Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2011

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução

Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

Ficha Catalográfica

Santos, Reginaldo J.
S237i Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

1. Equações Diferenciais I. Título

CDD: 515.3

Sumário

Prefácio

Este é um texto para uma disciplina introdutória sobre Equações Diferenciais Parciais e Transformada de Fourier para alunos da área de Ciências Exatas. Pode ser considerado um texto alternativo aos livros Boyce-DiPrima [1] para a parte de Equações Diferenciais Parciais e Valéria Iório[4] para a parte de Transformada de Fourier, sendo nos dois casos mais objetivo e mais elementar. Entretanto aqui estão apresentadas provas elementares de resultados como o teorema sobre convergência pontual da série de Fourier, derivação e limites de séries de funções. O conteúdo corresponde ao programa da disciplina 'Equações Diferenciais B' que é ministrado para os alunos da área de ciências exatas na Universidade Federal de Minas Gerais. O texto é dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 1 são estudadas as séries de Fourier. Terminamos o capítulo com uma aplicação às oscilações forçadas com força periódica. As séries de Fourier são aplicadas na solução de problemas de valor inicial e de fronteira para equações como a do calor em uma dimensão que é estudada no Capítulo 2, a equação da corda elástica, no Capítulo 3 e a equação de Laplace, no Capítulo 4. No Capítulo 5 estudamos a transformada de Fourier e suas aplicações às equações diferenciais.

Todos os exercícios estão resolvidos no final do capitulo correspondente. Uma coisa que acho importante é somente ler a solução de um exercício depois de ter tentado verdadeiramente resolvê-lo. É como quando lhe dão um enigma para decifrar. Se lhe contarem logo a solução você não vai lembrar depois. Quanto mais tempo você ficar tentando decifrar antes de lhe contarem a solução mais tempo você vai lembrar.

Os desenhos e gráficos foram feitos usando o MATLAB®* com o pacote GAAL e o Maxima também com o pacote GAAL disponíveis no site do autor (http://www.mat.ufmg.br/~regi). Neste site também estão disponíveis páginas interativas para o estudo de oscilações, equações parciais, séries de Fourier e outros.

Gostaria de agradecer aos professores Joana Darc A. S. da Cruz, Grey Hercole e Helder C. Rodrigues pelas críticas e sugestões apresentadas.

*MATLAB é marca registrada de The Mathworks, Inc.

1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução às Equações Diferenciais

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente. Vejamos alguns exemplos.

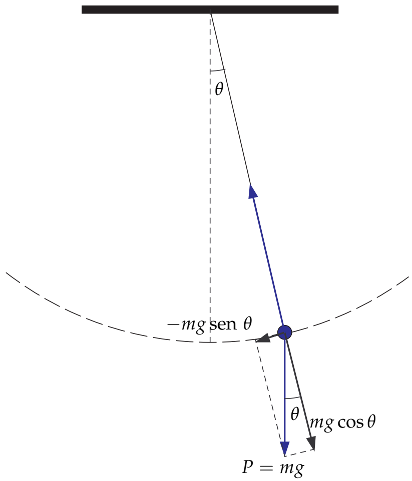


Figura 1.1 – Pêndulo Simples

Exemplo 1.1. O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela função $\theta(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função $\theta(t)$. Assim θ é a variável dependente e t é a variável independente.

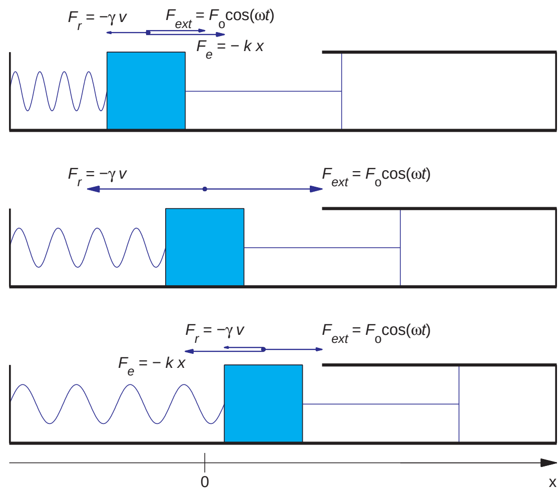


Figura 1.2 – Sistema massa-mola

Exemplo 1.2. Em um sistema massa-mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola com constante elástica k, sujeita a uma força de resistência $F_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$ e uma força externa $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ o deslocamento da massa $x(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $x(t)$. Assim x é a variável dependente e t é a variável independente.

Exemplo 1.3. Numa região do plano em que não há cargas elétricas o potencial elétrico $u(x, y)$ em cada ponto (x, y) da região satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função $u(x, y)$. Assim u é a variável dependente e x e y são as variáveis independentes.

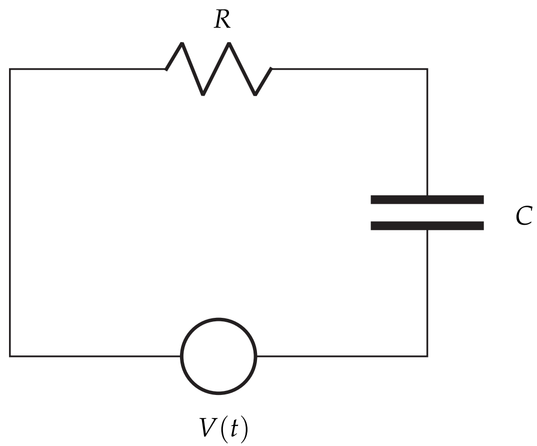


Figura 1.3 – Circuito RC

Exemplo 1.4. Um circuito RC é um circuito que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um gerador que gera uma diferença de potencial $V(t)$ ligados em série. A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $Q(t)$. Assim Q é a variável dependente e t é a variável independente.

1.1.1 Classificação

As equações são classificadas quanto ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

(a) Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto uma equação diferencial é ordinária se as derivadas que aparecem na equação são derivadas ordinárias. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', ...) = 0,$$

em que y é função apenas de t, são equações diferenciais ordinárias, como as equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.4. A equação do Exemplo 1.3 é parcial.

(b) Quanto à ordem uma equação diferencial pode ser de **1ª**, de **2ª**, ..., de ***n*-ésima ordem** dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

As equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 são de 2ª ordem e a equação do Exemplo 1.4 é de 1ª ordem.

(c) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares. As equações dos Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 são lineares e a equação do Exemplo 1.1 é não linear.

1.1.2 Soluções de Equações Ordinárias

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo. A solução de uma equação diferencial é também chamada **curva integral** da equação.

Exemplo 1.5. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0.$$

Vamos mostrar que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução desta equação para $t \in \mathbb{R}$.

$$y'(t) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y''(t) = \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}$$

Substituindo-se $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ no primeiro membro da equação obtemos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t} + b\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + ce^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)e^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $b^2 - 4ac = 0$. Assim $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução da equação.

A **solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo** I é uma família de soluções $y(t)$ no intervalo I, dependendo de n constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores às constantes.

Exemplo 1.6. A solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

é o conjunto de todas as primitivas da função $f(t) = e^{3t}$, ou seja,

$$y(t) = \int e^{3t}dt + c = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$

que é válida para $-\infty < t < \infty$, pois este é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

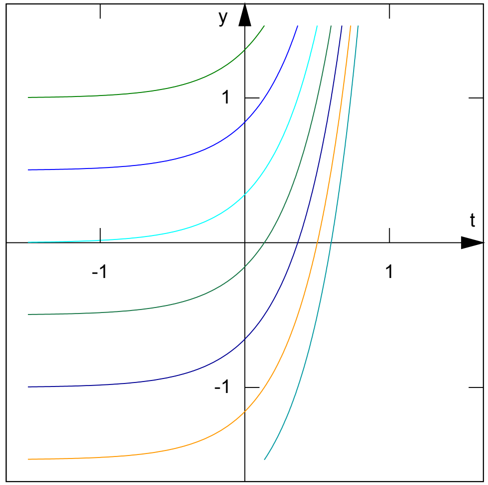


Figura 1.4 – Soluções da equação do Exemplo 1.6

1.1.3 Equações Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Vamos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial (1.1) em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y'(t)$ está definida no intervalo I e satisfaz a equação (1.1) neste intervalo.

O problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

é chamado **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução do problema de valor inicial (1.2) em um intervalo** I contendo t_0 é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (1.2).

Exemplo 1.7. Vamos encontrar a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y(1/3) = e/3 \end{cases}$$

A solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

é o conjunto de todas as primitivas da função $f(t) = e^{3t}$, ou seja,

$$y(t) = \int e^{3t} dt + c = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$

que é válida para $-\infty < t < \infty$.
Substituindo-se $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada obtemos $c = 0$.
Assim a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

válida para $-\infty < t < \infty$, que é o maior intervalo contendo $t_0 = 1/3$ em que a solução e sua derivada estão definidas.

Exercícios (respostas na página 107)

1.1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

(a) $yy' + t = 0$

(b) $x^2y'' + bxy' + cy = 0$

1.2. Determine qual ou quais das funções $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ e $y_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

1.3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que

(a) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar + b = 0$, é solução da equação $ay' + by = 0$.

(b) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar^2 + br + c = 0$, é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$.

(c) $y(x) = x^r$, com r raiz de $r^2 + (b-1)r + c = 0$, é solução da equação $x^2y'' + bxy' + cy = 0$.

1.4. Determine os valores de r para os quais a função $y(t)$ é solução da equação.

(a) $y(t) = \dfrac{r}{t^2-3}$ e $y' + ty^2 = 0$.

(b) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+1}$ e $y' - 2ty^2 = 0$.

(c) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+1}$ e $y' - 6ty^2 = 0$.

(d) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+2}$ e $y' - ty^2 = 0$.

1.5. Determine todas as soluções da equação diferencial

$$ty'' + (t-1)y' - y = 0$$

que são funções de 1º grau, ou seja, da forma $y(t) = at + b$, para a e b constantes.

1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem

As **equações (diferenciais ordinárias) lineares de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.3}$$

1.2.1 Equações em que $p(t) = 0$

Se a função $p(t) = 0$ a equação (1.3) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t), \tag{1.4}$$

que é facilmente resolvida integrando-se os dois lados. Assim a solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + c.$$

Exemplo 1.8. A solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(2t)$$

é o conjunto de todas as primitivas de $f(t) = \operatorname{sen}(2t)$, ou seja,

$$y(t) = \int \operatorname{sen}(2t)\, dt + c = -\frac{\cos(2t)}{2} + c.$$

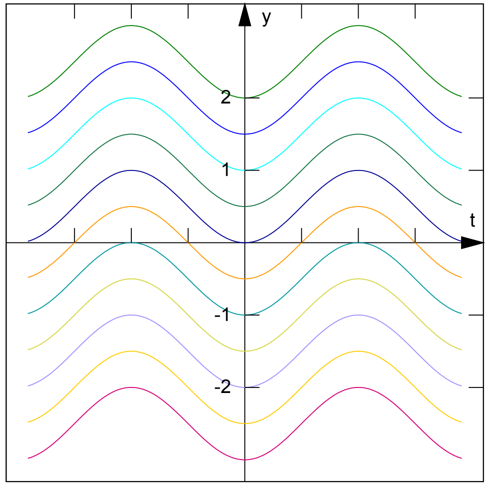


Figura 1.5 – Soluções da equação do Exemplo 1.8

Na subseção 1.2.2 e na seção 1.3 veremos técnicas de se encontrar soluções de equações de 1ª ordem que se baseiam em transformar a equação inicial em uma equação do tipo (1.4).

1.2.2 Equações Lineares - Caso Geral

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.5}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, de forma que ao multiplicarmos a equação (1.5) por esta função a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, do tipo (1.4), que já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada **fator integrante da equação linear**.

Seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Vamos mostrar agora que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ é um fator integrante da equação (1.5).

Observe em primeiro lugar que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt} p(t) = \mu(t)p(t). \tag{1.6}$$

Assim multiplicando-se (1.5) por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \tag{1.7}$$

mas como por (1.6), $\mu(t)p(t) = \dfrac{d\mu}{dt}$, então (1.7) pode ser reescrita como

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t). \tag{1.8}$$

Mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto o que faz com que ela possa ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)q(t) \tag{1.9}$$

A equação (1.9) é uma equação do tipo (1.4), ou seja,

$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

em que $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$. Assim, a solução geral de (1.9) é dada por

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Como $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos que a solução geral de (1.5) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)dt + c\right)$$

Mostraremos na Subseção 1.2.3 como podemos chegar a $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ como fator integrante da equação (1.5).

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação linear de 1ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 1.9. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mu(t)$ obtemos:

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty = t^3.$$

O lado esquerdo é igual a derivada do produto $t^2y(t)$. Logo a equação acima é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(t^2y(t)\right) = t^3.$$

Integrando-se obtemos

$$t^2y(t) = \frac{t^4}{4} + c$$

Explicitando $y(t)$ temos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{c}{t^2}. \tag{1.10}$$

Podemos esboçar as soluções desta equação diferencial. Para $c = 0$ a solução é a parábola

$$y(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Para $c \neq 0$, temos que o domínio de $y(t)$ é o conjunto dos números reais tais que $t \neq 0$. $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = +\infty$, se $c \neq 0$. Além disso

$$\lim_{t \to 0} y(t) = +\infty, \quad \text{se } c > 0$$

e

$$\lim_{t \to 0} y(t) = -\infty, \quad \text{se } c < 0.$$

Vamos analisar o crescimento e decrescimento das soluções

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{2} - \frac{2c}{t^3} = 0$$

se, e somente se,

$$t^4 = 4c.$$

Assim se $c > 0$ as soluções têm somente pontos críticos em $t = \pm\sqrt[4]{4c}$ e se $c < 0$ elas não têm ponto crítico.

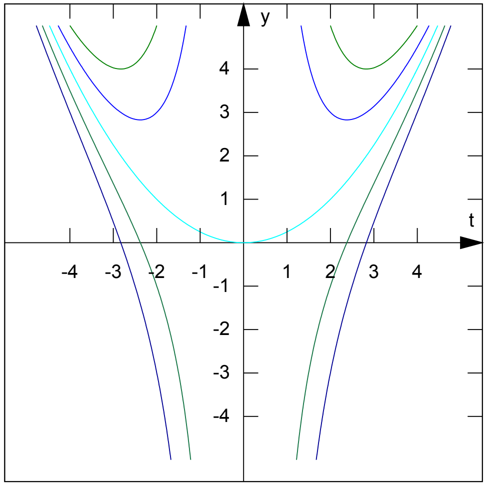


Figura 1.6 – Soluções da equação do Exemplo 1.9

Exemplo 1.10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t}y = t. \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

A equação é a mesma do Exemplo 1.9. Substituindo-se $t = 2$ e $y = 3$ em (1.10) obtemos

$$3 = \frac{4}{4} + \frac{c}{4}$$

De onde obtemos que $c = 8$. Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2}.$$

Observe que a solução deste problema de valor inicial é válida no intervalo $(0, +\infty)$, que é o maior intervalo contendo $t = 2$ (pois a condição inicial é $y(2) = 3$) em que a solução e sua derivada estão definidas. Se a condição inicial ao invés de $y(2) = 3$ fosse $y(-2) = 3$ a solução teria a mesma expressão, mas o intervalo de validade da solução seria $(-\infty, 0)$.

1.2.3 Como chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$?

Vamos mostrar como podemos chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Comparando-se as equações (1.7) e (1.8) na página 16 vemos que o fator integrante $\mu(t)$ deve ser uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Esta é também uma equação linear, mas com $q(t) = 0$. Supondo-se $\mu(t) \neq 0$, vamos multiplicar esta equação por $1/\mu(t)$ obtendo a equação

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Como $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{d}{d\mu}\left(\ln|\mu(t)|\right)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\mu}\left(\ln|\mu(t)|\right)\frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Mas pela regra da cadeia esta equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\ln|\mu(t)|\right) = p(t)$$

que é uma equação do tipo (1.4) que pode ser resolvida simplesmente integrando-se ambos os membros obtendo

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + c_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\mu(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t)dt} = c e^{\int p(t)dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante podemos tomar $c = 1$ e obtermos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Exercícios (respostas na página 110)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' + (1-2x)y = xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' + 3t^2 y = e^{-t^3+t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' - \cos t\, y = te^{t^2+\operatorname{sen} t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' + x^4 y = x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2.2. Resolva as equações:

(a) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$.

