UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 391 - CAE

Aula 2

LABORATÓRIO CAD/CAE
São Carlos
Fevereiro, 2000

3. Abordagem Matemática da discretização para soluçâo dos problemas do Meio Continuo

Abordagem Matemática é a única solução geral para discretização de problemas do contínuo pois a abordagem da montagem direta só serve para alguns casos específicos

A abordagem matemática nos fornece também:

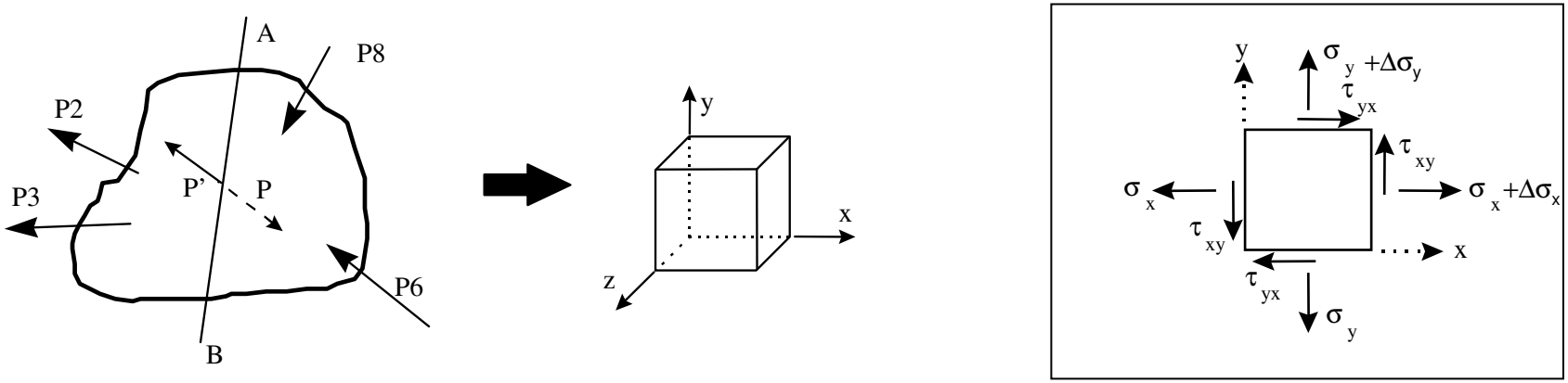
- Intravisão do problema
- Em alguns casos, como o método dos princípios variacionais, serve como método de modelagem, determinando as equações diferenciais que regem o problema
- Critérios e algoritmos para determinar as funções soluções
- Análise de convergência dos resultados

3.1 Equacionando os problemas do Meio Contínuo

Os Problemas do Meio Contínuo podem ser equacionados por duas vias :

I. Análise Lagrangiana

- é estudado um domínio infinitesimal de dimensões dx, dy e dz
- o referencial das coordenadas é fixo
- equação (ões), geralmente difencial (ais), representativa (s) do fenômeno é (são) determinada(s) estudando o equilíbrio de forças, a continuidade, conservação da energia, etc
- é adequada para problemas de mecânica dos sólidos (tensões, vibrações, etc)
- um caso particular são as eqs. de Newton



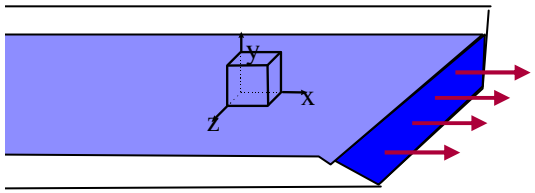
Equilíbrio na direção x

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -F_x$$

II. Análise Euleriana

• o referencial das coordenadas caminha fixo ao domínio infinitesimal
• equação (ões), geralmente difencial (ais), representativa (s) do fenômeno é (são) determinada(s) estudando equilíbrio, conservação da massa, etc
• é adequada para problemas de mecânica dos fluidos e problemas de campo em geral
• exemplos:

Problemas de Campo de temperatura (transmissão do calor)
Problemas de Campo velocidade (escoamento)
Problemas de Campo eletromagnético
Problemas de Campo de pressões (acústica)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

Conservação de massa

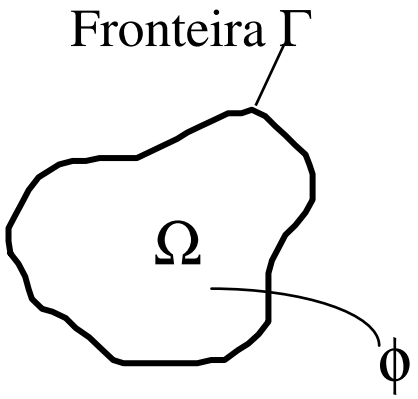
Qualquer que seja a análise (ou modelagem) usada (lagrangiana ou euleriana) recaímos em equações que representam o fenômeno:

- equações de equilíbrio de forças
- equações de continuidade
- equações de estado
- equações de compatibilidade
- equações de conservação da energia
- etc.

Então o **Problema do Meio Contínuo passa a ser representado ou aproximado por equação (ões) diferenciais, suas condições de contorno e/ou suas condições iniciais**

Normalmente é conhecida a forma e a localização do domínio Ω do problema.
O desafio é determinar a função solução que satisfaça a equação diferencial

$$\rightarrow \phi(t, x, y, z)$$



As equações diferenciais precisam de condições de contôrno (C.C.) ou condições iniciais (C.I.) válidas na fronteira Γ para descreverem um problema específico

EXEMPLOS

PROBLEMA	ϕ	Domínio Ω	Fronteira Γ	C.C. ou C.I.
1. Tensões em girabrequim	σ	volume ocupado pelo girabrequim	superfície da peça	vinculos, forças externas
2. Convecção de calor em aletas	T (temperatura)	volume ocupado pelas aletas	superfície das aletas	temperaturas ext. e interna
3. Vibrações livres em asa	d (deslocamento)	volume ocupado pela asa	superfície da asa	deslocamento inicial (C.I.)
4. Escoamento em um porto devido a onda	v (velocidade)	volume ocupado água	superf. + leito do mar	velocidade inicial (C.I.)

Uma relação entre as variáveis encerrando n constantes arbitrárias essenciais é chamada **uma primitiva ou solução geral da Equação Diferencial (ED)**. Exemplos:

1. $y = x^4 + C\,x$
2. $A\,x^2 + B\,x \quad + C$

Resolver a eq diferencial de ordem n é achar a primitiva que deu origem a ela.

A primitiva engloba uma família de equações. Elas tem a mesma forma, mas diferem entre si exatamente pelas constantes arbitrárias

Através das c.c. ou c.i. determinam-se as constantes e o problema tem resposta única.

3.2. Métodos de solução de Equações Diferenciais

- **Métodos analíticos (ou exatos)**
- **Métodos aproximados**

Métodos Analíticos de solução de ED's

- Servem para eqs. diferenciais mais simples ou clássicas
- Domínio e condiçoes de contorno são simples
- **Não existe um método analítico geral para resolver uma eq diferencial qualquer**.

