesso com cinco pessoas, pois nosso corvo não conseguia reconhecer mais que quatro homens ou quatro objetos...

Seria um erro pensar que poderíamos fazer muito mais se nos deixássemos guiar apenas por nossas faculdades naturais de reconhecimento imediato dos números. Na prática, quando queremos discernir esta ou aquela quantidade, recorremos à memória ou a procedimentos como a comparação, a decomposição, o agrupamento mental ou, mais ainda, à faculdade abstrata de contar. Se bem que em geral é difícil termos consciência dos verdadeiros limites de nossas próprias aptidões a esse respeito.

Coloquemo-nos, no entanto, diante de uma série de seres ou de objetos análogos *alinhados* e proponhamo-nos a indicar a quantidade *numa única e rápida olhada*, isto é, sem recorrer a nenhum artifício. Até onde somos capazes de ir?

Distinguimos sem erro, no primeiro golpe de vista, *um, dois, três* e até *quatro* elementos. Mas aí se detém nosso poder de identificação dos números. Porque além de quatro tudo se confunde em nosso espírito, e nossa visão global não serve para

mais nada. Há quinze ou vinte pratos nesta pilha, treze ou catorze carros alinhados na calçada, onze ou doze arbustos nesta moita, dez ou quinze degraus nesta escada, nove, oito ou mesmo seis janelas nesta fachada? *É preciso contar para saber.* O olho não é um “instrumento de medida” suficientemente preciso: seu poder de percepção direta dos números ultrapassa muito raramente — para não dizer nunca — o número 4!



Uma primeira ilustração deste fato nos é dada pela existência de várias tribos na Oceania com o costume de declinar as formas gramaticais do *singular, dual, trial, quaternal* e... do *plural*. Nestes povos, a capacidade de individuação dos nomes comuns limita-se a quatro<sup>1</sup>. Até quatro, com efeito, os nomes dos seres e dos objetos são nitidamente expressos em cada uma das línguas e designados por uma característica própria; mais além, tanto os nomes como os números são privados de declinação e de personalidade, e assumem o caráter vago e pouco preciso da plu-

1. Em nossas gramáticas atuais, esta capacidade é ainda mais limitada, pois se detém na unidade!



ralidade material. Mais ou menos como se, por exemplo, em francês, exprimissemos a diferença entre um, dois, três, quatro e vários jumentos, dizendo algo como *baudet* (jumento) para “um jumento”, *baudeta* para “dois jumentos”, *baudeti* para “três jumentos”, *baudeto* para “quatro jumentos” e *baudets* (com um “s” no final) para “jumentos”.

Outro exemplo: em latim, os nomes dos quatro primeiros números (*unus, duo, tres, quatuor*) eram os únicos declináveis; a partir do quinto, os nomes de número não tinham mais declinação nem gênero.

Da mesma forma, os nomes que os romanos costumavam dar a seus filhos do sexo masculino (as meninas não recebiam nome na época) eram, até o quarto, designações particulares e normalmente compostas, como *Appius, Aulus, Gaius, Lucius, Marcus, Servius* etc. Mas, a partir do quinto, eles se contentavam em chamar seus filhos por simples números: *Quintus* (o quinto), *Sextus* (o sexto), *Octavio* (o oitavo), *Decimus* (o décimo), ou mesmo *Numerius* (numeroso). Pensamos, por exemplo, no matemático Quintus Fabius Pictor, no poeta Quintus Horatius Flaccus (mais conhecido pelo nome de Horácio), em Sextus Pompeius Magnus (filho do Grande Pompeu), assim como no poeta satírico Juvenal, que se chamava na verdade Decimus Junius Juvenalis.

Observamos também que os quatro primeiros meses do ano romano primitivo (conhecido como de Rômulo) eram os únicos com nomes particulares (*Martius, Aprilis, Maius, Junius*), pois a partir do quinto passavam a ser apenas números ordinais: *Quintilis, Sextilis, September, October, November, December*<sup>1</sup>.

1. O ano romano primitivo (304 dias) compreendia apenas dez meses e começava com *Martius* (março). Em seguida ele foi prolongado por mais dois meses suplementares, aos quais se deu os nomes de *Januarius* e *Februarius*, que se tornaram nossos atuais janeiro e fevereiro. Quando Júlio César fez sua reforma do calendário, o início do ano passou de 1.º de março para 1.º de janeiro e o ano romano passou a ter 365 dias. Depois se decretou que o mês *Quintilis* (o quinto do ano primitivo), quando nasceu César, receberia em sua honra o nome de *Julius*, origem de nosso julho. Um pouco mais tarde, o mês *Sextilis* (o sexto do ano primitivo) foi denominado *Augustus* (que se transformou em seguida em nosso agosto atual), em homenagem aos serviços prestados pelo imperador do mesmo nome durante este mês. (N. do A.)

Também confirmam o mesmo fato, além de outras, as civilizações egípcia, suméria, elamita, babilônica, fenícia, grega, maia e asteca. No começo da história de suas respectivas escritas, estes povos adquiriram o hábito de anotar os nove primeiros números inteiros pela repetição de traços verticais, círculos, pontos ou outros sinais análogos para figurar a unidade, dispendo-os mais ou menos deste modo, numa única linha:

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Mas eles abandonaram rapidamente este princípio, pois tais séries de sinais idênticos, para os números superiores a quatro, em nada facilitavam, ao olho de um “leitor apressado”, a adição imediata das unidades correspondentes. Para contornar a dificuldade, os egípcios e os cretenses tiveram a idéia de reunir seus algarismos-unidades segundo um princípio que se poderia denominar *decomposição*:

I	II	III	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
				(3 + 2)	(3 + 3)	(4 + 3)	(4 + 4)	(5 + 4)

Civilizações como as babilônica e a fenícia utilizaram um princípio ternário, vencendo a dificuldade da seguinte maneira:

I	II	III	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII
			I	II	III	IIII	IIII	IIII
						I	II	III
1	2	3	4	5	6	7	8	9
			(3 + 1)	(3 + 2)	(3 + 3)	(3 + 3 + 1)	(3 + 3 + 2)	(3 + 3 + 3)

Outros povos solucionaram o mesmo problema criando um sinal especial para o número 5 (idéia que sem dúvida lhes veio sob a influência dos cinco dedos da mão). Como os antigos ro-



manos, eles usaram então um *princípio quinário* para a representação dos números de 6 a 9:

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
					(5 + 1)	(5 + 2)	(5 + 3)	(5 + 4)

Última confirmação: quando um comerciante de vinho ou de cerveja mantém um quadro de seus clientes fazendo num pequeno cartão os traços correspondentes aos pedidos ainda não pagos para cada um, ele efetua em geral uma operação segundo as etapas sucessivas do procedimento a seguir:

1	I	6	<del>IIII</del> I	11	<del>IIII</del> <del>IIII</del> I
2	II	7	<del>IIII</del> II	12	<del>IIII</del> <del>IIII</del> II
3	III	8	<del>IIII</del> III	13	<del>IIII</del> <del>IIII</del> III
4	IIII	9	<del>IIII</del> IIII	14	<del>IIII</del> <del>IIII</del> IIII
5	<del>IIII</del>	10	<del>IIII</del> <del>IIII</del>	15	<del>IIII</del> <del>IIII</del> <del>IIII</del>

É a mesma coisa que faz um prisioneiro ao contar seu tempo de prisão gravando na parede de sua cela os traços correspondentes aos dias de detenção.

Nestas condições não cabe nenhuma dúvida: *as faculdades humanas de percepção direta dos números não vão além do número 4!* Como uma capacidade numérica rudimentar mal ultrapassa a de certos animais, este é o núcleo primitivo de nossa aritmética atual. Se o espírito humano se tivesse restrito a esta única aptidão, sem sombra de dúvida ele nunca teria tido acesso, como esses animais, à abstração do cálculo.

Felizmente, o homem foi capaz de ampliar suas tão limitadas possibilidades da sensação numérica inventando um certo número de procedimentos mentais. Procedimentos que teriam de se revelar fecundos, pois iriam oferecer à espécie humana a possibilidade de progredir no universo dos números...