(b) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$.

(c) $y' - \dfrac{4}{x}y = x^5 e^x$.

2.3. (a) Resolva o problema de valor inicial:
$\begin{cases} y' + 5x^4 y = x^4 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

(b) Para quais valores de y_0 a solução é crescente e para quais valores de y_0 a solução é decrescente.

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.4. (a) Resolva o problema de valor inicial:
$\begin{cases} (x^2-9)y' + xy = 0 \\ y(5) = y_0 \end{cases}$

(b) Qual o intervalo de validade da solução?

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.5. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

(a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também o é.

(b) Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação, então $y(t) = cy_1(t)$ também o é, para qualquer constante c.

2.6. Considere as equações

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1.12}$$

Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação (1.11) e $y_2(t)$ é solução da equação (1.12), então $y(t) = cy_1(t) + y_2(t)$ é solução de (1.12), para qualquer constante c.

2.7. Resolva o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \dfrac{y}{100}. \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

e faça um esboço do gráfico da solução.

1.3 Equações Lineares de 2ª Ordem Homogêneas - Parte I

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade). *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(t), q(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 tem uma única solução neste intervalo.

Exemplo 1.11. Vamos determinar o intervalo máximo em que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (t^2 - 4)y'' + y' + (\operatorname{sen} t)y = \dfrac{e^t}{t} \\ y(1) = y_0, \quad y'(1) = y'_0 \end{cases}$$

tem solução. Para esta equação

$$p(t) = \frac{1}{t^2 - 4}, \quad q(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2 - 4}, \quad f(t) = \frac{e^t}{t(t^2 - 4)}.$$

Assim $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são contínuas para $t \neq \pm 2, 0$. Como $t_0 = 1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $0 < t < 2$, que é o maior intervalo contendo $t_0 = 1$ onde $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são contínuas.

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{1.13}$$

Para as equações lineares homogêneas é válido o **princípio da superposição**.

Teorema 1.2 (Princípio da Superposição). *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação homogênea (1.13), então*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{1.14}$$

para c_1 e c_2 constantes, também o é.

Demonstração. Vamos verificar que realmente $y(t)$ dado por (1.14) é solução de (1.13).

$$\begin{aligned}
&y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = \\
&\quad = \quad (c_1y_1(t) + c_2y_2(t))'' + p(t)\left(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\right)' + q(t)\left(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\right) \\
&\quad = \quad c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1p(t)y_1'(t) + c_2p(t)y_2'(t) + c_1q(t)y_1(t) + c_2q(t)y_2(t) \\
&\quad = \quad c_1\underbrace{\left(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right)}_{=0} + c_2\underbrace{\left(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right)}_{=0} \\
&\quad = \quad c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (1.13). ■

Observe também que a função nula, que é igual a zero para todo t é solução da equação homogênea (1.13). Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que o conjunto das soluções de uma equação diferencial linear homogênea é um subespaço vetorial.

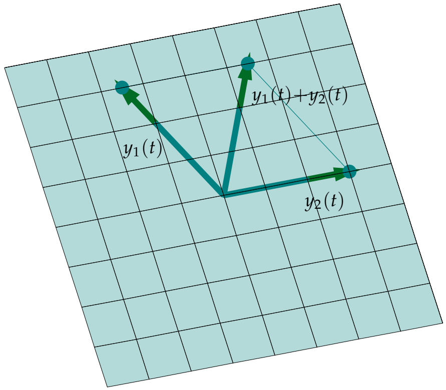


Figura 1.7 – Soma de soluções de uma equação diferencial homogênea

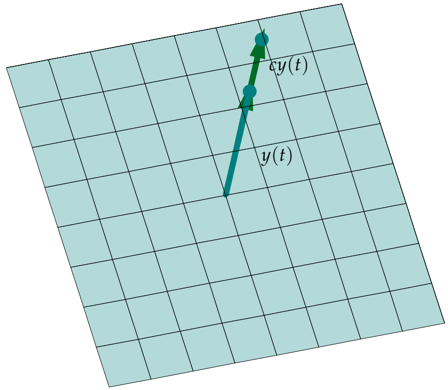


Figura 1.8 – Multiplicação de solução de uma equação diferencial homogênea por escalar

1.3.1 Soluções Fundamentais

Considere, agora, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{1.15}$$

em que y_0 e y_0' são condições iniciais dadas no problema.
Vamos determinar condições sobre duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de (1.13) para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ seja solução do problema de valor inicial (1.15).

Substituindo-se $t = t_0$ na solução $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ e na derivada de $y(t)$, $y'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t)$ obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) & + & c_2y_2(t_0) & = & y_0 \\ c_1y_1'(t_0) & + & c_2y_2'(t_0) & = & y_0' \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema A é invertível, então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o sistema tem uma única solução (c_1, c_2) (A solução é $X = A^{-1}B$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ é solução do problema de valor inicial (1.15).

Se além disso as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ estão definidas num intervalo I, onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, então pelo Teorema 1.1 de Existência e Unicidade,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é a única solução do PVI no intervalo I e assim temos o resultado a seguir.

Teorema 1.3. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação (1.13) em um intervalo aberto I, onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, tais que, em um ponto $t_0 \in I$,*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0'), existem constantes c_1 e c_2 tais que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tem como única solução no intervalo I,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Definição 1.1. (a) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **wronskiano** das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.

(b) Se duas *soluções* $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de (1.13), em um intervalo aberto I onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, são tais que o seu wronskiano é diferente de zero em um ponto $t_0 \in I$ dizemos que elas são **soluções fundamentais no intervalo** I da equação diferencial (1.13).

Teorema 1.4. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (1.13) em um intervalo aberto I, então a família de soluções*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{1.16}$$

para constantes c_1 e c_2 arbitrárias é a solução geral de (1.13) em I.

Demonstração. Seja $z(t)$ uma solução qualquer de (1.13) no intervalo I. Como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais em I, existe um ponto $t_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$. Considere o PVI formado por (1.13) e as condições iniciais $y(t_0) = z(t_0)$ e $y'(t_0) = z'(t_0)$, então pelo Teorema 1.3 existem constantes c_1 e c_2 tais que $z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. ∎

Assim para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem (1.13) em um intervalo I, precisamos encontrar duas soluções fundamentais da equação (1.13), ou seja, duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ tais que em um ponto $t_0 \in I$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Exemplo 1.12. Seja b um número real não nulo. Vamos mostrar que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais da equação diferencial

$$y'' + b^2 y = 0.$$

Como $y_1'(t) = -b \operatorname{sen} bt$, $y_1''(t) = -b^2 \cos bt$, $y_2'(t) = b \cos bt$ e $y_2''(t) = -b^2 \operatorname{sen} bt$, então

$$y_1'' + b^2 y_1 = -b^2 \cos bt + b^2 \cos bt = 0$$

e

$$y_2'' + b^2 y_2 = -b^2 \operatorname{sen} bt + b^2 \operatorname{sen} bt = 0.$$

Assim, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação $y'' + b^2 y = 0$. Além disso,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -b \operatorname{sen} bt & b \cos bt \end{bmatrix} = b(\cos^2 bt + \operatorname{sen}^2 bt) = b \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2 y = 0$ e a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt.$$

Dependência Linear

Dizemos que duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são **linearmente dependentes (L.D.)** em um intervalo I, se uma das funções é um múltiplo escalar da outra, ou seja, se

$$y_1(t) = \alpha y_2(t) \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \alpha y_1(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Caso contrário, dizemos que elas são **linearmente independentes (LI)**.

Se duas funções são L.D. em um intervalo I, então

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } t \in I$$

pois uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \textit{para algum } t_0 \in I,$$

então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (LI) em I.