Geralmente as ED's são agrupadas por tipo e cada tipo tem um método adequado. Exemplos:

- Eq Dif de primeira ordem e primeiro grau de variáveis separáveis
- Eq Dif de primeira ordem e grau superior
- Eq Dif lineares ordem n
- Eq Dif homogêneas e coeficientes constantes
- Eq Dif não homogêneas com derivadas no tempo de segunda ordem e coeficientes constantes (método de Laplace)
- Eq Dif lineares e coeficientes variáveis
- Eq Dif parciais não lineares de primeira ordem
- etc ..
- etc.

Métodos Aproximados de Solução de ED's

- Não existe um método analítico geral
- Dificuldades adicionais:
  - o domínio é muito complexo em casos reais de engenharia
  - as c.c. são muito complexas e/ou dificeis de serem levadas em conta

portanto métodos aproximados são uma solução natural

Exemplos de métodos aproximados

- Perturbação → ED's não lineares
- Séries de Potência → convergência
- Resoluções Probabilísticas → Monte Carlo,
- Método das Diferenças Finitas
- Método de Ritz
- Método dos Elementos Finitos

Métodos de discretização

Podemos resolver "todas" eqs diferenciais por métodos de discretização

3.2.1. Solução de Problemas do Meio Contínuo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

Conceito Geral

Problemas do contínuo → **Modelagem** → Equações diferenciais → **Método de discretização** (**MEF**) → Solução

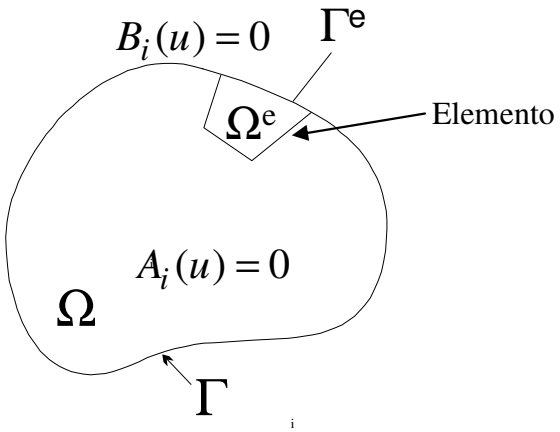
A maioria dos problemas representados por ED's pode ser resolvida por Elementos Finitos.

$$\left.\begin{aligned} A_1(u) &= 0 \\ A_2(u) &= 0 \\ A_3(u) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(eq. 3.1)
Eqs. Diferenciais no domínio Ω

$$\left.\begin{aligned} B_1(u) &= 0 \\ B_2(u) &= 0 \\ B_3(u) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(3.2)
Conds. de contorno na fronteira Γ



Procedimento geral da solução por Elementos Finitos

a) Aproximação

$u =$ função incógnita

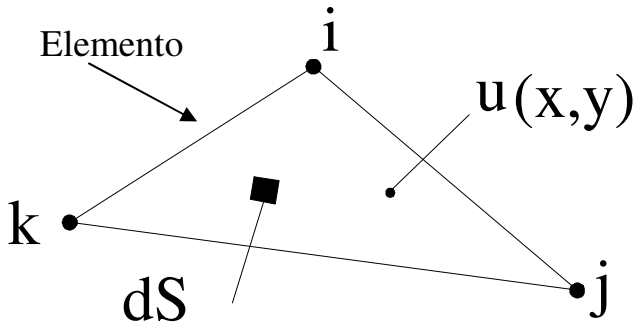
$$u \cong \tilde{u} = \sum_{i=1}^{r} N_i . a_i \qquad (3.3)$$

r - Nº de nós do elemento

N_i - Funções de interpolação, ou de forma, ou de deslocamento

a_i - Novas incógnitas $\quad a_i \rightarrow \tilde{u} \rightarrow u$

b) Discretização - divisão de Ω em elementos. Definição de propriedades em região infinitesimal **dS** segundo eqs (3.1) e (3.2).



$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y).a_i$$

$$\{u(x,y)\} = [N(x,y)]. \{u\}_{nós}$$

Domínio contínuo elementar — Distribuição (interpolação) — Propriedade nodal discreta

c) Propriedade global é recuperada no elemento $\Omega^e + \Gamma^e$ na forma integral.

$$\int_{\Omega^e} G_j(\tilde{u}).d\Omega + \int_{\Gamma^e} g_j(\tilde{u}).d\Gamma = 0 \qquad (3.4)$$

j=1,n e G_j e g_j integráveis

Buscam-se as soluções de a_i (eq 3.4) por 2 métodos usuais que são complementares ao MEF

- **Princípios variacionais**
- **Resíduos ponderados**

d) Volta-se dos elementos para o contínuo $\Omega + \Gamma$

$$\int_{\Omega} G_j.d\Omega + \int_{\Gamma} g_j.d\Gamma = \sum_{e=1}^{m}\left(\int_{\Omega^e} G_j.d\Omega + \int_{\Gamma^e} g_j.d\Gamma \right) \qquad (3.5)$$

- m = nº de elementos
- Montagem elemento a elemento : Técnica discreta
- Conds. de contorno podem ser impostas a posteriori.

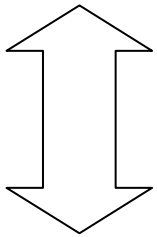
Se $A_i(u)$ e $B_i(u)$ são lineares, então (3.4) levará a :