## COMO O HOMEM APRENDEU A CONTAR

Erigida sem dúvida sobre bases empíricas, a invenção dos números deve ter correspondido a preocupações de ordem prática e utilitária. Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos víveres, armas ou instrumentos era idêntica à que eles haviam deixado anteriormente. Aqueles, afinal, que mantinham relações de inimizade com grupos vizinhos necessitavam saber, ao final de cada expedição militar, se o efetivo de seus soldados estava completo ou não. Os que praticavam uma economia de troca direta deviam estar aptos a "avaliar" para poder trocar um gênero ou mercadoria por outro...

### O PRIMEIRO PROCEDIMENTO ARITMÉTICO

Tudo começou com este artifício conhecido como *correspondência um a um*, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata.

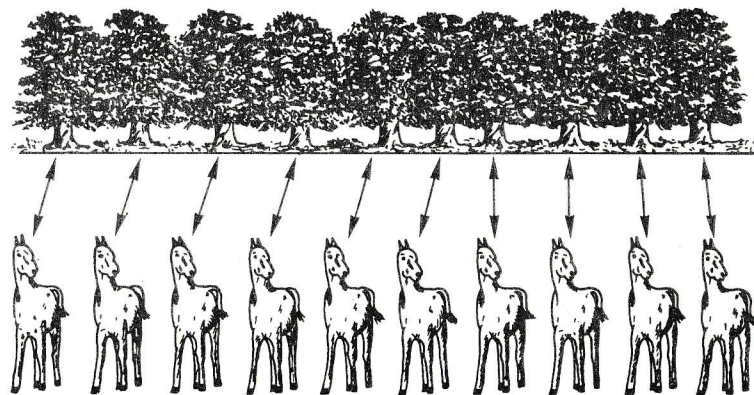
Um exemplo simples nos permitirá a familiarização com



este procedimento que domina atualmente todas as ciências exatas, e que vem da pré-história da aritmética.

Peguemos um ônibus. Com exceção do motorista e do cobrador, que têm assentos determinados, temos diante de nós dois conjuntos: os assentos e os passageiros. Com uma só olhada rápida podemos constatar se esses dois conjuntos comportam ou não “o mesmo número” de elementos; caso contrário, podemos até indicar sem hesitação qual dos dois tem “mais” elementos. Esta apreciação do número, obtida sem recorrer à contagem, deve-se precisamente ao procedimento da correspondência um a um.

Assim, se há lugares desocupados nesse ônibus e se ninguém está de pé, sabemos pertinentemente que a cada passageiro *corresponde* um assento, mas que a cada poltrona não corresponde necessariamente um passageiro; há então *menos* passageiros que assentos. Pelo contrário, se algumas pessoas estão de pé e se nenhum lugar está livre, há então *mais* passageiros que assentos. Finalmente, se ninguém está de pé, e se não há nenhum lugar livre, sabemos que cada poltrona corresponde a um único passageiro, e inversamente: há tantos lugares quantos passageiros. Resumimos esta situação dizendo que há uma equiparação (ou



Existe “equiparação” de uma dada coleção em relação a outra se a cada elemento de uma corresponde um único elemento da outra, e inversamente.

ainda uma *correspondência biunívoca*, ou também, em termos de matemática moderna, uma *bijeção*) entre o conjunto de assentos e os passageiros desse ônibus.

Quando uma criança chega aos quinze ou dezesseis meses, ultrapassa o estágio da simples observação do mundo em redor e já está apta a conceber o princípio da correspondência unidade por unidade e, particularmente, a propriedade da equiparação. Se lhe dermos, por exemplo, o mesmo número de bonecas e de cadeiras, ela provavelmente associará cada uma das bonecas a uma cadeira. E, assim brincando, estará fazendo a equiparação dos elementos de uma primeira coleção (*as bonecas*) aos de uma segunda coleção (*as cadeiras*). Se lhe dermos, ao contrário, mais bonecas que cadeiras, ou o inverso, após um certo tempo ela ficará embaraçada, pois terá constatado a impossibilidade de equiparação.

Mas este artifício do espírito não oferece apenas um meio de estabelecer uma comparação entre dois grupos: *ele permite também abarcar vários números sem contar nem mesmo nomear ou conhecer as quantidades envolvidas*.

Para evitar que uma sala de cinema seja ocupada por um número de espectadores superior ao de poltronas, a bilheteira tem a precaução de se munir de um mapa da sala antes de começar a vender as entradas. Há no seu mapa um espaço para cada lugar da sala: a cada entrada vendida ela assinala uma cruz num espaço, fazendo corresponder primeiro as poltronas da sala aos espaços de seu mapa, depois os espaços às entradas vendidas e por último estas entradas aos espectadores admitidos na sala. Se ela for preguiçosa demais para efetivamente contar o número de entradas vendidas, este procedimento elementar, aplicado três vezes, lhe permitirá certamente pendurar a placa “lotado” ao final da operação.

Para enunciar os atributos de Alá (há 99 deles, além de outro, o centésimo, correspondente ao “verdadeiro nome de Deus”), ou então para recitar as (99 + 1) eulógias obrigatórias após a prece, os muçulmanos costumam usar um *rosário* no qual cada conta corresponde a um atributo divino ou a uma eulógia. Este objeto de devoção na verdade consiste em um colar de cem pérolas (99 pequenas e uma grande) que escorrega entre os dedos à medida que se recitam as eulógias ou se enunciam os atributos de Alá.





Também os budistas conhecem esta mesma prática há muito tempo. Ela é encontrada, do mesmo modo, entre os cristãos quando recitam os *Pater Noster*, os *Gloria Patri*, as *Ave-Marias* etc. Como estas litânicas devem ser repetidas várias vezes, cada uma segundo números bem determinados, o rosário cristão é composto de um colar com cinco dezenas de contas pequenas, separadas umas das outras por uma grande, e mais uma cadeia com uma conta grande, três pequenas, outra grande e uma cruz. É assim que estas ladainhas podem ser repetidas sem ser contadas e sem esquecer nenhuma: reza-se uma *ave-maria* para cada conta pequena, um *glória* para o último grão de cada dezena, um *paio* para cada conta grande etc.

Graças ao princípio da correspondência unidade por unidade, estas religiões elaboraram esse tipo de sistema para evitar que os fiéis se percam nas suas litânicas dos nomes divinos ou nas repetições consideráveis de suas invocações sagradas.

Fica claro deste modo como este princípio pode prestar serviço às pessoas mais "civilizadas", além de ser de maior utilidade ainda para os homens "totalmente incultos". Vejamos o exemplo de um homem completamente ignorante em aritmética mandado ao quitandeiro da esquina para comprar dez pães doces, cinco latas de óleo e quatro sacos de batatas. Como confiar uma tarefa destas a alguém que não sabe contar e que não poderia, portanto, manipular o dinheiro como fazemos habitualmente?

Na verdade, este homem será perfeitamente capaz de fazê-lo se esta operação for previamente colocada a seu alcance. Bastará apelar para um subterfúgio material, cujo princípio de base será justamente o da correspondência unidade por unidade. Assim, serão confeccionados dez pequenos sacos de tecido branco, associados aos pães doces; cinco de tecido amarelo, associados às

latas de óleo; e quatro sacos de tecido marrom, que corresponderão aos sacos de batatas. Em seguida, será colocada em cada um deles a soma de dinheiro exatamente correspondente ao preço dos artigos desejados. Finalmente, bastará explicar ao homem que ele tem de trocar cada saco branco por um pão doce, cada saco amarelo por uma lata de óleo e cada saco marrom por um saco de batatas, para que tudo dê certo.

#### TÉCNICAS PRIMITIVAS DE "CONTABILIDADE"

Foi sem dúvida graças a este princípio que, durante milênios, o homem pré-histórico pôde praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato. É o que se percebeu ao estudar o comportamento de indivíduos totalmente incultos e o de inúmeras povoações indígenas da Oceania, da África e da América. Pois, através de técnicas que lhes são próprias (e que podemos qualificar de "concretas" face aos nossos meios atuais), esta gente consegue obter, pelo menos até certo ponto, os mesmos resultados que nós.

