IME-USP
MAT230 – Geometria e Desenho Geométrico I
Licenciatura em Matemática – Diurno – 2/2019
Profa. Ana Paula Jahn

Resumo 2 – AXIOMAS DA GEOMETRIA EUCLIDEANA (cont.)[1]

Os ***postulados de incidência*** introduzidos são insuficientes para caracterizar retas como conjuntos infinitos e contínuos de pontos, como a nossa intuição geralmente os concebe. E mais, sem tais propriedades da reta, é impossível falar em segmento, ângulo ou polígono, não é mesmo? Mas, queremos que a Geometria trate também desses objetos geométricos. Para tanto, precisamos introduzir novos conceitos e novos postulados.

Não há uma única maneira de prosseguir na descrição axiomática da teoria. Seguiremos muito de perto a formulação do livro *Geometria elemental desde un punto de vista avanzado* de E. E. Moise. Como bem sugere o título do livro, não foi assim que Euclides descreveu originalmente a Geometria, mais que isso, esta é uma maneira de abordar a teoria que veio a se estabelecer somente no século XX. Ela simplifica o tratamento, mas usa noções que foram bem estabelecidas somente após o desenvolvimento da teoria dos conjuntos.

Vamos, assim, prosseguir introduzindo a noção de **distância** num espaço geométrico, cujas propriedades fundamentais são fixadas pelos postulados que seguem.

Postulados de Distância

D.0 - Distância é uma função d cujo domínio são os pares de pontos e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais.
***Obs.*:** Sendo $\langle S, L, P \rangle$ um espaço geométrico, na notação usual de função, $\boldsymbol{d}: S \times S \to \mathbb{R}$.

D.1 – Para cada par de pontos P e Q, $d\,(P,Q) \geq 0$

D.2 – Para cada par de pontos P e Q, $d\,(P,Q) = 0$ se, e somente se, P coincide com Q.

D.3 – Para cada par de pontos P e Q, $d\,(P,Q) = d\,(Q,P)$

DEF3: Seja r uma reta e $f: r \to \mathbb{R}$, uma correspondência bijetora entre r e os números reais. Dizemos que **f é um sistema de coordenadas** para r se $d\,(P,Q) = |f\,(P) - f\,(Q)|, \forall\, P,Q \in r$. Nesse caso, o número $x = f(P)$ é chamado de **coordenada** de P.

D.4 – Toda reta admite um sistema de coordenadas (**Postulado da régua**).

Obs.: Observe que D.4 faz com que as retas dos modelos dos postulados de incidência e de distância sejam tão contínuas quanto $\mathbb{R}$ é.

DEF4: Sejam A, B e C três pontos colineares. Dizemos que ***B* está entre *A* e *C*** sempre que valer a igualdade $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.
Nesse caso, usamos a seguinte notação: ***A – B – C.***

[1] Com base em resumo elaborado pela Profa. Iole de Freitas Druck, do departamento de Matemática do IME-USP.

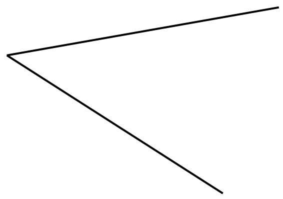
Assim, os modelos da teoria até aqui descrita devem possuir pontos, retas, planos e uma função distância. Passam, portanto, a serem quádruplas do tipo: $\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{d} \rangle$.

Podemos agora passar a definir conceitos que são essenciais para trabalhar na Geometria: **segmento de reta, semirreta, ângulo, triângulo** e **congruência**.

DEF5: Se A e B são dois pontos, então $\overline{AB}$, o **segmento determinado por A e B**, é o conjunto cujos pontos são A e B, juntamente com todos os pontos entre A e B. Na notação de conjuntos podemos escrever: $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{D/A - D - B\}$.

Observe que, pela **DEF4**, só podemos falar que *D* está entre *A* e *B* se *A*, *B* e *D* forem colineares. Portanto, $\overline{AB}$ está contido na reta $\overleftrightarrow{AB}$ determinada por *A* e *B*, segundo o postulado **I.1**.

DEF6: Se *A* e *B* são dois pontos, a **semirreta** $\overrightarrow{AB}$ é conjunto de todos os pontos *D* da reta tais que *A* não está entre *D* e *B*. O ponto *A* é chamado de origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$.
***Obs.*:** Convença-se que: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{D/A - B - D\}$



DEF7: Um **ângulo** é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas na mesma reta. Se **o ângulo** é a união de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então estas semirretas são chamadas de **lados** do ângulo; o ponto **A** é chamado de **vértice** e o próprio ângulo é referido pelas notações equivalentes: $< BAC$ ou $< CAB$.

***Obs*.**: Esta definição de ângulo exclui o ângulo nulo, exclui o ângulo raso e ângulos maiores que o raso. Ela, portanto, não coincide com a noção mais geral de ângulo que temos ou adotamos usualmente, onde ângulo exprime as ideias de "rotação", de "abertura" ou de "mudança de direção". Essas noções são muito importantes e correspondem melhor à intuição ou mesmo ao uso corrente que se faz dos ângulos na vida prática. Elas são, no entanto, mais difíceis de formalizar num contexto axiomático. Além disso, para falar de triângulos não precisamos de ângulos nulos ou maiores ou iguais ao raso. Como todos os polígonos podem ser decompostos em triângulos (como?), o estudo dos triângulos é parte muito importante da Geometria.

Resumindo: A **DEF7** não é a única "certa" para ângulos. Ela é conveniente nesse contexto da disciplina. No contexto do Ensino Fundamental, em minha opinião, ela é inclusive inconveniente por ser demasiado abstrata e afastada de possíveis aplicações práticas do conceito.

DEF8: Se *A*, *B* e *C* são três pontos não colineares, $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ é chamado de **triângulo**.
Os três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são chamados de **lados** e os pontos *A*, *B* e *C* de **vértices** do triângulo. Nesse caso, usamos a notação **ΔABC**. Os **ângulos** do **ΔABC** são <BAC, <ACB e <ABC. Note que há aqui certo abuso de linguagem, pois os lados do ΔABC não são semirretas (como na DEF7), mas sim segmentos. Porém, essa é a convenção.

DEF9: Dado um segmento $\overline{AB}$, chamamos de **medida de $\overline{AB}$** ao número *d*(*A*, *B*). Também se usa a notação AB (sem traço em cima) para designar a medida de $\overline{AB}$.

DEF10: Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos de reta, se *d*(*A*, *B*) = *d*(*C*, *D*), ou seja, se os dois tiverem a mesma medida, dizemos que eles são **congruentes** e escrevemos $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

DEF11: Um conjunto C de pontos é chamado de **convexo** se para quaisquer pontos *P*, *Q* de C o segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$ está contido em *C*.