$$[K].\{x\} + \{f\} = \{0\} \qquad (3.5a)$$

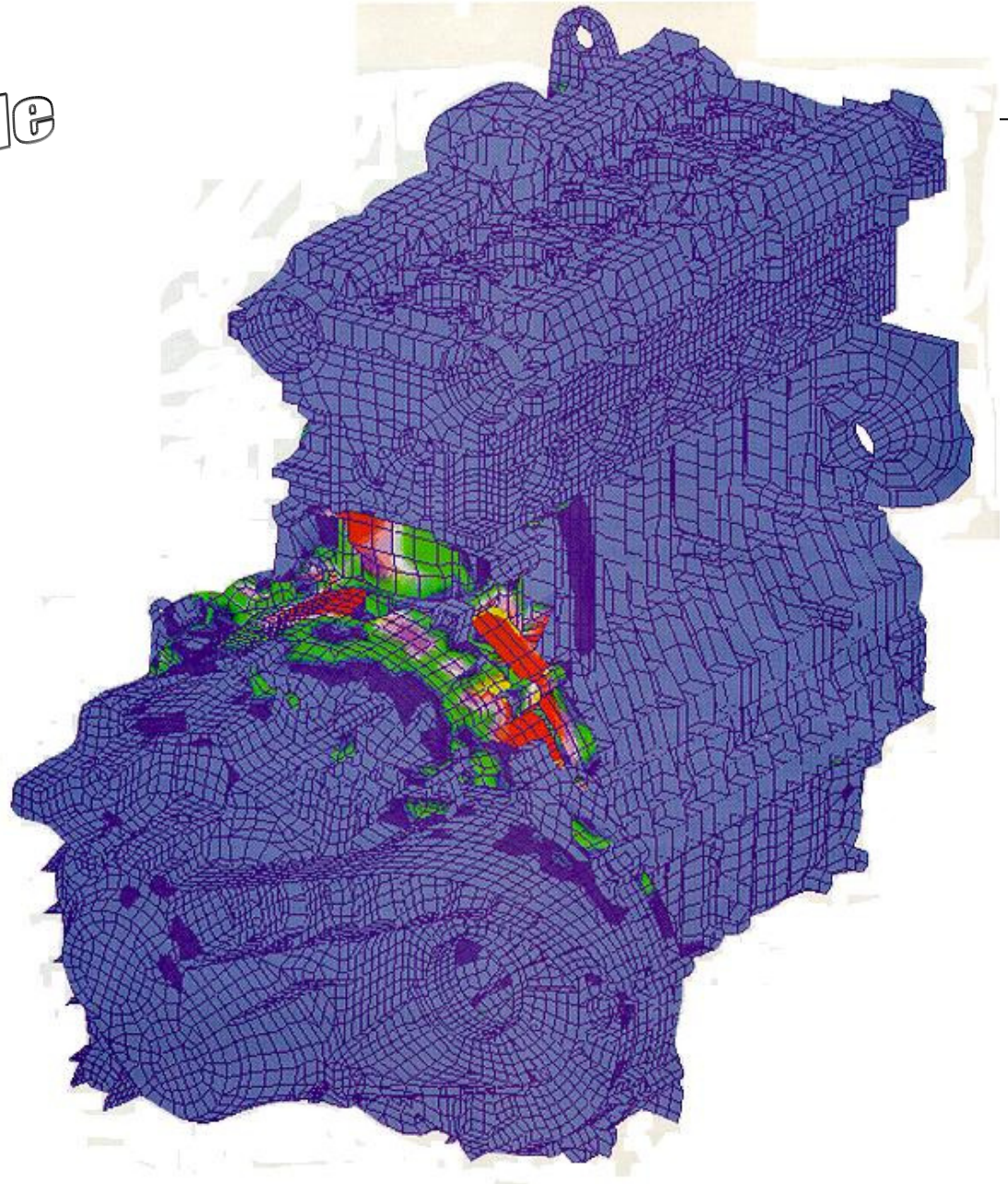
Solução de (3.4) e posteriormente de (3.5a) resolve o problema por ELEMENTOS FINITOS.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Notar a complexidade do domínio !!