Vejamos o exemplo de um pastor que guarda um rebanho de carneiros todas as noites numa caverna. São cinquenta e cinco animais, mas este pastor, que tal como o homem precedente não sabe contar, ignora completamente o que seja o número 55. Ele sabe apenas que há "muitos" carneiros. Mas, como isto é muito vago, precisaria estar certo de que todas as noites o rebanho inteiro está protegido. Um dia ele tem uma idéia. Sem saber, vai recorrer a um procedimento concreto que os homens pré-históricos conheceram vários milênios antes dele: a *prática do entalhe*. Ele se senta à entrada da caverna e faz entrar um por um os animais. Com um seixo, faz um entalhe num pedaço de osso cada vez que um carneiro passa a sua frente. Assim, sem conhecer a verdadeira significação matemática, ele fez exatamente cinquenta e cinco talhos com a passagem do último animal, e poderá em seguida verificar sem dificuldade se seu rebanho está completo ou não. Toda vez que voltar do pasto ele fará os carneiros seguirem um por um, colocando cada vez um dedo num talho. Se sobrar algum talho quando todos os animais tiverem passado, é porque algum se perdeu; senão, tudo vai bem. Se nascer algum



filhote, bastará fazer um talho suplementar no seu pedaço de osso.

Desse modo, graças ao princípio da correspondência um por um, podemos obter resultado mesmo se a linguagem, a memória ou o pensamento abstrato são completamente falhos.

Quando queremos equiparar termo a termo os elementos de uma primeira coleção com os de uma segunda, origina-se uma noção abstrata, inteiramente independente da natureza dos seres ou dos objetos presentes e que exprime uma característica comum a estas duas coleções. Desta forma, conjuntos como o dia e a noite, os gêmeos, um casal de animais, as asas de um pássaro ou ainda os olhos, as orelhas, os braços, os seios ou as pernas de um ser humano apresentam um caráter comum, totalmente abstrato, que é justamente o de "ser dois". Ou seja, a propriedade de equiparação suprime a distinção existente entre dois conjuntos, em razão da natureza de seus elementos respectivos. É em função desta abstração que o artifício da correspondência unidade por unidade pode exercer um papel importante em termos de enumeração. Mas na prática os métodos daí derivados só são adequados a coleções relativamente reduzidas.

Por esta razão, o recurso a instrumentos materiais pode revelar-se de grande valia no caso, pois ele fornece um certo número de conjuntos padrão aos quais podemos sempre nos referir, independentemente da natureza de seus integrantes. Ao gravar, por exemplo, vinte entalhes num pedaço de osso ou de madeira, pode-se tanto considerar vinte homens, vinte carneiros, vinte cabras quanto vinte bisões, vinte cavalos, vinte dias, vinte peles, vinte canoas ou iguais medidas de trigo. Assim, toda técnica do número forjada nessas condições se reduzirá de agora em diante em escolher, dentre os conjuntos padrão disponíveis, aquele que será equiparado termo a termo com o grupo cuja totalidade se quer atingir.

Mas em vez da prática do entalhe podemos naturalmente recorrer a vários outros instrumentos materiais para aplicar este princípio. Nosso pastor poderia ter empregado pedrinhas para verificar se os carneiros que ele soltara de manhã haviam todos voltado à noite. Bastaria associar uma pedra a cada cabeça a seu encargo, guardar todas estas peças e depois, na volta, proceder à correspondência inversa. Ao ver o último animal corres-

ponder à última pedra de seu monte, ele poderia estar certo de que nenhuma cabeça se perdera. E, se um carneiro viesse ao mundo nesse meio tempo, bastaria acrescentar uma nova pedrinha a seu monte...

Com este mesmo objetivo, homens de toda parte utilizaram também conchas, pérolas, frutos duros, ossos, pauzinhos, dentes de elefante, cocos, bolinhas de argila, grãos de cacau e até excrementos secos, tudo arrumado em montinhos ou em fileiras correspondentes à quantidade de seres ou de objetos que queriam enumerar. Do mesmo modo, alinharam riscos na areia, nós em pequenas cordas, ou debulharam pérolas e conchas enfiadas numa espécie de rosário. Também usaram os dedos das mãos ou os membros das diferentes partes do corpo humano.

Os elema e os papua da Nova Guiné, os bosquímanos da África do Sul, os lengua do Chaco, no Paraguai, assim como vários outros aborígenes oceânicos, africanos ou americanos ainda procediam deste modo no começo do século. Eles se referiam, numa ordem sempre previamente estabelecida, às articulações dos braços e das pernas, aos olhos, às orelhas, ao nariz, à boca, ao tórax, aos seios, aos quadris, ao esterno e até às partes genitais. Conforme as tribos, chegava-se desta maneira a "contar visualmente" até 17, 29, 33 ou mesmo mais.

#### COMO CONTAR SEM SABER CONTAR

Imaginemos um grupo de indígenas. Eles ainda não são capazes de conceber os números abstratos, mas conseguem contornar o problema, obtendo resultados satisfatórios quando se trata de quantidades relativamente reduzidas. Para tanto, recorrem a todo tipo de meios concretos. Mas na maioria das vezes eles "contam visualmente" segundo a técnica corporal a seguir:

*Toca-se sucessivamente um por um os dedos da mão direita a partir do menor, em seguida o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho do lado direito. Depois se toca o nariz, a boca, o olho, a orelha, o ombro, o cotovelo e o pulso do lado esquerdo, acabando no dedo mindinho da mão esquerda. Chega-se assim ao número 22. Se isto não basta, acrescenta-se primeiramente os seios, os quadris e o sexo, depois os joelhos, os*



tornozelos e os dedos dos pés direito e esquerdo. O que permite atingir dezanove unidades suplementares, ou seja, 41 no total.

Uma expedição militar foi recentemente levada a cabo por estes indígenas contra uma aldeia vizinha que se revoltou, submetendo-se em seguida. Ao fim da reunião do conselho de guerra, o chefe decide exigir uma reparação, e encarrega vários de seus comandados de cobrar o resgate junto aos habitantes desta aldeia.

“Para cada guerreiro perdido no combate” — diz o chefe — “deverão dar-nos tantos colares de pérolas quantos existem desde o dedo mindinho da mão direita até o olho do mesmo lado. Em seguida, tantas peles quantas existirem desde o dedo mínimo da mão esquerda até a boca. Finalmente, tantos cestos de alimento quantos podem haver desde o mindinho da mão direita até o pulso esquerdo.”

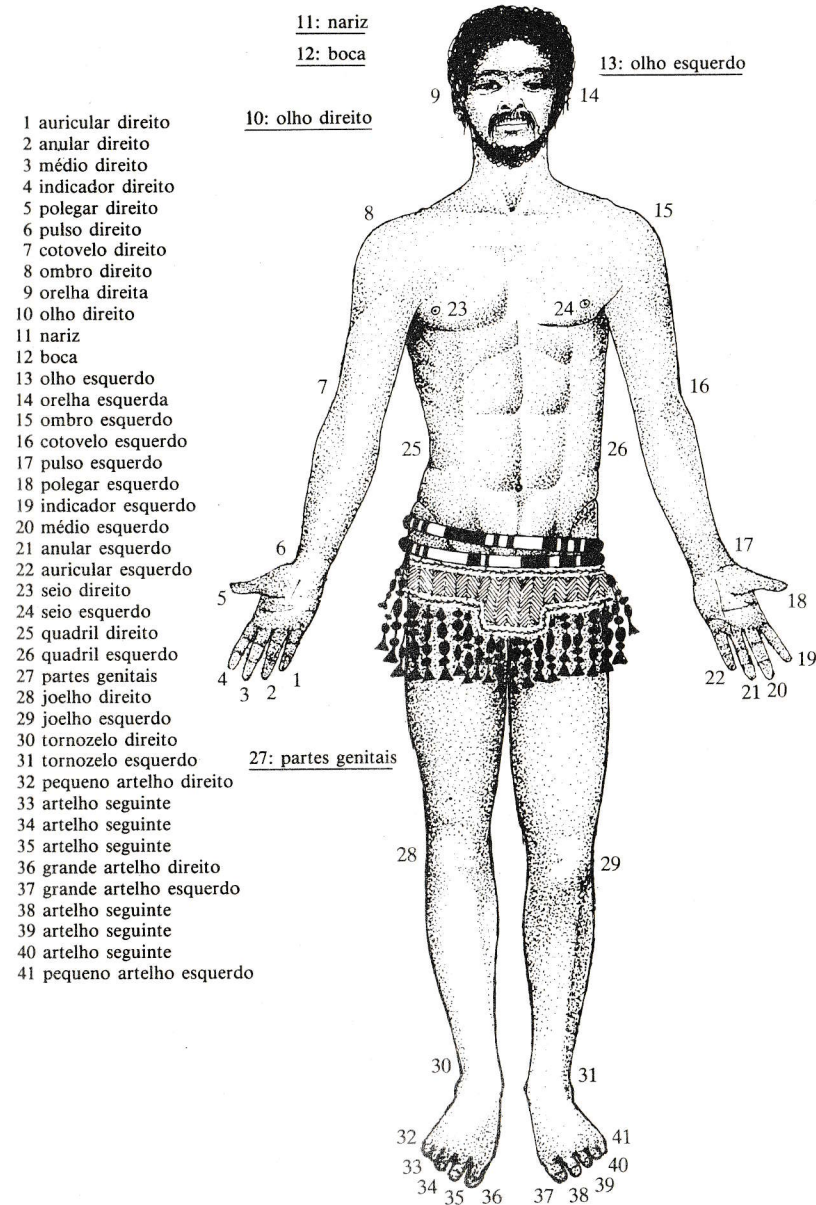
O chefe explica então aos seus homens que a punição infligida aos rebeldes foi fixada em:

10 colares de pérolas	} para cada guerreiro morto no combate.
12 peles de animais	
17 cestos de alimento	

Nesta batalha, nossos indígenas perderam dezesseis homens. Evidentemente, eles não conhecem o número dezesseis, mas dispõem no caso de um meio infalível para determiná-lo. Antes da expedição, cada guerreiro coloca uma pedrinha num monte e a retira na volta. Assim, as pedras restantes correspondem exatamente ao número de perdas no combate.

Um dos enviados do chefe pega então dezesseis pedrinhas, que são substituídas por um monte de pauzinhos de mesmo número, mais fáceis de transportar. O chefe verifica se seus mensageiros assimilaram e guardaram bem todas as instruções, e eles partem para a aldeia rebelde...

Depois de comunicar aos vencidos “o montante” da pena que eles devem pagar, os enviados iniciam a enumeração do resgate. Um deles se adianta e manda que os habitantes da aldeia tragam um colar de pérolas a cada vez que ele designar uma parte de seu corpo. Ele mostra, sucessivamente, o auricular, o anular, o médio, o indicador e o polegar da mão direita. Trazem-lhe um primeiro colar, um segundo, e assim até o quinto. Em seguida ele passa para o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha



O corpo humano: origem da aritmética  
(técnica corporal utilizada pelos papua da Nova Guiné).



e o olho direito, o que permite obter, conseqüentemente, cinco colares suplementares. Assim, sem conceber abstratamente o número exato, ele consegue ao final desta operação os dez colares exigidos.

Adotando o mesmo procedimento, um outro mensageiro recolhe doze peles de animais e um terceiro se apropria dos dezesseis cestos de alimento. Então aquele que conhece o número de guerreiros mortos na guerra entra em cena e separa um dos dezesseis preciosos pauzinhos. Recomeçam-se as três operações precedentes, depois das quais se separa um segundo pauzinho, continuando assim até que eles se acabem. Quando os mensageiros constatam que a conta está feita, apanham o resgate e voltam para sua aldeia...

Como podemos perceber, estes aborígenes não usam esta técnica de acordo com uma concepção exatamente idêntica à que poderíamos ter. Para nós que sabemos contar de maneira totalmente abstrata, a ordem preestabelecida das diversas partes do corpo envolvidas constitui na verdade uma *série aritmética* propriamente dita, e cada uma delas se transforma em nosso pensamento num verdadeiro "número de ordem". Assim, cada uma dessas referências corporais consecutivas poderá ser, para nós, característica de uma certa quantidade de seres, de objetos ou de elementos quaisquer. Para indicar, através desse meio, o número de dias da semana, por exemplo, não será preciso nos lembrarmos de que esta comporta tantos dias quantas referências existem na sucessão que vai do dedo auricular direito ao cotovelo do mesmo lado. Bastará dar o "número de ordem" do último dia da semana designando simplesmente o cotovelo direito, que sozinho simboliza para nós a importância numérica de toda coleção de sete elementos.

Na verdade, dispomos de uma *abstração generalizadora* que nos permite deduzir os conceitos propriamente ditos e, particularmente, a noção de número.

Mas este não é o caso dos indígenas, *que não são capazes de fazer abstração das diferenças individuais e cuja concepção ainda depende muito da especificidade das coleções consideradas*. Eles conhecem apenas a correspondência unidade por unidade e, exigindo muito de sua memória, só podem recorrer neste

caso a movimentos consecutivos que acrescentem ou suprimam uma ou algumas unidades de um conjunto inicial.

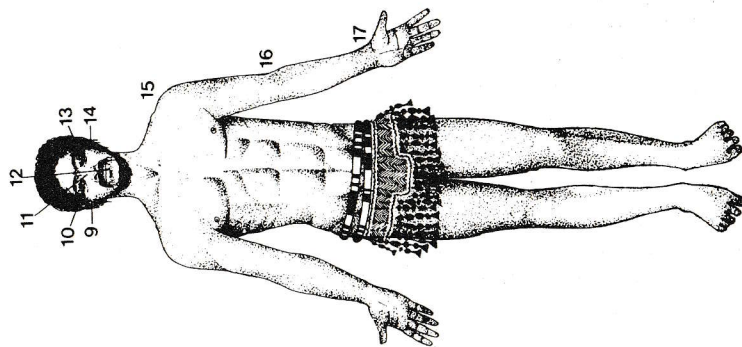
Evidentemente, estes homens não têm nenhuma idéia abstrata do número 10, por exemplo. Mas eles sabem que, ao tocar sucessivamente o dedo mindinho, o anular, o médio, o indicador e o polegar da mão direita, e em seguida o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho do mesmo lado, poderão fazer passar tantos homens, animais ou objetos quantas referências corporais houver nesta sucessão. E após esta operação eles lembrarão perfeitamente até que parte do corpo está relacionada uma quantidade de seres ou objetos igual a este número. Assim, toda vez que repetirem esta mesma operação, reencontrarão sempre este mesmo número.

Isto significa que para eles este procedimento não passa de um meio simples e cômodo para obter conjuntos padrão que podem ser equiparados termo a termo com os grupos cuja totalidade desejam atingir. Quando nossos indígenas foram exigir o resgate dos rebeldes, eles apelaram exatamente para esta noção. Simplesmente equipararam termo a termo três desses conjuntos padrão com dez colares de pérolas, doze peles de animais e dezesseis cestos de alimento para cada um de seus guerreiros mortos em combate.

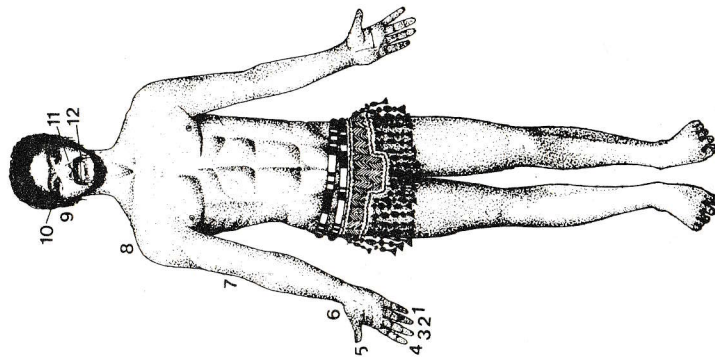
Assim, cada uma dessas referências corporais não é considerada por estes indígenas como um "número". A seus olhos, trata-se, antes, do último elemento de um conjunto padrão, cujo resultado se atinge ao fim de uma sucessão regulada de movimentos feitos em relação a estas partes do corpo. O que significa que, *para eles, a simples designação de uma destas partes não basta para caracterizar uma certa quantidade de seres ou de objetos, se não for acompanhada pela série de gestos correspondentes*. Numa conversa sobre este ou aquele número, não se pronunciará "nome de número" propriamente dito. Eles se contentarão em *enumerar*, na ordem que se impõe, um certo número de partes do corpo, e se referirão simultaneamente à seqüência de gestos associados, pois esta enumeração não basta para constituir uma verdadeira série aritmética... O que evidentemente obrigará o interessado a fixar os olhos no narrador.

