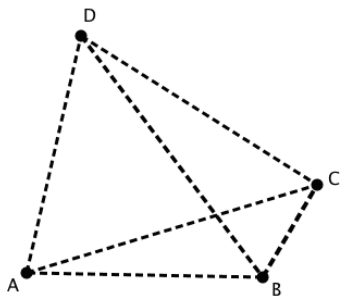
IME-USP
MAT230 – Geometria e Desenho Geométrico I – 2/2019
Licenciatura em Matemática – Diurno (T42)
Profa. Ana Paula Jahn

LISTA 1

1) Explique porque um conjunto de exatamente dois pontos, $\mathcal{S}_2 = \{P, Q\}$, não satisfaz todos os postulados de incidência e, com isso, não é um "espaço geométrico". Mesma questão para $\mathcal{S}_3 = \{P, Q, R\}$.

2) Considere o sistema $<\mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P}>$, onde $\mathcal{S}$ contém exatamente 4 (quatro) pontos A, B, C e D; as retas são conjuntos com exatamente dois pontos; e os planos são os conjuntos com exatamente três pontos. Prove que esse sistema satisfaz todos os postulados de incidência. Esse "espaço geométrico" pode ser ser representado pelos vértices de um tetraedro (cf. figura abaixo). Neste modelo, vale o 5º postulado de Euclides, que diz que por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta? Justifique.



3) E um conjunto $\mathcal{S}_5 = \{P, Q, R, S, T\}$ pode ser modelo de geometria de incidência?
Sugestão: Examine a possibilidade das retas terem exatamente 2 pontos e os planos 3, como no exercício anterior. Examine outras possibilidades: retas com 2 ou 3 pontos. Tente pensar num sólido geométrico que possa representar graficamente os vários casos.

4) Prove as proposições abaixo, utilizando os postulados de incidência:

a) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto fora dela.
b) Dada uma reta r, contida em um plano α, existe pelo menos um ponto A, tal que $A \in \alpha$ e $A \notin r$.
c) Existem três retas distintas e não concorrentes.
d) Mostre que se 4 pontos (distintos) quaisquer de uma figura $\mathcal{F}$ qualquer são coplanares, então $\mathcal{F}$ é plana, ou seja, todos os pontos de $\mathcal{F}$ são coplanares.

5) Sejam $P_1, P_2, \dots, P_5$ cinco pontos (distintos), dentre os quais não existem três pontos colineares. Quantas retas contém dois destes cinco pontos?

6) Dentre cinco pontos distintos dados, se não existem quatro pontos coplanares, quantos planos contêm três destes cinco pontos?

7) Dados $P_1, P_2, \dots, P_n$, todos diferentes tais que não existem três deles colineares e quatro deles coplanares. Quantas retas contêm exatamente dois destes pontos? Quantos planos contêm três destes cinco pontos?

8) O plano π da Geometria Analítica é o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais. As retas são dadas por:

$$l_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}, \text{ onde } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ e } (a,b) \neq (0,0)$$

Mostre que esta é uma "geometria de incidência".

9) Mostre que se um ponto P não pertence ao plano π, então nenhuma reta $m \subset \pi$ contém esse ponto.

10) Dizemos que uma reta r é **paralela** a uma reta s se elas estão em um mesmo plano e $r \cap s = \emptyset$. Dadas duas retas paralelas, prove que existe um único plano que as contém.

12) Se as retas l_1, l_2 e l_2, l_3 são pares de retas paralelas e os pontos $A \in l_1$, $B \in l_2$, $C \in l_3$ são colineares, mostre que as retas l_1, l_2 e l_3 estão em um mesmo plano.

13) Considere duas retas distintas a e b. Caso não exista um plano que as contenha, diremos que as retas a e b são **reversas**. Mostre que se l_1 e l_2 são retas reversas, então elas não são paralelas e $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.