Uso de CAD para discretizar Ω



Modelagem

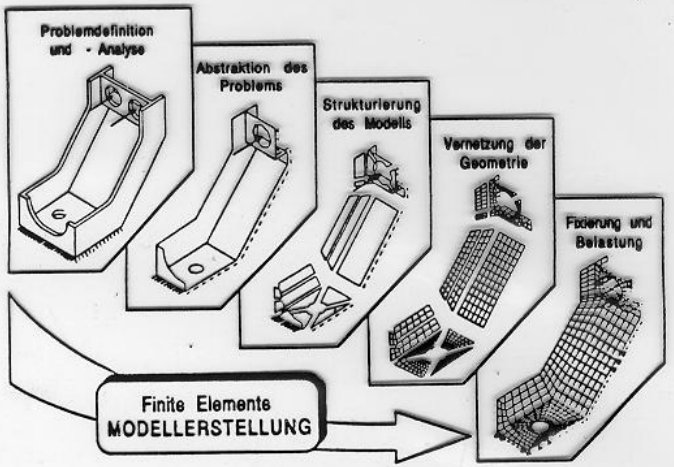


Bild 1: Teilprozesse der Finite-Element Modellerstellung

Geração de malha

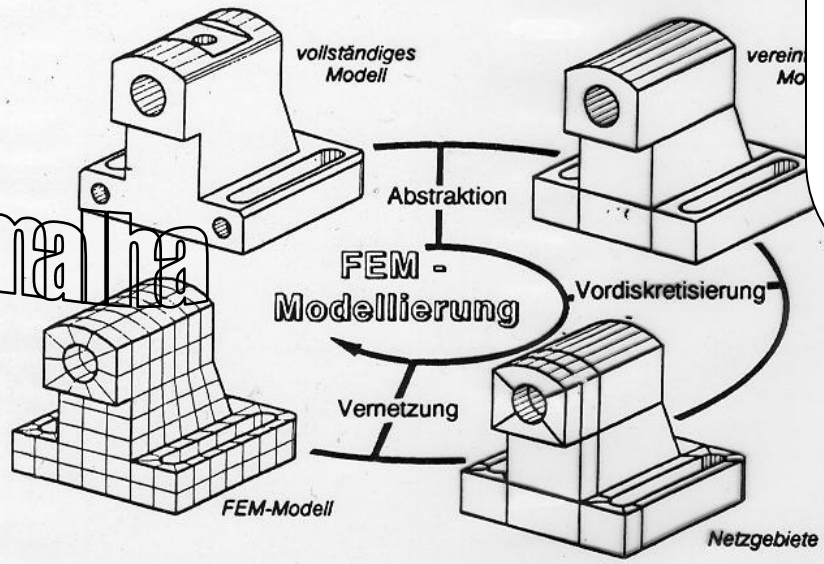


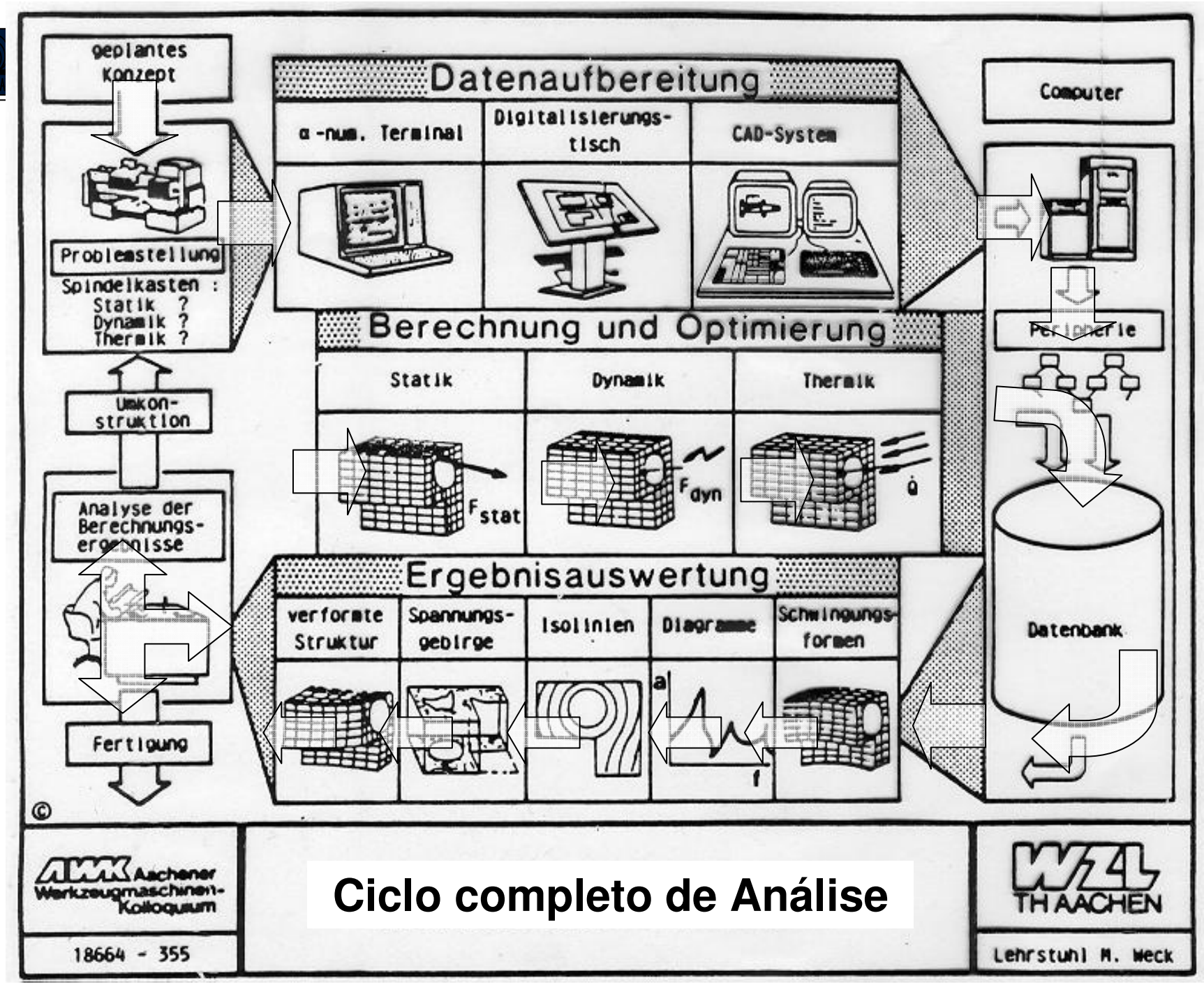
Bild 1-1: Teilschritte der Finite-Elemente-Modellierung
Steps of Finite Element modelling

Seqüencia :

. Modelo sólido 3D →CAD

. Simplificações

. Geração da malha de EF



Ciclo completo de Análise

3.2.2. Método dos Elementos Finitos implementado por Princípios Variacionais

Introdução

Funcional (função de funções) : $$\Pi = \int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots\right).d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right).d\Gamma$$

notar semelhança com eq.(3.4)

A solução do problema no contínuo é achar $\underline{u}$ tal que Π fique estacionário,ou seja :

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{para variação} \quad \delta u \quad \forall$$

Método adequado à solução de fenômenos físicos pois é fácil identificar "propriedade" associada a $\delta\Pi = 0.$.

Fenômeno		$\delta\Pi = 0.$
•Termodinâmica -	Sistemas isolados Sistemas a vol. e temp. ctes	=> Entropia máxima => Energia livre Helmotz mínima
•Mecânica dos Solidos -	Elasticidade linear - Deslocamentos Equilibrio estavel	 => Energia potencial estacionaria => Energia potencial mínima
•Mecanica dos Fluidos -	Fluxo laminar de fluido inviscido	=> Energia Cinetica é mínima

É possível mostrar se $\delta\Pi = 0.$ for satisfeito, equivale a : serem satisfeitos, isto é:

$$\left.\begin{aligned} A_i(u) &= 0 \\ B_i(u) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

se $\delta\Pi = \int_\Omega \delta u.A(u)d\Omega + \int_\Gamma \delta u.B(u)d\Gamma = 0$ for satisfeito, então (3.1) e (3.2) serão satisfeitas.

Em outras palavras:

O enfoque variacional envolve a integral definida de um funcional produzindo um número. Cada função introduzida produz um número. A função que produz o menor número possui a propriedade de satisfazer uma equação diferencial específica

Por exemplo, considere o funcional:

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{D}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - Qy \right] dx$$

Funcional Associado

O valor numérico de Π pode ser calculado para uma dada função genérica y(x). O cálculo variacional mostra que o menor valor de Π é obtido quando a função y(x) é aquela que satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$D\frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0$$

Com $y(0) = 0$ e $y(H) = y_H$

Equação Diferencial

O processo pode ser revertido, ou seja, dada uma equação diferencial, uma solução aproximada pode ser obtida substituindo-se diferentes funções aproximadas no variacional correspondente.
A função que produzir o menor valor é a solução mais aproximada da equação diferencial.

Formulação Diferencial ⇔ Formulação variacional

Vantagens da formulação Variacional:

- funcional envolve geralmente derivadas de menor ordem que o operador diferencial
- permite lidar com C.C. complicadas
- solução mais analítica pois ajuda mais o entendimento do problema (o funcional normalmente tem um significado físico bem claro para o engenheiro)

Desvantagem da formulação Variacional: em problemas puramente matemáticos, sem signi-ficadi físico, temos que encontrar o funcional associado à ED, isto é, temos que achar aquele funcional cuja minimização equivale a resolver a ED, ou ainda, aquele funcional cuja função que o minimiza é a mesma que é a solução da ED dada.

Este desafio não será visto neste curso

Procedimento do MEF implementado por princípios Variacionais

a) Determina-se o funcional associado à E.D. que queremos resolver

b) Adota-se a aproximação $u \cong \tilde{u} = \sum_{i=1}^{\Omega} N_i a_i$ e então

sendo as funções N_i conhecidas, as incognitas passasm a ser os a_i

c) Estaciona-se Π e tem-se : $\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots \frac{\partial \Pi}{\partial a_\Omega}\delta a_\Omega = \frac{\partial \Pi}{\partial \{a\}} = 0$

o símbolo δ em calculo variacional indica “primeira variação” .

Se funcional é quadrático (u e derivadas $\leq$ 2ª ordem)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{a\}} \equiv [K]^{(e)}\{a\} + \{f\}^{(e)} = \{0\}$$

e também pode ser provado que $[K]^{(e)}$ é simétrica.