No entanto, mesmo com meios assim limitados, nossos in-

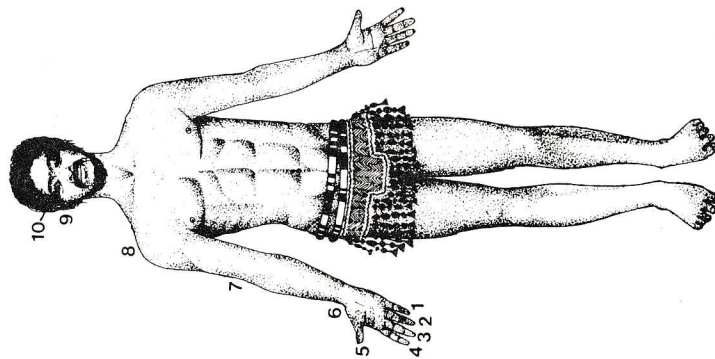




Contagem de 17 cestos de alimento.



Contagem de 12 peles de animais.



Contagem de 10 colares de pérolas.

dígenas conseguiram, sem o saber, chegar a números relativamente elevados, porque na verdade eles recolheram:

$$16 \times 10 = 160 \text{ colares de pérolas}$$

$$16 \times 12 = 192 \text{ peles de animais}$$

$$\text{e } 16 \times 17 = 272 \text{ cestos de alimento,}$$

ou seja, ao todo, *seiscentos e vinte e quatro unidades!*

A explicação é muito simples: eles tiveram a idéia de associar as diversas partes do corpo envolvidas em suas operações a objetos concretos bem mais fáceis de manipular; “contaram” muito bem os colares, as peles e os cestos por meio de sua técnica corporal habitual, mas os homens mortos na guerra (elemento determinante do resgate) foram “enumerados” graças a ajuda de pedrinhas ou pauzinhos. . .

### UM CALENDÁRIO EMPÍRICO

Na aldeia, é o momento de descobrir o dia e o mês em que deve ser celebrada uma importante cerimônia religiosa. O feitiçeiro, que anunciou de manhã a chegada da meia-lua, acaba de comunicar, através de alguns gestos bem precisos, que a partir deste dia a cerimônia terá lugar exatamente *no décimo terceiro dia da oitava lua*:

“Vários sóis e várias luas” — declarou ele — “deverão aparecer e desaparecer antes da chegada da festa. A lua que acaba de nascer deverá encher-se e depois se esvaziar completamente. Depois ela deverá renascer tantas vezes quantas puder, desde o dedo mindinho de minha mão direita até o cotovelo do mesmo lado. Depois o Sol deverá levantar-se e pôr-se tantas vezes quantas puder desde o dedo mínimo de minha mão direita até a boca. Só então se levantará o sol em que comemoraremos juntos a cerimônia do Grande Totem”.

Estes homens sabem, claramente, se situar em relação à sucessão lunar. O que é perfeitamente normal, desde que se trata do fenômeno natural mais regular e evidente depois da alternância do dia e da noite. E, como em todos os *calendários empíricos*, eles o fazem através da observação do primeiro quarto crescente após um período lunar. É então que eles vão poder “contar o tempo” e chegar sem erro à data combinada, de acordo com alguns procedimentos concretos legados pela tradição e



que seus ancestrais inventaram após muitas gerações de tentativas e de reflexões. . .

Seguindo as palavras do feiticeiro, o chefe traça em seu próprio corpo, com um produto corante durável, alguns sinais apropriados que permitirão guardar esta data importante e reencontrá-la sem erro. Primeiro ele registra as aparições consecutivas da Lua a partir daquele momento, fazendo um *pequeno círculo* no auricular, no anular, no médio, no indicador, no polegar, no pulso e no cotovelo do braço direito. Depois marca os dias consecutivos à chegada da última lua fazendo um *pequeno traço* em cada dedo de sua mão direita, no pulso, no cotovelo, no ombro, na orelha e no olho do mesmo lado, e finalmente no nariz e na boca. Ele faz então um *grande traço* acima de seu *olho esquerdo*, para simbolizar a chegada do dia fatídico.

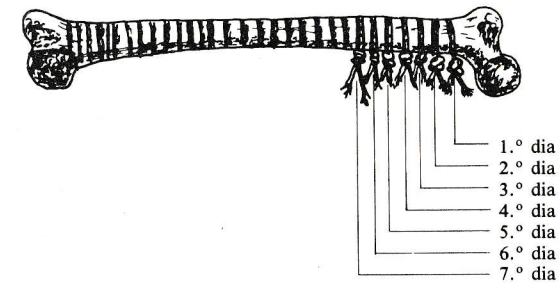
No dia seguinte, ao pôr-do-sol, o encarregado pelo chefe de “contar as luas” pega um desses ossos de trinta entalhes que servem para contar os dias de uma mesma lua na sua ordem de sucessão regular. Ele amarra uma cordinha em torno do primeiro entalhe. No fim do dia seguinte, amarra outra cordinha em torno do segundo entalhe, e assim por diante até o fim do mês. No penúltimo entalhe, ele observa atentamente o céu, na direção do poente, pois já sabe que o primeiro quarto crescente logo deve aparecer.

Mas hoje a lua nova ainda não está visível no céu. Ele retoma então sua observação no dia seguinte, depois de amarrar uma cordinha em torno do último entalhe, e mesmo que o estado do céu não lhe tenha permitido descobrir a lua nessa noite, ele deduz a chegada de um novo mês. Nesse momento, desenha um pequeno círculo no auricular direito, para mostrar o encerramento do período lunar.

Na noite seguinte, nosso homem pega um osso idêntico e amarra uma cordinha em torno do primeiro entalhe. Na noite posterior, faz a mesma coisa no segundo entalhe, e assim por diante até o final do segundo período lunar. Mas ao final desse mês ele percebe que, de agora em diante, não será mais preciso perscrutar o céu para observar o nascimento efetivo do quarto crescente.

Com efeito, seus ancestrais já observaram há muito tempo que um período lunar se encerra alternativamente no antepenúltimo

ou no último entalhe de seu osso. E eles erraram por muito pouco, pois a duração média das fases lunares equivale a mais ou menos 29 dias e 12 horas.



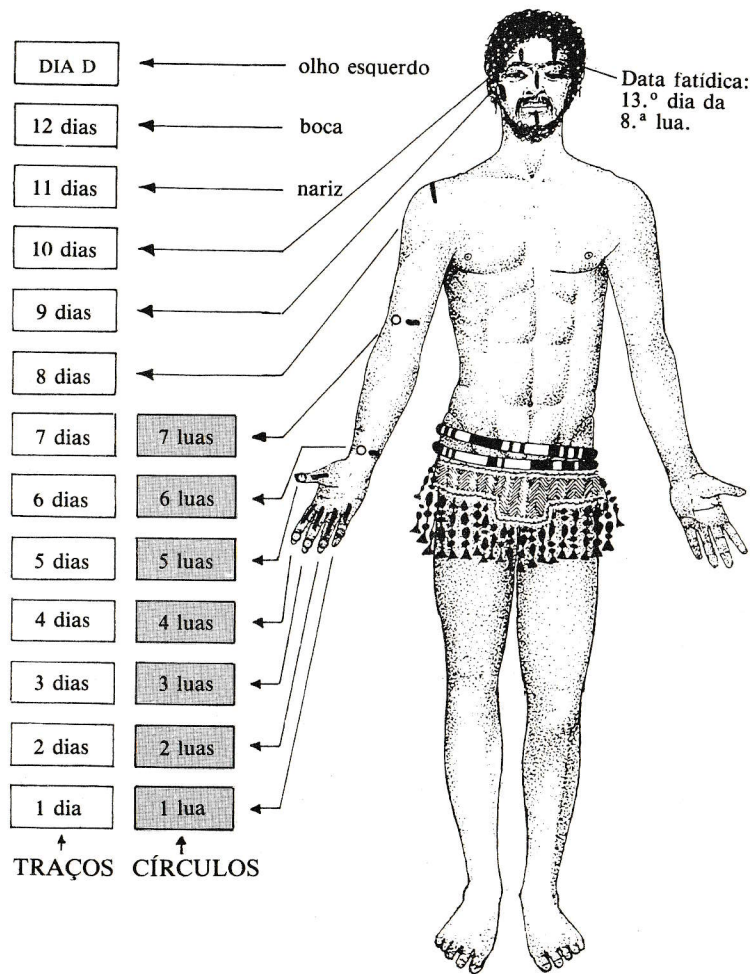
Ele procede deste modo, considerando sucessivamente meses alternados de 29 e 30 dias até a chegada da última lua, quando traça um pequeno círculo no seu cotovelo direito. Em seguida, ao constatar que há tantos círculos na sua tatuagem quantos na do chefe, percebe que sua tarefa chegou ao fim, pois a “contagem das luas” terminou.