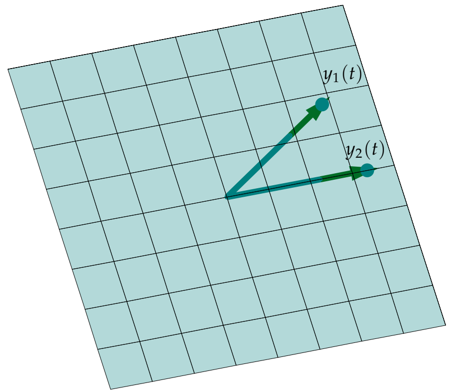


Figura 1.9 – $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais de uma equação diferencial linear homogênea

Usando a linguagem de Álgebra Linear podemos dizer que duas soluções fundamentais formam uma base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea (1.13), pois elas são LI e geram o subespaço (toda solução é uma combinação linear delas).

Observe que o wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.

Exemplo 1.13. Seja b um número real não nulo. Mostramos no exemplo anterior que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções LI da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

A recíproca do Teorema 1.5 não é verdadeira, ou seja, duas funções podem ser LI com

$$W[y_1, y_2](t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vejamos o próximo exemplo.

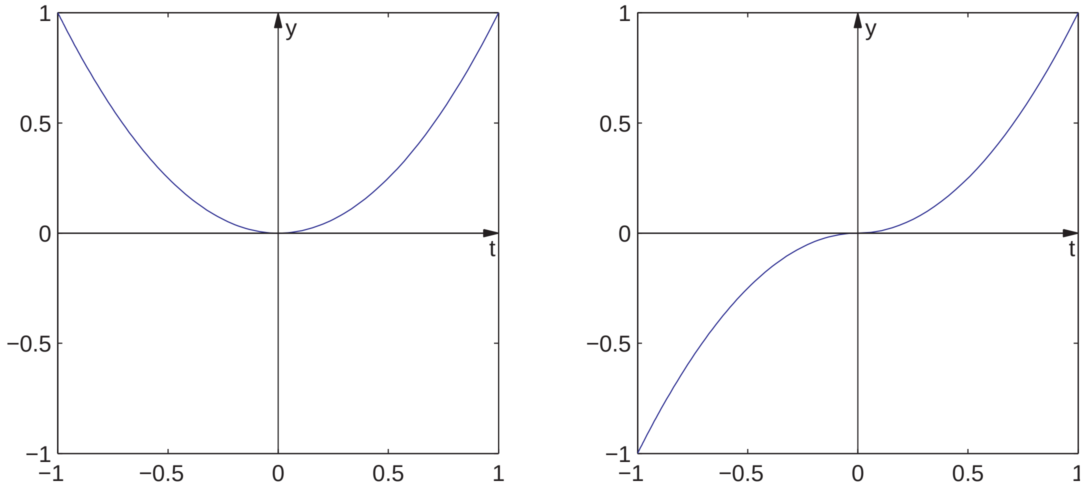


Figura 1.10 – $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t|$ são LI mas o wronskiano é igual a zero para todo t

Exemplo 1.14. Sejam $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} = 0.$$

Apesar do wronskiano ser zero para todo $t \in \mathbb{R}$ as funções y_1 e y_2 são LI, pois uma função não é múltiplo escalar da outra. Para $t \geq 0$, $y_2(t) = y_1(t)$ e para $t < 0$, $y_2(t) = -y_1(t)$.

1.3.2 Fórmula de Euler

Queremos definir a função exponencial e^{rt} para números complexos $r = a + ib$, de forma que satisfaça as propriedades

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} \tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = re^{rt} \tag{1.18}$$

Observamos que a função $z(t) = e^{ibt}$ é solução da equação $y'' + b^2y = 0$. Pois pela propriedade (1.18)

$$z'(t) = ibe^{ibt}, \quad z''(t) = -b^2e^{ibt} = -b^2z(t)$$

e assim

$$z''(t) + b^2z(t) = 0.$$

Assim $z(t) = e^{ibt}$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + b^2y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = ib \end{cases}$$

Agora, como mostramos no Exemplo 1.12 que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2y = 0$, então pelo Teorema 1.3 existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$z(t) = e^{ibt} = c_1\cos bt + c_2\operatorname{sen} bt. \tag{1.19}$$

Vamos determinar estas constantes c_1 e c_2. Substituindo-se $t = 0$ na equação (1.19) obtemos que $c_1 = 1$. Derivando a equação (1.19) em relação a t obtemos

$$ibe^{ibt} = -c_1b\operatorname{sen} bt + c_2b\cos bt. \tag{1.20}$$

Substituindo-se $t = 0$ na equação (1.20) obtemos que $c_2 = i$. Assim substituindo-se $c_1 = 1$ e $c_2 = i$ já obtidos na equação (1.19) obtemos

$$e^{ibt} = \cos bt + i\operatorname{sen} bt.$$

Portanto, pela propriedade (1.17),

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt). \tag{1.21}$$

Tomando $t = 1$ temos

$$e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b). \tag{1.22}$$

Esta equação é conhecida como **fórmula de Euler**.

Exemplo 1.15. Usando a fórmula de Euler temos que

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4} i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

que foram obtidas fazendo em (1.22)

$$a = 0,\ b = \pi; \quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}; \quad a = \ln 2,\ b = \frac{\pi}{4},$$

respectivamente.

Exercícios (respostas na página 117)

3.1. Considere a equação diferencial $y'' - \omega^2 y = 0$, para $\omega > 0$.

(a) Mostre que $y(t) = c_1 e^{-\omega(x-a)} + c_2 e^{\omega(x-a)}$, para $a \in \mathbb{R}$ fixo, é solução geral de equação diferencial.

(b) Mostre que $y(t) = c_1 \cosh(\omega(x-a)) + c_2 \operatorname{senh}(\omega(x-a))$, para $a \in \mathbb{R}$ fixo, é solução geral de equação diferencial.

3.2. (a) Mostre que $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação

$$x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0.$$

(b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

3.3. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad \text{em que } b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Mostre que existem valores constantes de r tais que $y(x) = x^r$ é uma solução de (1.23). Além disso mostre que $y(x) = x^r$ é solução da equação (1.23) se, e somente se,

$$r^2 + (b-1)r + c = 0, \tag{1.24}$$

A equação (1.24) é chamada **equação indicial de** (1.23).

3.4. Mostre que se a equação indicial (1.24) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (1.23) e portanto

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

é a solução geral de (1.23), para $x > 0$.

3.5. Se a equação indicial (1.24) tem duas raízes complexas, $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, use a fórmula de Euler para escrever a solução geral complexa em termos das soluções reais, para $x > 0$,

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Mostre que estas soluções são soluções fundamentais de (1.23) e portanto

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

é a solução geral de (1.23), para $x > 0$.

3.6. Se a equação indicial (1.24) tem somente uma raíz real, mostre que $y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}}$ e $y_2(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$ são soluções fundamentais de (1.23) e portanto a solução geral de (1.23), para $x > 0$, é

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-b}{2}} + c_2 x^{\frac{1-b}{2}} \ln x.$$

3.7. Use os exercícios anteriores para encontrar a solução geral das seguintes equações:

(a) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

3.8. Baseado no Teorema 1.1 na página 25, determine um intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm uma única solução, sem resolvê-los:

(a) $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + (t-2)y = t \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + y' + ty = t^2 \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y_0' \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (t^2 - t)y'' + (t+1)y' + y = e^t \\ y(-1) = y_0, \quad y'(-1) = y_0' \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (t^2 - t)y' + (t+3)y' + 2y = \cos t \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y_0' \end{cases}$

3.9. Considere a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas num intervalo I. Usando o Teorema 1.1 na página 25 mostre que esta equação tem soluções fundamentais em I.

3.10. Mostre que $y(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ não pode ser solução de uma equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com $p(t)$ e $q(t)$ contínuas num intervalo contendo $t = 0$.

3.11. Considere a equação

$$ty'' - (2 + t^2)y' + 3ty = 0.$$

Mostre que $y_1(t) = t^3$ e $y_2(t) = t^2|t|$ são soluções LI desta equação válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, embora $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.12. Considere a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas num intervalo aberto I. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções desta equação no intervalo I. Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são LI, então elas são soluções fundamentais da equação diferencial em I. Sugestão: mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não são soluções fundamentais da equação diferencial, então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são LD.