Estacionar funcional — Recai em → Resolver um sistema de equações lineares !!!!

d) Montagem da matriz global

d) Solução do sistema

$$[K]\{a\} + \{f\} = \{0\}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Exemplo 1: Elasticidade em sólidos resolvidaa por MEF e Princí-pios Variacionais

Este caso é mostrado apenas suscintamente aqui com fim de exemplo. Será visto em detalhe mais adiante

a) Determina-se o funcional

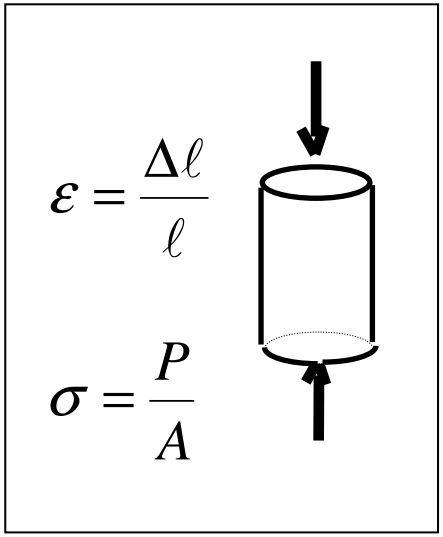
Neste caso, o funcional escolhido está baseado no Princípio trabalhos virtuais $\rightarrow$

Trabalho externo - Trabalho interno = 0

$\delta\{u\}_n^t.\{P\}_n =$ Trabalho externo exercido pelas forças nodais $\{P\}_n$

$\delta\{\varepsilon\}^t.\{\sigma\} =$ Trabalho interno/unid.volume feito pelas tensões internas.

$$\varepsilon.\sigma = \frac{\Delta\ell}{\ell}.\frac{P}{A} = \frac{\tau}{vol}$$



b) Adota-se a aproximação $u \cong \tilde{u} = \sum_{i=1}^{r} N_i a_i$

c) Estaciona-se Π e tem-se :

Trabalho externo = trabalho interno $\quad \delta\Pi = 0 \leftrightarrow \quad \delta\{u\}_n^{\,t}.\{P\}_n = \int_{vol} \delta\{\varepsilon\}^t.\{\sigma\}\, dvol$

Como será visto adiante, é possivel mostrar que

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{e} \quad \{\varepsilon\} = [B]\{u\}_n \Rightarrow \quad \{\varepsilon\}^t = \{u\}_n^t.[B]^t$$

Portanto o integrando é: $\delta\{\varepsilon\}^t.\{\sigma\} = \delta\{u\}_n^t.[B]^t.[D]\{\varepsilon\} = \delta\{u\}_n^t.[B]^t.[D].[B]\{u\}_n$

e pondo em evidência $\delta\{u\}_n^{\,t}.\{P\}_n = \delta\{u\}_n^t.\int_{vol}[B]^t.[D].[B]\, dvol\,.\,\{u\}_n$

ou seja $\{P\}_n = \left(\int_{vol}[B]^t[D][B]dvol\right).\{u\}_n$

Matriz de rigidez $[K]^e$

$$[K]^e = \int_{vol}[B]^t[D][B]dvol$$

os passos d) e e) seguem-se normalmente

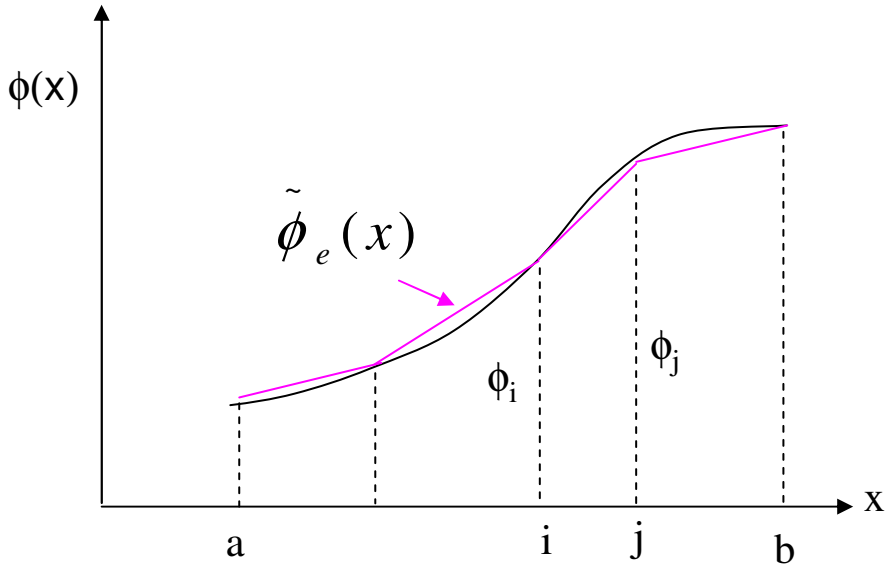
Exemplo 2 : Solução de ED de uma variável com MEF implementado por princípios variacionais.

Resolver a equação diferencial :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + f(x) = 0, \quad x \in [a,b] \qquad \text{e} \quad \text{c.c.} \qquad \begin{cases} \phi(a) = A \\ \phi(b) = B \end{cases}$$

a) Determina-se o funcional

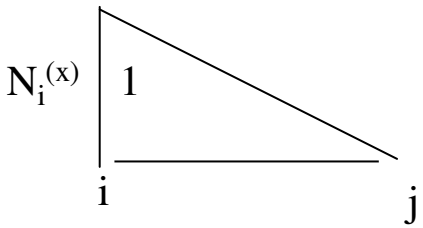
Sabemos que esta ED equivale a minimizar o funcional : $J(\phi) = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - f(x).\phi(x) \right] dx$



b) Adota-se a aproximação Como ordem do funcional J(ϕ) é 1, podemos usar elementos lineares.

$$\tilde{\phi}_e(x) = N_i(x).\phi(x_i) + N_j(x).\phi(x_j) = N_i\phi_i + N_j\phi_j = \sum_{i=1}^{2} N_i\phi_i$$

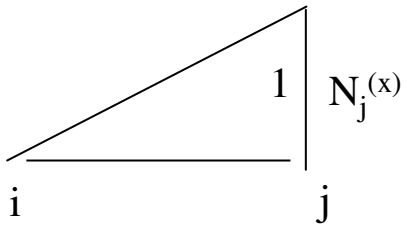
Adotando Ni linear $a_i + b_i x \quad com \quad a_i = \dfrac{x_j}{x_j - x_i} \quad e \quad b_i = -\dfrac{1}{x_j - x_i}$



$$N_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad , x_i \le x \le x_j$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

E variação linear entre x_i e x_j



$$N_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x = x_j \end{cases}$$

$$N_j(x) = \begin{cases} 1 & p/ \quad x = x_j \\ 0 & p/ \quad x = x_i \end{cases}$$