De agora em diante o chefe se ocupará da “contagem” do tempo, ou melhor, dos dias que faltam para chegar à data combinada. Mas, em vez de proceder como o homem anterior, amarrando cordinhas num osso entalhado, ele contará estes dias nas partes de seu corpo.

E nossos indígenas celebraram a cerimônia do Grande Totem no dia em que seu chefe chegou ao *olho esquerdo*, depois de ter cancelado sucessivamente, nos doze primeiros dias da oitava lua, cada um dos doze pequenos traços que fizera em seu corpo desde o auricular direito até a boca.

Tais métodos, dos quais existem vários testemunhos, por exemplo, nos indígenas da Austrália, indicam assim uma superioridade evidente em relação a procedimentos elementares, como a prática do entalhe ou o acúmulo de pedras, considerados apenas através do ângulo da equiparação. Eles não utilizam mais





unicamente o princípio da correspondência unidade por unidade, mas introduzem também a relação tão importante da *sucessão*. A noção de ordem já está aí presente, mesmo não sendo verdadeiramente conhecida.

Trata-se, conseqüentemente, de um progresso considerável, pois nesse estágio já não falta muito para aprender a "contar"...

## A CONSCIÊNCIA DA ORDEM E A DESCOBERTA DOS NÚMEROS

Um pastor muçulmano de um certo país do Oriente Próximo, a quem foram confiadas ovelhas para pastar, pôs-se a enumerá-las recitando simplesmente esta litania:

"Louvemos Alá, o mestre do universo,  
O clemente, o misericordioso,  
O soberano no dia da retribuição  
É a ti que adoramos, é a ti que imploramos socorro.  
Põe-nos no caminho certo,  
Na trilha dos que cumulaste com teus benefícios,  
Daqueles que não desafiam a tua cólera e que nunca se perdem.  
Amém".

Em vez de contar seus animais dizendo na sua língua algo como *um, dois, três, quatro...* ele havia pronunciado as palavras sucessivas do recitativo, e vencido assim uma nova etapa na ordem regular a cada vez que uma ovelha passava a sua frente. E quando o primeiro animal passou diante de seus olhos ele reteve a palavra correspondente, que passou a simbolizar para ele a importância numérica do rebanho.

É preciso notar que este pastor era muito supersticioso, cheio do temor ancestral do "pecado da enumeração", expresso no conhecido refrão: "Quando se contam crianças e ovelhas, o lobo as come". Ainda difundida em nossos dias, esta velha crença, cuja superstição relativa ao 13 é uma das reminiscências entre nós, traduz na verdade o medo e a repugnância que, desde tempos imemoriais, as tradições populares manifestaram (e às vezes ainda manifestam) em relação ao número e à arte de contar.

Na África, por exemplo, muitas cabanas têm uma única entrada: todas as pessoas que vão ali dormir devem ser advertidas de que, se cometerem a imprudência de deitar com os pés virados para o exterior, os espíritos malignos da noite, cuja vocação é tudo contar a sua passagem, rapidamente contarão seus dedos dos pés, carregando-as consigo!

Segundo esta mesma crença, os números não se limitariam a exprimir quantidades aritméticas; eles encerrariam também idéias e forças desconhecidas aos comuns dos mortais, ora bené-



ficas ora malélicas, capazes de se deslocar numa corrente invisível, mais ou menos como um rio subterrâneo. Por isso não se devia empregá-los por qualquer motivo. Se era permitido contar sem inconveniente elementos que não nos dissessem respeito — como por exemplo os seres ou os objetos dos outros —, era preciso evitar, ao contrário, enunciar os números referentes aos seres queridos ou às coisas que nos tocassem diretamente; pois *nomear uma entidade é permitir que ela seja circunscrita*. Uma pessoa nunca devia dizer o número de seus irmãos, esposas ou filhos, nem o de bois, ovelhas ou casas, nem tampouco sua idade ou o montante dos bens — o que poderia dar aos espíritos do mal a idéia de apreender o poder secreto desses números, conferindo-lhes conseqüentemente o poder de agir sobre as pessoas ou as coisas enumeradas. . .

Assim, por pura superstição, nosso pastor adotara aquela oração para poder determinar o número de seus animais e ao mesmo tempo conjurar o azar. A ladainha se apresentara a ele, na verdade, como uma espécie de “máquina de contar”, dotada ao mesmo tempo de virtudes protetoras; na realidade, trata-se do conjunto dos sete versos da *fatiha* (“a abertura”), que abrem o Corão e que todo muçulmano tem de saber de cor e recitar rigorosamente na ordem de sua sucessão.

Independentemente de qualquer consideração religiosa ou supersticiosa, este pastor utilizava a litania mais ou menos como as crianças usam hoje os versinhos que costumam recitar para determinar, pela sucessão de sílabas correspondentes, aquele ou aqueles que terão um papel particular em seus jogos (e que os soldados alemães recitavam outrora para dizimar seus prisioneiros!).

Estes versos começam geralmente por “um, dois, três”. Em seguida vêm duas ou várias fórmulas de três sílabas, e no final ora a repetição dos três primeiros nomes de números, ora uma frase como “fuja” ou “e foi embora”. Muitos deles foram deformados pelo uso, a ponto de se tornarem incompreensíveis; mas às vezes é possível reencontrar a formulação original, como, por exemplo, nessa famosa canção:

*Am, stram, gram,  
Piké, piké, kollégram,  
Bouré, bouré, ratatam,  
Am, stram, gram.*

que é uma velha cantiga de roda germânica, transformada pelas crianças, e cuja tradução em português é a seguinte:

“Um, dois, três,  
Voa, voa, besouro,  
Corre, corre, cavaleiro,  
Um, dois, três”.

Correspondendo na maioria das vezes a velhas expressões mágicas, os versinhos constituem sem dúvida, eles próprios, uma sobrevivência do antigo temor mítico dos números. Eles foram provavelmente imaginados por pajens de crianças ou por pastores supersticiosos, que assim encontraram um meio cômodo de contar crianças ou animais sem expô-los à má sorte.

Um outro modo de contar oralmente sem enumeração é o de uma criança com problemas de adaptação que pude observar recentemente. Ela tinha o hábito de enumerar os seres e as coisas próximos pronunciando nesta ordem os seguintes nomes: *André, Jacques, Paul, Alain, Georges, François, Gérard, Robert*. . . Na verdade, no dormitório, seu colega André ocupava sempre o primeiro leito, Jacques, o segundo, Paul, o terceiro, Alain, o quarto e assim por diante. Esta ordem de sucessão invariável se fixara em sua memória visual e se transformara em seu espírito numa ordem numérica.

Da mesma forma, uma menina que ganhou balas pôs-se a contá-las através da série conhecida: *janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho*. . . Ela poderia ter usado igualmente a sucessão das letras do alfabeto (A, B, C, D, E. . .), pois uma série de palavras ou de símbolos torna-se uma espécie de “máquina de contar” quando disposta numa ordem rigorosa preestabelecida. Acontece exatamente a mesma coisa com relação às referências corporais.

## O CORPO HUMANO, ORIGEM DA ARITMÉTICA

Quando se considera um certo número de partes do corpo humano numa ordem previamente estabelecida, e sempre a mesma, sua sucessão, pela força da memória e do hábito, acaba mais cedo ou mais tarde por tornar-se numérica e abstrata. As referências correspondentes (sobretudo as primeiras, que são as



mais comuns na prática) passam a evocar então cada vez menos as simples partes do corpo, para suscitar mais fortemente no espírito a idéia de uma certa série de números. Elas tendem, assim, a se destacar de seu contexto para se tornar aplicáveis a seres, objetos ou a elementos quaisquer...