3.13. (Teorema de Abel) Considere a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas num intervalo I. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções desta equação no intervalo I. Seja $W[y_1, y_2](t)$ o wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ no intervalo I. Mostre que:

(a) $W[y_1, y_2]'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$

(b) $W[y_1, y_2](t)$ satisfaz a equação diferencial $y' + p(t)y = 0$ no intervalo I.

(c) $W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}$.

(d) $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$ ou $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

3.14. Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ num intervalo I, então

$$p(t) = \frac{y_2(t)y_1''(t) - y_1(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)} \quad \text{e} \quad q(t) = -\frac{y_2'(t)y_1''(t) - y_1'(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)}, \quad \text{para } t \in I.$$

Sugestão: substitua $y_1(t)$ e $y_2(t)$ na equação diferencial e resolva o sistema correspondente para $p(t)$ e $q(t)$.

1.4 Equações Lineares de 2ª Ordem Homogêneas - Parte II

1.4.1 Obtendo-se uma Segunda Solução

Considere uma equação linear de 2a. ordem homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{1.25}$$

Seja $y_1(t)$ uma solução conhecida da equação acima num intervalo I onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas e tal que $y_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Vamos procurar uma segunda solução da equação (1.25) da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t).$$

Derivando-se esta expressão obtemos

$$y'(t) = vy_1' + y_1v' \quad \text{e} \quad y''(t) = vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v''.$$

Substituindo-se $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ na equação (1.25) obtemos

$$(vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v'') + p(t)(vy_1' + y_1v') + q(t)vy_1 = 0.$$

Colocando-se em evidência v'', v' e v obtemos

$$y_1v'' + (2y_1' + p(t)y_1)v' + (y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)v = 0.$$

Como $y_1(t)$ é solução da equação (1.25), então $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$ e assim a equação anterior se torna

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) = 0. \tag{1.26}$$

Fazendo a mudança de variáveis $w(t) = v'(t)$, a equação (1.26) se transforma em

$$y_1w' + (2y_1' + p(t)y_1)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem linear e separável. Resolvendo-se esta equação, como $w(t) = v'(t)$, então

$$v(t) = \int w(t)dt. \tag{1.27}$$

Substituindo-se $v(t)$ em $y(t) = v(t)y_1(t)$ obtemos uma segunda solução da equação (1.25).

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 1.16. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{com } b^2 - 4ac = 0. \tag{1.28}$$

Deixamos como exercício verificar que $y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é uma solução da equação diferencial (1.28). Vamos procurar uma segunda solução da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{rt}, \text{em que } r = -\frac{b}{2a}.$$

Como

$$y'(t) = v'(t)e^{rt} + rv(t)e^{rt} \quad \text{e} \quad y''(t) = v''(t)e^{rt} + 2rv'(t)e^{rt} + r^2v(t)e^{rt},$$

então substituindo-se $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ na equação diferencial (1.28) obtemos

$$\left[a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' + rv) + cv\right] e^{rt} = 0.$$

Dividindo-se por e^{rt} obtemos

$$a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' + rv) + cv = 0.$$

Colocando-se em evidência v'', v' e v obtemos

$$av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v = 0.$$

Como $r = -\frac{b}{2a}$ é (a única) solução da equação $ar^2 + br + c = 0$ e $2ar + b = 0$, então a equação diferencial anterior fica sendo

$$av'' = 0 \quad \text{ou} \quad v'' = 0.$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação $v'' = 0$ torna-se $w' = 0$ que tem solução $w(t) = \tilde{c}_1$. Resolvendo-se a equação $v'(t) = w(t) = \tilde{c}_1$ obtemos

$$v(t) = \tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2$$

e

$$y(t) = v(t)y_1(t) = (\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2)e^{rt}. \tag{1.29}$$

Tomando-se $\tilde{c}_2 = 0$ e $\tilde{c}_1 = 1$ obtemos uma segunda solução, que chamamos de $y_2(t)$, da equação diferencial (1.28)

$$y_2(t) = te^{rt}.$$

Vamos ver que $y_1(t) = e^{rt}$ e $y_2(t) = te^{rt}$, em que $r = -\dfrac{b}{2a}$, são soluções fundamentais da equação diferencial (1.28)

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} \\ &= e^{2rt} \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} \\ &= e^{2rt} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}, \quad \text{em que } r = -\frac{b}{2a}$$

é a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$, tal que $b^2 - 4ac = 0$ e $a \neq 0$.

Atenção: Atribuindo-se diferentes valores a $\tilde{c}_1$ e a $\tilde{c}_2$ em (1.29) obtemos uma infinidade de funções $v(t)$, mas precisamos de apenas uma tal que $W[y_1, vy_1](t_0) \neq 0$ para algum ponto t_0. Você pode escolher $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$ da maneira que você quiser, com exceção de $\tilde{c}_1 = 0$, pois neste caso teríamos $y_2(t) = y_1(t)v(t) = \tilde{c}_2 y_1(t)$ e assim teríamos $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$.

Não se deve memorizar a fórmula obtida para $y_2(t)$. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para encontrar uma segunda solução da equação linear homogênea de 2ª ordem que com a primeira forma um conjunto de soluções fundamentais.

1.4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{1.30}$$

Vamos mostrar que para esta equação existem valores constantes de r tais que $y(t) = e^{rt}$ é uma solução.
Substituindo-se $y(t) = e^{rt}$, $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2 e^{rt}$ em (1.30) obtemos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução de (1.30) se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{1.31}$$

que é chamada **equação característica** de (1.30).

Observe que a equação característica pode ser obtida da equação diferencial com coeficientes constantes trocando-se y'' por r^2, y' por r e y por 1.
Como uma equação de 2º grau pode ter duas raízes reais, somente uma raiz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos chegar a três situações distintas.

A Equação Característica Tem Duas Raízes Reais

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a equação característica de (1.30) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2. Neste caso

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções fundamentais, pois o wronskiano de $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ é

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral de (1.30).

Exemplo 1.17. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação $y'' - \omega^2 y = 0$.
A equação característica desta equação diferencial é $r^2 - \omega^2 = 0$, que tem como raízes $r_1 = \omega$ e $r_2 = -\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

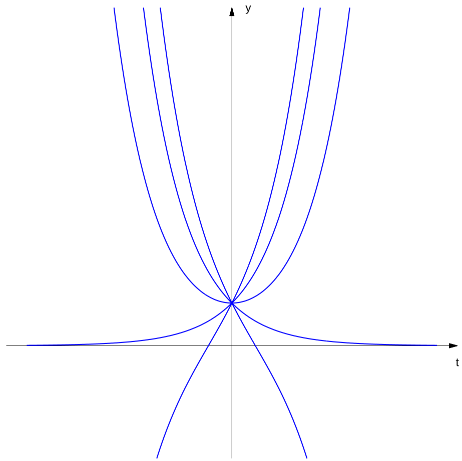


Figura 1.11 – Algumas soluções da equação do Exemplo 1.17

A Equação Característica Tem Somente Uma Raiz Real

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a equação característica (1.31) tem somente uma raiz real $r = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso,

$$y_1(t) = e^{rt} = e^{-\frac{b}{2a}t}$$

é solução da equação diferencial (1.30).
No Exemplo 1.16 na página 44 mostramos como encontrar uma segunda solução para esta equação. Lá mostramos que $y_2(t) = te^{rt} = te^{-\frac{b}{2a}t}$ também é solução da equação (1.30) e que $y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ e $y_2(t) = te^{-\frac{b}{2a}t}$ são soluções fundamentais da equação diferencial (1.30).

Portanto no caso em que a equação característica tem somente uma raiz real $r = -\dfrac{b}{2a}$,

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}$$

é a solução geral de (1.30).