Podemos agora discretizar o domínio do funcional $\Rightarrow J(\phi) = \sum_{i=1}^{m} J_e\left(\tilde{\phi}_e(x)\right)$

$$J_e\left(\tilde{\phi}_e(x)\right) = J_e\left(\sum_{i=1}^{2} N_i\phi_i\right) = \int_{x_i}^{x_j}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{2} N_i\phi_i\right)\right)^2 - f(x)\left(\sum_{i=1}^{2} N_i\,\phi_i\right)\right]dx = \int_{x_i}^{x_j}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} N_i'\phi_i\right)^2 - f(x)\sum_{i=1}^{2} N_i\,\phi_i\right]dx =$$

$$\int_{x_i}^{x_j}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(N_i'\phi_i\right)^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2} N_i'\phi_i N_j'\phi_j\right) - \sum_{i=1}^{2} f(x)N_i\phi_i\right]dx$$

c) Estaciona-se o funcional J(ϕ) e tem-se :

$$Como\ \frac{\partial J_e}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow \int_{x_i}^{x_j}\left[\frac{1}{2}\left(2\sum_{i=1}^{2} N_i'\phi_i + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2} N_i'N_j'\phi_j\right) - \sum_{i=1}^{2} f(x)N_i\right]dx = 0$$

i=1,2 ; 2 equações portanto

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{x_i}^{x_j} N_i'N_j'\phi_j - f(x)N_i\right) = 0$$

$$K_{ij} = \int_{x_i}^{x_j} N_i'N_j'dx$$

$$f_i = \int_{x_i}^{x_j} fN_i dx$$

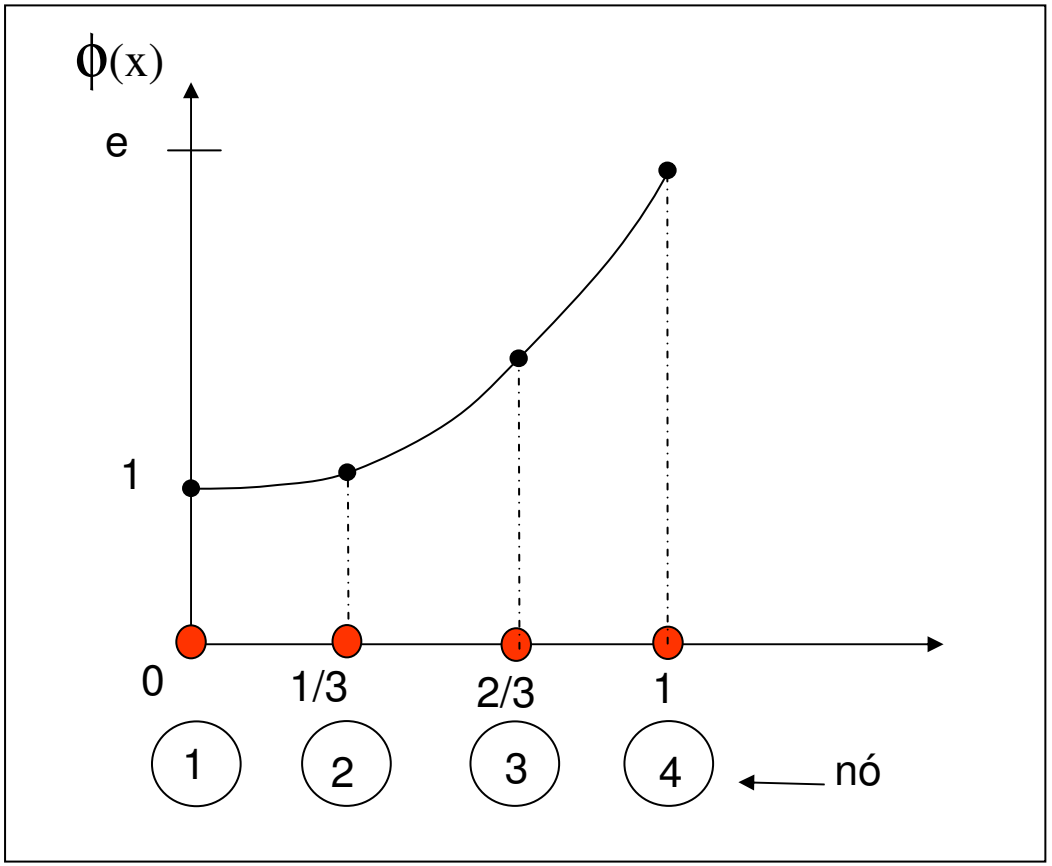
$$[K]_e\{\phi\} - \{F\}_e = 0$$

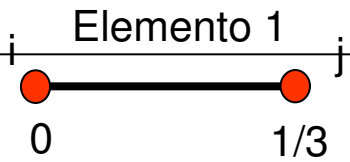
⇒ podemos achar ϕ_i

Se tomarmos

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2} - e^x = 0 \\ \phi(0) = 1 \quad e \quad \phi(1) = e \end{cases}$$

e dividamos [0,1] em 3 elementos iguais





1º Elemento

$$N_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} = \frac{1/3 - x}{1/3} = 1 - 3x; \quad N_i' = -3$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - 0}{1/3} = 3x; \qquad N_j' = 3; \qquad f(x) = -e^x$$

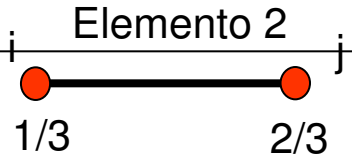
$$K_{ii}^1 = \int_0^{1/3} (-3)^2 \, dx = 9x \,|_0^{1/3} = 3; \quad K_{ij}^1 = \int_0^{1/3} (-9) dx = -9x \,|_0^{1/3} = -3 = K_{ji}^1$$

K_{ii} do elemento 1

$$K_{jj}^1 = \int_0^{1/3} (3)^2 \, dx = 9x \,|_0^{1/3} = 3;$$

$$f_i^1 = \int_0^{1/3} (-e^x)(1 - 3x) dx = 4 - 3e^{1/3}$$

$$f_j^1 = \int_0^{1/3} (-e^x)(3x) dx = -3 + 2e^{1/3}$$



2º Elemento

$$N_i = \frac{2/3 - x}{1/3} = 2 - 3x; \quad N_i' = -3$$

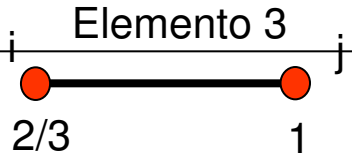
$$N_j = \frac{x - 1/3}{1/3} = 3x - 1; \qquad N_j' = 3;$$

$$K_{ii}^2 = \int_{1/3}^{2/3} \left(-3^2\right) dx = 9x\,|_{1/3}^{2/3} = 3; \quad K_{ij}^2 = \int_{1/3}^{2/3} (-9)\,dx = -9x\,|_{1/3}^{2/3} = -3 = K_{ji}^2$$