Isso explica por que as técnicas corporais do número adquirem tanta importância na história universal da aritmética. Certamente foram elas que levaram nossos longínquos ancestrais a tomar consciência da noção de ordem, fadada a exercer um papel fundamental tanto nas matemáticas quanto em qualquer ciência. Elas lhes permitiram adquirir pouco a pouco a faculdade de contar e lhes abriram caminho para uma verdadeira compreensão dos números abstratos. Sem elas nossos procedimentos numéricos provavelmente não teriam vencido a fase das técnicas elementares de equiparação.

Enquanto o ser humano recorrer ao artifício da contagem abstrata, as diversas partes de seu corpo aí estarão para lembrar-lhe a origem humana, propriamente antropomórfica, desta etapa que é, sem dúvida, a mais decisiva de sua evolução mental.

#### CONTAR: UMA FACULDADE HUMANA

Ao contrário da percepção direta dos números, a contagem não é uma aptidão natural. Já observamos que certas espécies animais são mais ou menos dotadas de uma espécie de sensação numérica, o que não implica que elas saibam contar como nós. Pelo que sabemos, a contagem é com efeito um *atributo exclusivamente humano*: diz respeito a um fenômeno mental muito complicado, intimamente ligado ao desenvolvimento da inteligência.

“Contar” os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo (uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico, por exemplo) correspondente a um número tirado da “seqüência natural de números inteiros”, começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos. Nesta coleção assim transformada em seqüência, cada um dos símbolos será, conseqüentemente, o *número de ordem* do elemento ao qual foi atribuído. E “o número de integrantes deste conjunto” será o número de ordem do último de seus elementos.

Como exemplo, tomemos uma caixa com vinte bolas. A

primeira vista, dizemos que há várias bolas nesta caixa, mas, como isto não é muito preciso, recorreremos à contagem para saber o número exato. Tiramos então uma bola qualquer e lhe atribuímos o “número 1”, depois uma outra que recebe o “número 2”, e assim por diante até não restar mais nada na caixa. Ao tirarmos a última bola, que receberá o “número 20”, diremos então sem ambigüidade que havia *vinte* bolas na caixa, e teremos transformado um dado vago numa informação precisa.

Tomemos agora um conjunto de pontos dispostos em desordem. Evidentemente, nossa visão global não nos pode socorrer: de um só golpe de vista não reconhecemos a quantidade exata de pontos. É preciso contar. Para isto, basta ligar estes pontos através de uma linha em “zigzag”, passando sucessivamente de um a outro: deste modo não esqueceremos nenhum e não voltaremos a um ponto já considerado. Estes pontos formarão então o que se convencionou chamar de *cadeia*. Em seguida atribuiremos um número de ordem a cada componente, a partir de um de seus pontos extremos. O número do ponto terminal desta cadeia nos dará o número de pontos considerados.

Graças ao artifício da contagem, uma noção confusa, heterogênea e pouco precisa — a pluralidade concreta — se transforma assim, em nosso espírito, numa noção abstrata e homogênea, a da *quantidade absoluta*. Quer comecemos a enumeração por este ou aquele elemento, este processo conduzirá sempre ao mesmo resultado: o número de elementos de uma coleção é inteiramente dependente da ordem de “numeração” de seus elementos.

São necessárias três condições psicológicas para que um homem saiba contar e conceber os números no sentido em que os entendemos:

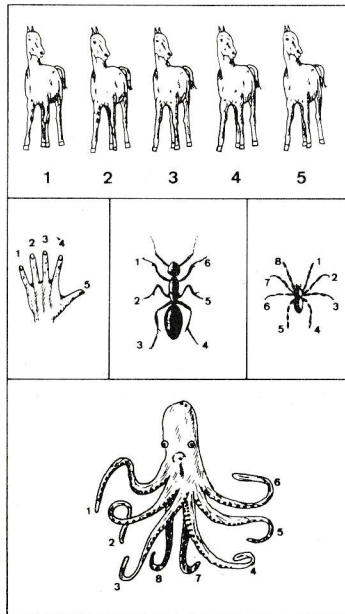
— *ele deve ser capaz de atribuir um “lugar” a cada ser que passar diante dele;*

— *ele deve ser capaz de intervir para introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as que precederam;*

— *ele deve saber conceber esta sucessão simultaneamente.*

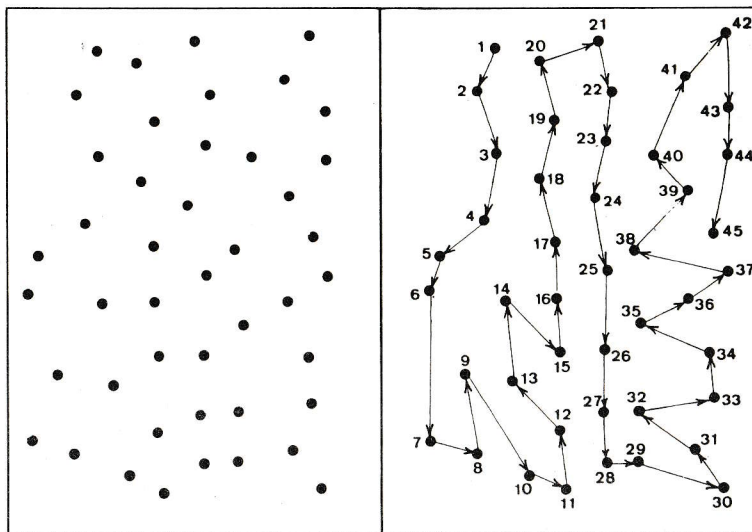
Para permitir um progresso decisivo na arte do cálculo abstrato, a compreensão dos números exige então sua “classificação em um sistema de unidades numéricas hierarquizadas que se encaixam consecutivamente umas nas outras”. Esta organiza-





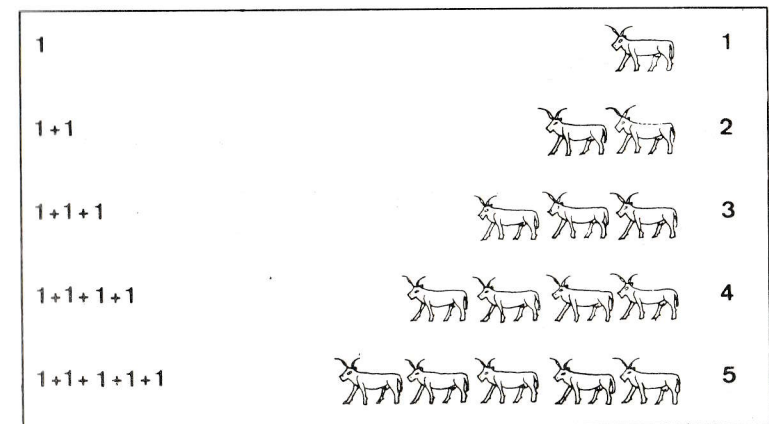
◀ A contagem, que permite a passagem da pluralidade concreta ao número abstrato.

Contagem de uma "nuvem" de pontos.



ção dos conceitos numéricos segundo uma ordem de sucessão invariável consiste na idéia que torna os números inteiros verdadeiras coleções de entidades abstratas, obtidas sucessivamente, a partir de "1", por acréscimo suplementar de uma unidade.

Na verdade, todo integrante da seqüência regular dos números inteiros diferente de "1" é obtido pelo acréscimo de uma unidade ao número que o precede nesta sucessão natural. É o chamado *princípio de recorrência*, do qual se conclui, segundo a expressão do filósofo alemão Schopenhauer, que "todo número inteiro natural pressupõe os precedentes como causa de sua existência". Isto é, *nosso espírito só é capaz de conceber um número sob o ângulo da abstração se já tiver assimilado os números precedentes*; sem esta capacidade intelectual, os números voltam a ser noções globais bastante confusas no espírito do homem.



A geração dos números inteiros através do processo denominado "recorrência".

A questão do conceito numérico, que à primeira vista pode ter parecido elementar, torna-se agora muito mais complicada. Esta história, contada por Paul Bourdin, reforça nossa observação:

"Conheci uma pessoa que, ao escutar bater quatro horas antes de adormecer, contou desse modo:



*Uma, uma, uma, uma!*

E, diante do absurdo de sua concepção, começou a gritar:  
*O relógio ficou louco, bateu quatro vezes uma hora!*

## OS DOIS ASPECTOS DO NÚMERO INTEIRO

A noção de número recobre dois aspectos complementares: o chamado *cardinal*, baseado unicamente no princípio da equiparação, e o chamado *ordinal*, que exige ao mesmo tempo o processo de agrupamento e o da sucessão.