Exemplo 1.18. Vamos encontrar a solução geral da equação $y'' + 2y' + y = 0$.
A equação característica é $r^2 + 2r + 1 = 0$, que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

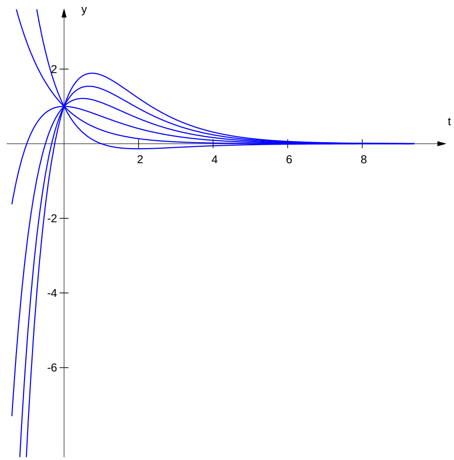


Figura 1.12 – Algumas soluções da equação do Exemplo 1.18

A Equação Característica Tem Duas Raízes Complexas

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a equação característica (1.31) tem duas raízes complexas, que são conjugadas, ou seja, se $r_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica (1.31), então a outra raiz é $r_2 = \alpha - i\beta$. Neste caso, pela fórmula de Euler (1.21) temos:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \quad \text{e} \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t). \end{aligned}$$

Pela análise feita no início dessa seção sabemos que $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções (complexas) da equação diferencial (1.30). Além disso, assim como quando r_1 e r_2 são reais, o wronskiano

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t} = -2i\beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (1.30). Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

é a solução geral complexa de (1.30).

Vamos encontrar um conjunto fundamental de <u>soluções reais</u>. A solução geral complexa pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= C_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t) \\ &= (C_1 + C_2) e^{\alpha t} \cos \beta t + i(C_1 - C_2) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \end{aligned} \tag{1.32}$$

Tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ em (1.32), temos a solução real $u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$.

Tomando $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2i}$, temos a solução real $v(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$.

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais de (1.30).

$$\begin{aligned}
W[u,v](t) = \det\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\,\mathrm{sen}\,\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t + \beta\cos\beta t) \end{bmatrix} \\
&= e^{2\alpha t}\left(\alpha\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \mathrm{sen}\,\beta t \\ \cos\beta t & \mathrm{sen}\,\beta t \end{bmatrix} + \beta\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \mathrm{sen}\,\beta t \\ -\,\mathrm{sen}\,\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}\right) \\
&= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$$

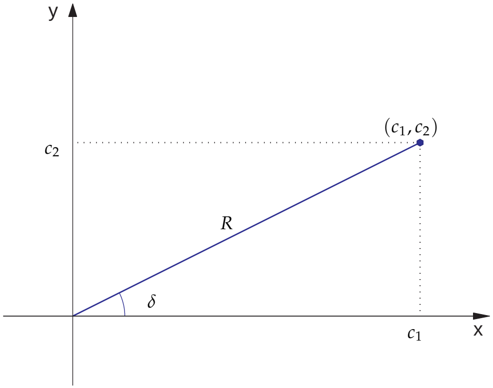
é a solução geral de (1.30).

Exemplo 1.19. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação $y'' + \omega^2 y = 0$.

A equação característica desta equação diferencial é $r^2 + \omega^2 = 0$, que tem como raízes $r_1 = i\omega$ e $r_2 = -i\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{1.33}$$

Escrevendo o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 = R\cos\delta, \\ c_2 = R\,\mathrm{sen}\,\delta. \end{cases} \tag{1.34}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (1.33) obtemos

$y(t) = R\,(\cos\delta\cos(\omega t) + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega t)) = R\cos(\omega t - \delta)$, em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (1.34).

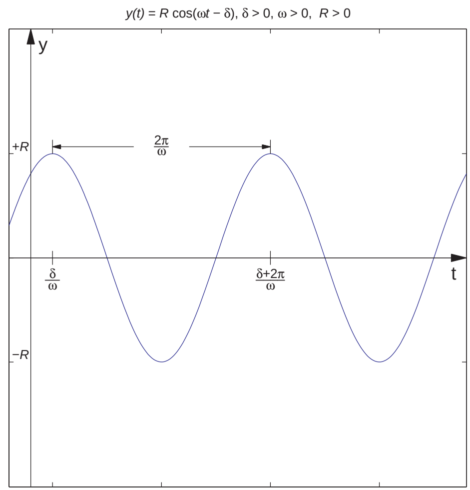


Figura 1.13 – Uma solução da equação do Exemplo 1.19

Resumo

Para resolver a equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, encontramos a equação característica $ar^2 + br + c = 0$.

(a) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ em que } r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(b) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t}.$$

(c) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t, \text{em que } \alpha = \frac{-b}{2a},\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercícios (respostas na página 126)

4.1. Mostre que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

4.2. Mostre que $y_1(x) = x^{-1}$, $x > 0$, é solução da equação diferencial

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

4.3. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad \text{em que } b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.35}$$

Existem valores constantes de r tais que $y(x) = x^r$ é uma solução de (1.35). Além disso $y(x) = x^r$ é solução da equação (1.35) se, e somente se,

$$r^2 + (1-b)r + c = 0, \tag{1.36}$$

que é chamada **equação indicial de** (1.35). Se a equação indicial $r^2 + (b-1)r + c = 0$ tem somente uma raiz real, $r = \dfrac{1-b}{2}$, determine uma segunda solução linearmente independente da forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{\frac{1-b}{2}}, \quad \text{para } x > 0.$$

4.4. (a) Determine qual ou quais das funções $z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

(b) Seja $y_1(x)$ uma das soluções obtidas no item anterior. Determine uma segunda solução $y_2(x)$ de forma que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam soluções fundamentais da equação.

(c) Determine a solução geral da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

e obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

4.5. Mostre que a solução do problema $y'' + 2y' = 0, y(0) = a, y'(0) = b$ tende para uma constante quando $t \to +\infty$. Determine esta constante.

4.6. Mostre que se $0 < b < 2$, então toda solução de $y'' + by' + y = 0$ tende a zero quando $t \to +\infty$.

4.7. Considere o problema $y'' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = b \neq 0$. Mostre que $y(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0$.

4.8. Considere o problema $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = b$. Determine os valores de b para os quais a solução $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

4.9. Considere a equação $y'' + 2by' + y = 0$. Para quais valores de b a solução $y(t)$ tende a zero quando $t \to +\infty$, independente das condições iniciais.

4.10. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

(b) Para quais valores de α todas as soluções tendem a zero quando $t \to +\infty$.

1.5 Equações Não Homogêneas

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **não homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t). \tag{1.37}$$

com $f(t)$ uma função não-nula.

Teorema 1.6. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular da equação (1.37). Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (1.37) é*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Ou seja, a solução geral da equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, com uma solução particular da equação diferencial não homogênea, $y_p(t)$.

Demonstração. Seja $y(t)$ uma solução qualquer de (1.37) e $y_p(t)$ uma solução particular de (1.37). Vamos mostrar que $Y(t) = y(t) - y_p(t)$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} Y''(t) + p(t)Y'(t) + q(t)Y(t) &= (y(t) - y_p(t))'' + p(t)(y(t) - y_p(t))' + q(t)(y(t) - y_p(t)) \\ &= \underbrace{(y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t))}_{=f(t)} - \underbrace{\left(y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t)\right)}_{=f(t)} \\ &= f(t) - f(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (1.38), existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$Y(t) = y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

ou seja, se $y(t)$ é uma solução qualquer de (1.37) e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (1.38), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t). \tag{1.39}$$

■

Portanto para encontrar a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea precisamos encontrar uma solução particular e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Exemplo 1.20. A função $y_p(t) = \frac{t}{4}$ é solução da equação diferencial

$$y'' + 4\,y = t.$$

(verifique!) Já vimos no Exemplo 1.12 na página 31 que a solução geral da equação diferencial homogênea correspondente, $y'' + 4\,y = 0$, é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Logo a solução geral da equação não homogênea $y'' + 4\,y = t$ é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{t}{4}.$$

A função $y_2(t) = \frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$ é solução da equação

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t)$$

(verifique!). Logo

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \,\mathrm{sen}\, 2t + \frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(2t).$$