$$K_{jj}^2 = 3$$

$$f_i^2 = \int_{1/3}^{2/3} (-e^x)(2 - 3x)\,dx = 4e^{1/3} - 3e^{2/3}$$

$$f_j^2 = \int_{1/3}^{2/3} (-e^x)(3x - 1)\,dx = -3e^{1/3} + 2e^{2/3}$$



3º Elemento

$$N_i = \frac{1-x}{1/3} = 3-3x; \quad N_i' = -3$$

$$N_j = \frac{x-2/3}{1/3} = 3x-2; \quad N_j' = 3;$$

Da mesma forma $K_{ii}^3 = K_{jj}^3 = 3; \quad K_{ij}^3 = K_{ji}^3 = -3$

$$f_i^3 = \int_{2/3}^{1} \left(-e^x\right)(3-3x)dx = 4e^{2/3} - 3e$$

$$f_j^3 = \int_{2/3}^{1} \left(-e^x\right)(3x-2)dx = -3e^{2/3} + 2e$$

d) Montagem:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} K_{ii}^1 & K_{ij}^1 & 0 & 0 \\ & K_{ii}^2 + K_{jj}^1 & K_{ij}^2 & 0 \\ & & K_{ii}^3 + K_{jj}^2 & K_{ij}^3 \\ & \text{simétrica} & & K_{jj}^3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^1 \\ f_j^1 + f_i^2 \\ f_i^3 + f_j^2 \\ f_j^3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3+3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3+3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4-3e^{1/3} \\ -3+2e^{1/3}+4e^{1/3}-3e^{2/3} \\ 4e^{2/3}-3e-3e^{1/3}+2e^{2/3} \\ -3e^{2/3}+2e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4-3e^{1/3} \\ -3+6e^{1/3}-3e^{2/3} \\ -3e-3e^{1/3}+6e^{2/3} \\ -3e^{2/3}+2e \end{Bmatrix}$$

Injetar Condições de Contorno $\phi_1=1$ e $\phi_4=e$

Procedimento :

I. Descartamos a 1a e a última equações porque conhecemos ϕ_1 e ϕ_4

II. Passamos $\phi_1.k_{i1}$ e $\phi_4.k_{i4}$ para o lado direito da equação (são termos conhecidos)

e) Solução :

$$\begin{cases} 6\phi_2 - 3\phi_3 = \left(-3 + 6e^{1/3} - 3e^{2/3}\right) + 3.1 - 0 = \quad 6e^{1/3} - 3e^{2/3} \\ -3\phi_2 + 6\phi_3 = \left(-3e - 3e^{1/3} + 6e^{2/3}\right) + 0 + 3e = -3e^{1/3} + 6e^{2/3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_1 = 1 \quad \phi_2 = 1{,}39561 \quad \phi_3 = 1{,}94773 \quad \phi_4 = e$$

Pode-se observar que não temos uma equação para $\tilde{\phi}(x)$ em todo o domínio, mas temos $\tilde{\phi}_e(x)$ no sub-dominio elementar. Com isto podemos fazer interpolação e voltar ao contínuo. Por exemplo:

e1) Estimativa de $\tilde{\phi}_e(x)$ em cada elemento

$$\tilde{\phi}_e^{1}(x) = N_i^1(x)\phi_i + N_j^1(x)\phi_j = (1-3x)\phi_1 + (3x)\phi_2 = 1 + 1{,}18683\,x$$

Podemos então estimar $\phi\left(\bar{x}\right), \quad \forall\, \bar{x} \in 1^o\, elemento$

Por exemplo:

$$\bar{x} = 0{,}2$$

$$\begin{cases} solução \quad exata \rightarrow e^{0,2} = 1{,}2214 \\ \tilde{\phi}_e^{1}(0{,}2) = 1 + 1{,}18683 \,.\, 0{,}2 = 1{,}2377 \\ erro\% = +1{,}31\% \end{cases}$$

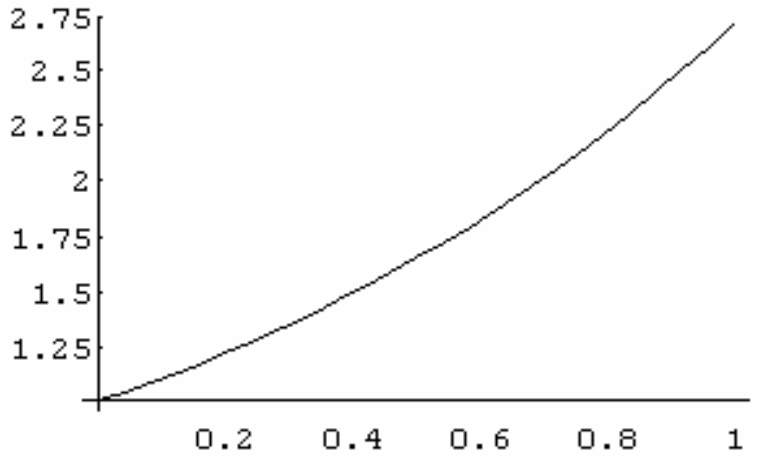
e2) Para os nós temos

Nó 2

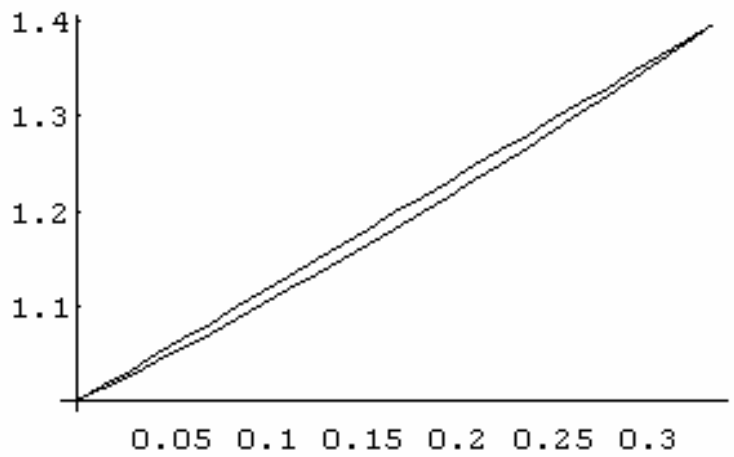
$$\begin{cases} solução \quad exata \rightarrow e^{1/3} = 1{,}39561 \\ \tilde{\phi}_2 \; calculado = 1{,}39561 \\ erro\% = 0\% \end{cases}$$

$$\begin{cases} solução \quad exata \rightarrow e^{2/3} = 1{,}94773 \\ \tilde{\phi}_3 \; calculado = 1{,}94773 \\ erro\% = 0\% \end{cases}$$