Estabeleçamos a diferença num exemplo simples. O mês de janeiro comporta trinta e um dias. O número 31 indica aqui o número total de dias desse mês; trata-se então de um número cardinal. Se, ao contrário, consideramos uma expressão como “dia 31 de janeiro”, o número 31 não está sendo empregado sob seu aspecto cardinal, apesar da terminologia, que não passa de um abuso de linguagem consagrado pelo uso. Este conceito designa “o trigésimo primeiro” dia de janeiro: ele especifica o lugar bem determinado de um elemento (no caso, o último) de um conjunto que compreende trinta e um dias; trata-se então de um número ordinal (ou, como se costuma dizer, de um *número*).

“Aprendemos tão facilmente a passar do número cardinal ao ordinal que não distinguimos mais esses dois aspectos do número inteiro. Quando queremos determinar a pluralidade dos objetos de um grupo, isto é, seu número cardinal, não nos sujeitamos mais à obrigação de descobrir um conjunto padrão ao qual possamos compará-lo: nós simplesmente o ‘contamos’. *E nossos progressos em matemática se devem ao fato de termos aprendido a identificar estes dois aspectos do número.* Na verdade, mesmo se na prática é o número cardinal que nos interessa de fato, ele não pode servir de base para uma aritmética, desde que as operações aritméticas se baseiam na hipótese tácita de que podemos sempre passar de um número qualquer ao subsequente. Ora, esta é a própria essência do conceito do número ordinal. Por si só, a equiparação não é capaz de criar o cálculo. Sem nossa facilidade em dispor os seres e os objetos segundo a sucessão natural, pouco teríamos avançado. Nosso sistema numérico está intimamente impregnado por estes dois princípios, a correspondência e a sucessão, que constituem o próprio tecido

de todas as matemáticas e de todos os domínios das ciências exatas” (T. Dantzig<sup>1</sup>).

## DEZ DEDOS PARA APRENDER A CONTAR

Foi exatamente graças aos seus dez dedos que o ser humano adquiriu gradualmente esses elementos. E não é por acaso que nossos alunos ainda hoje aprendem a contar deste modo, ou que nós também às vezes recorremos a esses gestos para reforçar nosso pensamento.

Vejamos o caso da criança pequena. Antes de atingir um grau suficiente de desenvolvimento que lhe permita contar nos dedos, ela permanece, em relação à contagem, na fase de seus primeiros balbucios. Mas a partir do momento em que atinge esse estágio (em geral entre três e quatro anos) ela já é capaz de contar abstratamente, abrindo-se logo a seguir o caminho para um verdadeiro ensino do cálculo. Segundo os pedagogos, nesta idade a criança se encontra no estágio intelectual do “pré-cálculo”. Com efeito, é a partir desse momento que tem início a capacidade de aprendizado da aritmética, permitindo primeiramente a contagem até dez e depois estendendo progressivamente a série dos números na medida em que avança o acesso ao abstrato.

Num livrinho de memórias a respeito da infância de seus filhos, Georges Duhamel conta como Bernard, ou “Baba”, já tinha, graças a seus dedos, uma idéia da sucessão regular dos números inteiros naturais e da propriedade de recorrência, antes mesmo de conhecer os números propriamente ditos:

“O início é muito difícil. Baba se sai como pode. Ele diz:

- Vim buscar as balas, uma para cada um.
- Quantas?
- Uma, uma e uma.

Já é claro, mas ainda não é aritmética de verdade. Ele aprende então a contar nos dedos. Quando lhe perguntam sua idade, a de Maryse ou a de Robert, ele mostra com exatidão um maior ou menor número de dedos. Assim passa uma mão, depois a outra, e de repente as coisas se complicam:

1. *Le nombre, langage de la science*. A. Blanchard, Paris, 1974.



— Quantos anos tem Jacqueline?

Ele pensa um pouco e responde:

— Ah!, para Jacqueline é preciso um ‘dedinho do pé’ ”.

Dentre as técnicas corporais do número, o recurso aos dedos da mão desempenhou realmente um papel determinante. A humanidade inteira aprendeu a contar abstratamente até 5 nos dedos de uma mão; depois aprendeu a prolongar a série até 10 por simetria nos dedos da outra, até ser capaz de estender indefinidamente a sucessão regular dos números inteiros naturais. Existem, efetivamente, em diversas línguas traços indubitáveis desta origem antropomórfica da faculdade de contar.

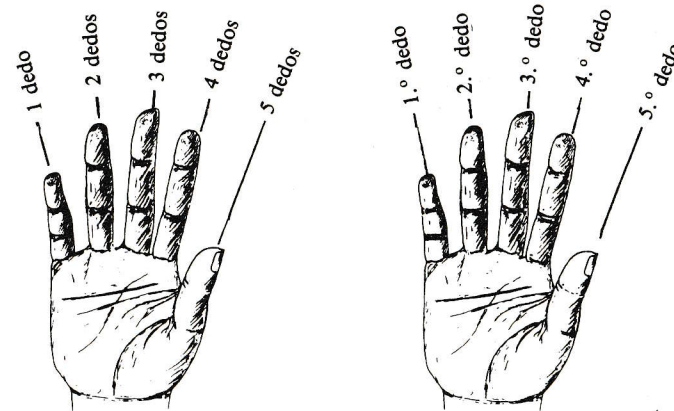
Na língua *ali* da África central, os números 5 e 10 são chamados respectivamente de *moro* e *mbouna*; o sentido etimológico do primeiro é “a mão”, e o segundo é derivado de uma contração de *moro*, “cinco”, com *bouna*, que significa “dois” (logo: 10 = “duas mãos”). Na língua *bugilai*, da Nova Guiné, os nomes dos cinco primeiros números trazem também o mesmo vestígio digital: 1 é *tarangésa* (literalmente, “da mão esquerda, o dedo min-dinho”), 2 é *méta kina* (“o dedo seguinte”), o 3 é chamado de *guigiméta-kina* (“o dedo do meio”), o 4 de *topéa* (“indicador”) e o 5 de *manda* (que significa “polegar”).

Logo, é muito provável que as palavras indo-européias, semíticas ou mongólicas atuais para os dez primeiros números tenham sido elas próprias, há muito tempo, nomes referentes a uma técnica digital do número (mas trata-se de uma simples hipótese, impossível de verificar, pois a verdadeira significação dos nomes originais correspondentes se perdeu na noite dos tempos).

É verdade que a mão do homem é portadora de inúmeros recursos a esse respeito. Ela constitui uma espécie de “instrumento natural” particularmente designado para a aquisição dos dez primeiros números e o aprendizado da aritmética elementar. Pelo número de dedos e graças a sua relativa autonomia e grande mobilidade, ela constitui a coleção de conjuntos padrão mais simples de que o homem dispõe. Pela distribuição assimétrica de seus dedos, a mão inclusive respeita perfeitamente a limitação (até quatro) da capacidade humana de reconhecimento imediato e visual dos números: como o polegar se afasta consideravelmente do indicador, ele permite uma verdadeira oposição em relação aos outros quatro dedos; o que torna os cinco primeiros números

uma série reconhecível de um só golpe de vista. De modo tal que o número 5 se impõe por si mesmo como unidade de contagem, ao lado do patamar da dezena. Finalmente, em função da especificidade de cada um de seus dedos, a mão pode também ser vista como uma verdadeira sucessão de unidades abstratas obtidas consecutivamente a partir da primeira, através da associação suplementar de uma unidade.

O que significa que, com a mão, os dois aspectos complementares do número inteiro tornam-se completamente intuitivos: ela atua como instrumento que permite a passagem insensível do número cardinal ao número ordinal correspondente, ou inversamente. É preciso mostrar que uma coleção comporta três, quatro, sete ou até dez elementos? Levantamos ou dobramos *simultaneamente* três, quatro, sete ou dez dedos, usando-os como um modelo cardinal. E para contar esses elementos? Levantamos ou dobramos *sucessivamente* três, quatro, sete ou dez dedos, e nos servimos então deles como de um sistema ordinal.



ASPECTO CARDINAL

ASPECTO ORDINAL

A mão do homem se apresenta, assim, como a “máquina de contar” mais simples e mais natural que existe. E é por isso que ela exercerá um papel considerável na gênese do nosso sistema de numeração...