é solução geral da equação diferencial

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t).$$

Teorema 1.7 (Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas). *Se $y_p^{(1)}(t)$ é uma solução de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$ é uma solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t),$$

então $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$ é solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t) + f_2(t).$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
& y_p(t)'' + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t) = \\
&= \quad (y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))'' + p(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))' + q(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)) = \\
&= \quad \underbrace{y_p^{(1)}(t)'' + p(t)y_p^{(1)}(t)' + q(t)y_p^{(1)}(t)}_{=f_1(t)} + \underbrace{y_p^{(2)}(t)'' + p(t)y_p^{(2)}(t)' + q(t)y_p^{(2)}(t)}_{=f_2(t)} = \\
&= \quad f_1(t) + f_2(t),
\end{aligned}
$$

pois $y_p^{(1)}(t)$ é solução da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$, da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t).$$

■

Exemplo 1.21. Vimos no Exemplo 1.20 que a função $y_1(t) = \dfrac{t}{4}$ é solução da equação diferencial

$$y'' + 4\,y = t$$

e a função $y_2(t) = \dfrac{t}{2}\operatorname{sen}(2t)$ é solução da equação

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t).$$

Pelo Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas (Teorema 1.7) $y(t) = \dfrac{t}{4} + \dfrac{t}{2}\operatorname{sen}(2t)$ é solução da equação

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t) + t$$

e a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{t}{4} + \frac{t}{2} \operatorname{sen}(2t).$$

1.5.1 Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t). \tag{1.40}$$

em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$.

Este método funciona quando a função $f(t)$ tem uma das seguintes formas:

(1) $f(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n$, em que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s (A_0 + \ldots + A_n t^n),$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (1.40). O Exemplo 1.22 ilustra este caso.

(2) $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n) e^{\alpha t}$, em que $a_0, \ldots, a_n, \alpha \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s (A_0 + \ldots + A_n t^n) e^{\alpha t},$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (1.40). O Exemplo 1.23 ilustra este caso.

(3) $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{\alpha t}\cos\beta t$ ou $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$, em que $a_0, \ldots, a_n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s[(A_0 + \ldots + A_n t^n)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_0 + \ldots + B_n t^n)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t],$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (1.40). O Exemplo 1.24 ilustra este caso.

Exemplo 1.22. Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' = 2 + t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + y' = 0$$

A equação característica é

$$r^2 + r = 0$$

que tem como raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + y' = 0$ é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial, $2 + t^2$, é da forma (1). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^1(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3$$

O valor de s é igual a 1, pois para $s = 0$, a parcela A_0 é solução da equação homogênea ($c_2 = 0$ e $c_1 = A_0$).

$$y_p'(t) = A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2$$

$$y_p''(t) = 2A_1 + 6A_2 t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + y' = 2 + t^2$ obtemos

$$(2A_1 + 6A_2 t) + (A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2) = (A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)t + 3A_2 t^2 = 2 + t^2$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} A_0 & + & 2A_1 & & & = & 2 \\ & & 2A_1 & + & 6A_2 & = & 0 \\ & & & & 3A_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 4$, $A_1 = -1$ e $A_2 = 1/3$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 \tag{1.41}$$

Para resolvermos o problema de valor inicial vamos calcular a derivada da solução geral da equação não homogênea

$$y'(t) = -c_2\, e^{-t} + t^2 - 2\, t + 4 \tag{1.42}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 1$ em (1.41) e $t = 0$ e $y' = 2$ em (1.42) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} c_1 & + & c2 & = & 1 \\ 4 & - & c2 & = & 2 \end{array} \right.$$

de onde obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. Logo a solução do PVI é

$$y(t) = -1 + 2e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

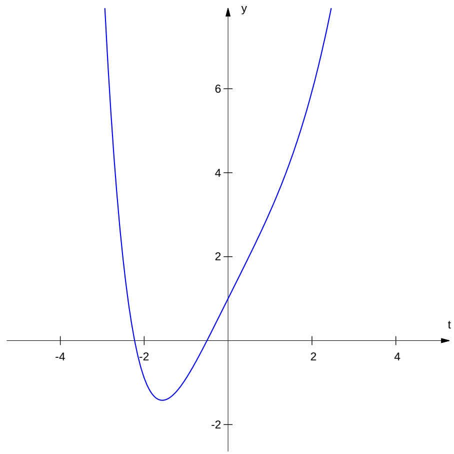


Figura 1.14 – A solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.22

Exemplo 1.23. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial, $(2+t)e^{-t}$, é da forma (2). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t)e^{-t} = (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t}$$

O valor de s é igual a 2, pois para $s = 0$ as parcelas $A_0 e^{-t}$ e $A_1 t e^{-t}$ são soluções da equação homogênea ($c_1 = A_0$, $c_2 = 0$ e $c_1 = 0$, $c_2 = A_1$) e para $s = 1$ a parcela $A_0 t e^{-t}$ é solução da equação homogênea ($c_1 = 0$ e $c_2 = A_0$).

$$y_p'(t) = \left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t}$$

$$y_p''(t) = \left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t}.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t} + \\ + 2\left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t} + \\ + (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t} &= (2+t)e^{-t} \end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(2A_0 + 6A_1 t)\, e^{-t} = (2 + t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad 2A_0 + 6A_1 t = 2 + t$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2A_0 & & = & 2 \\ & 6A_1 & = & 1 \end{cases}$$

que tem solução $A_0 = 1$ e $A_1 = 1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

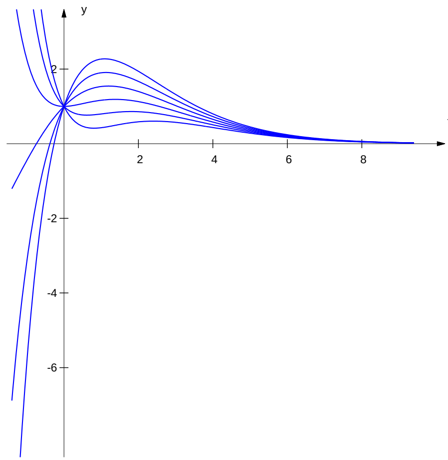


Figura 1.15 – Algumas soluções da equação do Exemplo 1.23

Exemplo 1.24. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = e^t \cos t.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + 2y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

O segundo membro da equação diferencial, $e^t \cos t$, é da forma (3). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^0 (Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t$$

O valor de s é igual a 0, pois nenhuma parcela de $y_p(t)$ é solução da equação homogênea.

$$y_p'(t) = A(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t) + B(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t +) = (A + B)e^t \cos t + (B - A)e^t \operatorname{sen} t$$

$$y_p''(t) = 2Be^t \cos t - 2Ae^t \operatorname{sen} t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = e^t \cos t$ obtemos

$$2Be^t \cos t - 2Ae^t \operatorname{sen} t + 2\left((A + B)e^t \cos t + (B - A)e^t \operatorname{sen} t\right)$$
$$+ 2(Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t) = e^t \cos t$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(4A + 4B)e^t \cos t + (4B - 4A)e^t \operatorname{sen} t = e^t \cos t$$

Substituindo-se $t = 0$ e $t = \pi/2$ obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 4A & + & 4B & = & 1 \\ -4A & + & 4B & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1/8$ e $B = 1/8$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = \frac{1}{8}e^t \cos t + \frac{1}{8}e^t \operatorname{sen} t$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + \frac{1}{8}e^t (\cos t + \operatorname{sen} t)$$

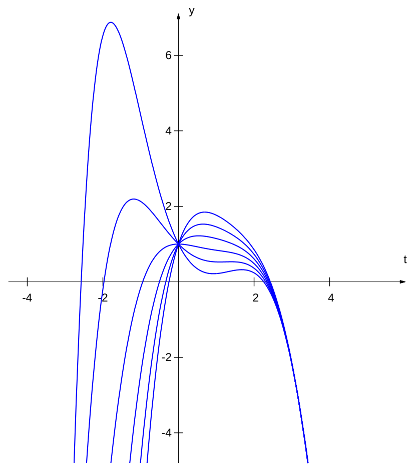


Figura 1.16 – Algumas soluções da equação do Exemplo 1.24

Exercícios (respostas na página 134)

5.1. Encontre a solução geral das equações:

(a) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$.