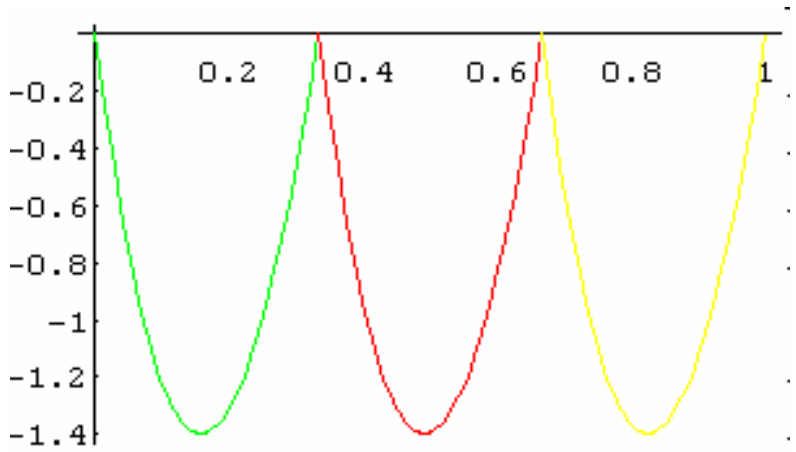
e3) Os gráficos seguintes mostram a solução obtida e os respectivos erros



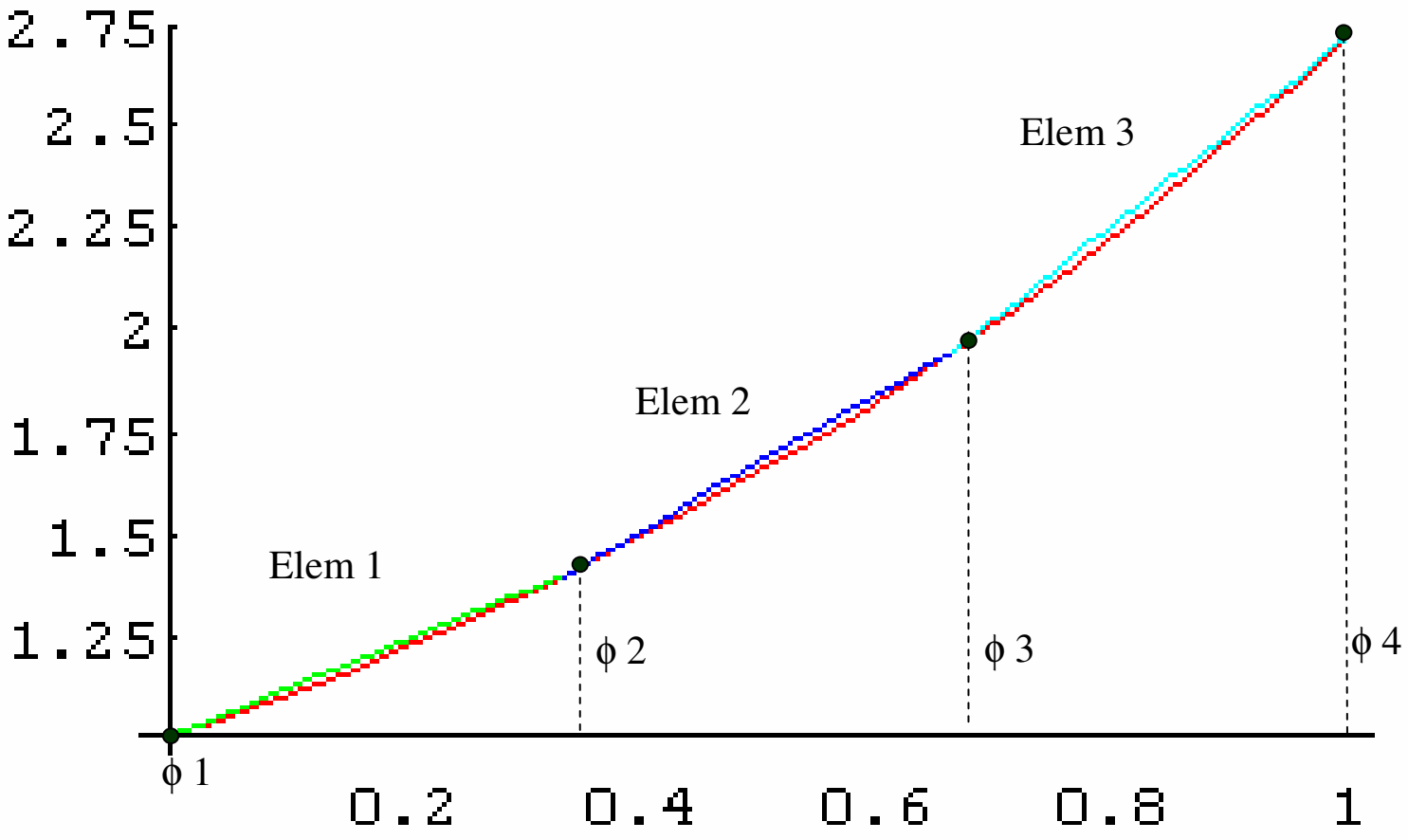
Φ exato (e^x)



Φ aprox. x Φ exato (e^x) no elem 1



Erro Porcentual



Solução exata x Solução por elementos finitos (elementos lineares)

3.2.2. Método dos Elementos Finitos implementado por Resíduos Ponderados

Se A1(u)=0, A2(u)=0, ..., A3(u)=0 em Ω (3.1)

e B1(u)=0, B2(u)=0, ..., B3(u)=0 em Γ (3.2)

então podemos escrever que também se anula :

$$\int_{\Omega} \{v\}^t [A(u)] d\Omega = \int_{\Omega} (v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + ...) = 0 \qquad (3.6)$$

com $\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_3 \end{Bmatrix}$ funções escalares arbitrárias.

Ou seja: se as funções $A_i(u)$ anulam-se no domínio, sua integral multiplicada por escalares arbitrários também o farão. Também no contorno

$$\int_{\Gamma} \{\bar{v}\}^t .[B(u)] d\Gamma = \int_{\Gamma} (\bar{v}_1 B_1(u) + \bar{v}_2 B_2(u) + ...) = 0$$

Somando as duas expressões:

$$\int_{\Omega} \{v\}^t [A(u)] d\Omega + \int_{\Gamma} \{\bar{v}\}^t [B(u)] d\Gamma = 0 \qquad (3.7)$$

Pondo-se a aproximação $u \cong \tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i$ em (3.7) ,

$$\int_{\Omega} \{v\}^t \left[A(\sum Na)\right] d\Omega + \int_{\Gamma} \{\bar{v}\}^t \left[B(\sum Na)\right] d\Gamma = 0 \qquad (3.8)$$

$$Como \quad [A(u)] \equiv 0 \ \ em \ \ \Omega, \quad [A(\tilde{u})] = \left[A(\sum Na)\right] \approx 0 \ \ são \ \ resíduos \ \ em \ \ \Omega.$$

Eq. (3.8) Formulação Integral dos Resíduos Ponderados - (Crandall)

Galerkin genialmente propôs $v_j = N_j$, isto é, ponderação é feita pela própria função de discretização :

$$\int_{\Omega} \{N\}^t \left[A(\sum Na)\right] d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\}^t \left[B(\sum Na)\right] d\Gamma = 0 \qquad (3.9)$$

Esta é uma maneira simples de achar o funcional associado!