

MAE0212 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Exercícios 2 Vanderlei da Costa Bueno

1. O tempo que um aluno de Atuária gasta para fazer uma prova de Estatística tem distribuição Normal com média de $\mu = 90$ min. e desvio padrão igual a $\sigma = 15$ min.
 - a) Qual a duração da prova de forma que, com probabilidade de 0,95, o aluno termine a prova?
 - b) Se a classe tem 57 estudantes qual o número esperado de alunos que terminem a prova antes de 100 min.?

2. Uma Cia de Seguros assume que o Custo do Sinistro referente a certa apólice tem distribuição Normal com média $\mu = 2,48$ u.m. e desvio padrão $\sigma = 0,84$ u.m. .
 - a) Qual a probabilidade de que o custo total referentes a 20 sinistros ultrapasse 60 u.m.?
 - b) Suponha que a Cia adote a seguinte regra: A Cia reavalia a média e a variância do Custo do Sinistro no seguinte instante:

$$N = \min\left\{n : \sum_{i=1}^n X_i > 100\right\}.$$

Qual a probabilidade $P(N > 40)$?

3. Supõe-se que o retorno de investimentos em ações na BOVESPA é uma variável aleatória normal. No setor elétrico o retorno médio é de $\mu_X = 0,1252$ e o desvio padrão $\sigma_X = 0,06$ e no setor bancário tem retorno médio $\mu_Y = 0,1530$ e desvio padrão $\sigma_Y = 0,07$. Sorteiam-se duas amostras aleatórias independentes , de 41 ações do setor elétrico e de 61 ações do setor bancário. Qual a probabilidade de que a diferença absoluta entre os retorno médio dos dois setores seja maior do que 0,03?
4. Dentre os investidores em moedas estrangeiras sabe-se que a proporção dos investidores em Euros é de $p_E = 0,7$ e que a proporção de investidores em Dolar é de $p_D = 0,6$. Em duas amostras aleatórias independentes, de 100 investidores do Euro e de 100 investidores do Dolar, qual a probabilidade de que as proporções amostrais difiram por mais de 0,1?
5. Uma Cia de Seguros de automóveis deseja saber o tamanho necessário da amostra para estimar a proporção de sinistros com perda total de maneira que, com confiabilidade de 90%, cometa um erro menor do que 1%. Qual o valor de n ?
Suponha que a Cia tenha a informação de que a proporção de sinistros com perda total é menor do que 2%. Qual o novo tamanho da amostra? Houve redução?
6. Ao comprar um imóvel no SFH somos obrigados a adquirir um seguro do imóvel. Um dos critérios no qual a Cia de Seguros se baseia para determinar o preço do seguro é a área do terreno.
Suponha que a área é um quadrado. Quando medimos comprimento do seu lado, cometemos um erro aleatório de modo que o comprimento observado X é uma variável aleatória Normal centrada em μ (valor verdadeiro, porém desconhecido), com desvio padrão σ . Côncio deste erro possível decidimos fazer duas observações de X , X_1 e X_2 e tirar a média. Mas temos dúvidas como proceder.
 - (1) Tirar a média de X_1 e X_2 e elevar ao quadrado? Ou
 - (2) Calcular primeiro o quadrado e tirar a média dos resultados?
 - a) Qual método acusa o menor vício?
 - b) Generalizar a resposta em a) para uma amostra de tamanho n .
 - c) Como estimador alternativo para a área, qual o vício de $X_1 X_2$?

7. Suponha que dois economistas estimem μ (a média da taxa de retorno de certo investimento) com dois estimadores não viciados $\widehat{\mu}_1$ e $\widehat{\mu}_2$ (estatisticamente independentes). O Segundo economista é menos cuidadoso que o Primeiro , de maneira que o desvio padrão de $\widehat{\mu}_2$ é cinco vezes maior do que o de $\widehat{\mu}_1$. Solicitado a informar em como combinar $\widehat{\mu}_1$ e $\widehat{\mu}_2$ para obter uma estimativa global, publicável, um grupo de estatísticos apresentou as seguintes propostas:

(1) $\widehat{W}_1 = 0,5(\widehat{\mu}_1 + \widehat{\mu}_2)$;

(2) $\widehat{W}_2 = (0,8\widehat{\mu}_1 + 0,2\widehat{\mu}_2)$;

(3) $\widehat{W}_3 = (0,83\widehat{\mu}_1 + 0,17\widehat{\mu}_2)$;

(4) $\widehat{W}_4 = \widehat{\mu}_1$.

- a) Quais dos estimadores são não viciados?
 b) Dispor esses estimadores por ordem crescente de eficiência.
 c) Determinar a combinação linear mais eficiente possível.

8. Uma Cia de Seguro de automóveis esta interessada em estimar a proporção de sinistros com perda total. Qual o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de, no máximo, 0,01, com probabilidade de 0,85?

9. Em uma apólice de seguros a probabilidade de que um segurado tenha ao menos um sinistro é p . Calcule o estimador de máxima verossimilhança para p baseando-se em uma amostra aleatória de n segurados. Aplique o resultado considerando a tabela abaixo referente aos 100000 segurados do ano de 2010.

No. de Sinistros	No. de apólices
0	88585
1	10577
2	779
3	54
4	4
5	1

10. Observa-se uma sequência de ensaios de Bernoulli, independentes e com parâmetro p , referentes à ocorrência, ou não, de acidentes de trabalho com funcionários de uma fábrica, até a ocorrência do primeiro acidente. Seja X o número de ensaios necessários.
- a) Mostre que X tem distribuição geométrica.
 b) Encontre o EMV para p .
 c) Repetindo-se tal experimento 6 vezes, o número de ensaios necessários até selecionar um funcionário que já sofreu acidente foram 5, 4, 4, 2, 5, e 3 respectivamente. Qual a estimativa de máxima verossimilhança para p ?
11. Suponha que a distribuição dos custos de sinistros relativos a certo risco é uma variável aleatória Normal com média μ , desconhecida, e variância 2. Obtenha o EMV pra μ com base em uma amostra de tamanho n .