(b) $y'' - 4y' + 6y = 3x$.

(c) $y'' + 4\,y = 2\,\text{sen}(2t) + t$

(d) $y'' + 2y = e^t + 2$

5.2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = t^2 + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' + 2\,y' + y = 3\,\text{sen}(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 3e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(d) $2y'' + 2y' + y = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

5.3. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

(b) Determine a forma adequada para uma solução particular da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = te^{-t}\,\text{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\,t)$$

para $\alpha > 1$.

1.6 Oscilações

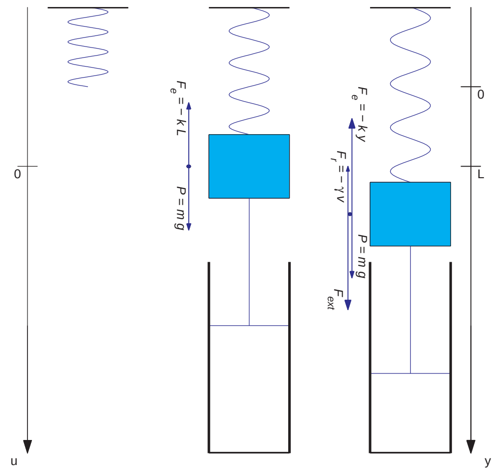


Figura 1.17 – Sistema massa-mola na vertical

Considere um sistema massa-mola na vertical. Seja L o alongamento provocado na mola pela colocação de um corpo de massa m quando o sistema está em equilíbrio. Neste caso a magnitude da força elástica é igual a magnitude da força peso, ou seja,

$$mg = kL. \tag{1.43}$$

Aqui k é chamada **constante da mola**. Seja $y(t)$ o alongamento da mola em um instante t. Defina a nova função

$$u(t) = y(t) - L.$$

Sobre o corpo de massa m agem o seu peso,

$$P = mg,$$

a força da mola que é proporcional ao seu alongamento e tem sentido oposto a ele,

$$F_e = -ky(t) = -k(u(t) + L),$$

uma força de resistência proporcional a velocidade,

$$F_r = -\gamma y'(t) = -\gamma u'(t)$$

e uma força externa F_{ext}. Aqui γ é a **constante de amortecimento**.
Pela segunda lei de Newton, temos que

$$my''(t) = mg - ky(t) - \gamma y'(t) + F_{ext}$$

ou escrevendo em termos de $u(t) = y(t) - L$:

$$mu''(t) = mg - k(L + u(t)) - \gamma u'(t) + F_{ext} \tag{1.44}$$

Assim, por (1.43) e (1.44), $u(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_{ext}. \tag{1.45}$$

que é a mesma equação que satisfaz $x(t)$ no caso em que o sistema massa-mola se movimenta na horizontal sobre uma superfície lisa. Verifique!

1.6.1 Oscilações Livres

Sem Amortecimento

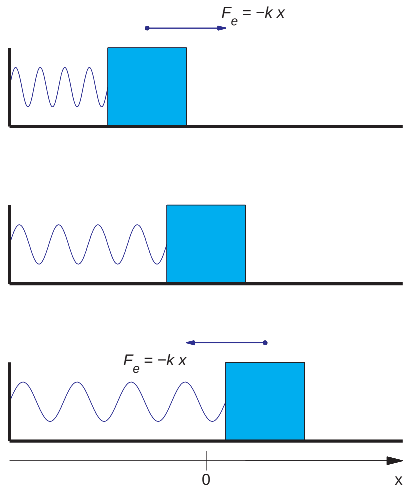


Figura 1.18 – Sistema massa-mola livre não amortecido

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$ e como são não amortecidas, $\gamma = 0$. Assim a equação (1.45) para o movimento do sistema massa-mola é

$$mu'' + ku = 0$$

A equação característica é

$$mr^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i.$$

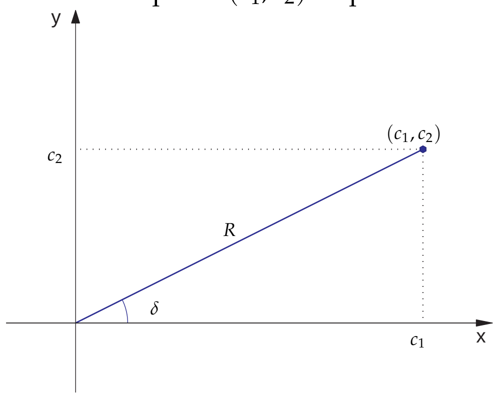
Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Seja $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Então a equação acima pode ser escrita em termos de ω_0 como

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\,. \tag{1.46}$$

Marcando o ponto (c_1, c_2) no plano e escrevendo em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 &= R\cos\delta, \\ c_2 &= R\operatorname{sen}\delta. \end{cases} \tag{1.47}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 obtidos de (1.47) na equação (1.46) obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= R\cos\delta\cos(\omega_0 t) + R\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) \\ &= R\left(\cos\delta\cos(\omega_0 t) + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)\right) \\ &= R\cos(\omega_0 t - \delta), \end{aligned}$$

Aqui foi usada a relação

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b.$$

ω_0 é chamada **frequência natural** do sistema, δ a **fase** e R a **amplitude**.
Neste caso a solução da equação é periódica de **período** $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Este movimento oscilatório é chamado **movimento harmônico simples**.

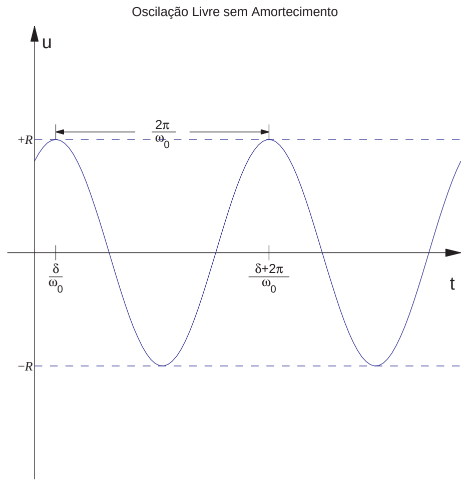


Figura 1.19 – Solução do sistema massa-mola livre não amortecido

Exemplo 1.25. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

Solução:

(a) Equação característica é $r^2 + 2 = 0$, que tem como raízes $r = \pm\sqrt{2}i$.
Logo a solução geral da equação diferencial é :

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right).$$

Para resolver o PVI precisamos calcular a derivada da solução geral:

$$y'(t) = -c_1\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right) + c_2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 1$ obtemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solução do PVI:

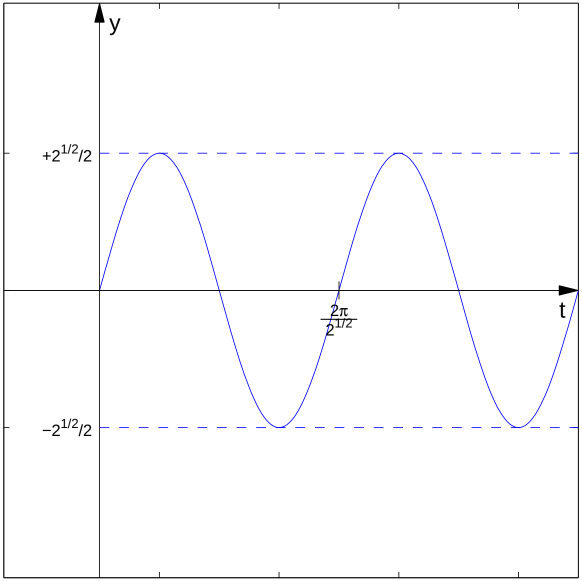
$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right).$$

Marcando o ponto $(c_1, c_2) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ no plano obtemos que $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A amplitude é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a frequência é igual a $\sqrt{2}$, a fase é igual a $\pi/2$ e o período é igual a $2\pi/\sqrt{2}$.

(b)



Com Amortecimento

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$. Assim a equação (1.45) para o movimento do sistema massa-mola é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0$$

A equação característica é $mr^2 + \gamma r + k = 0$ e $\Delta = \gamma^2 - 4km$

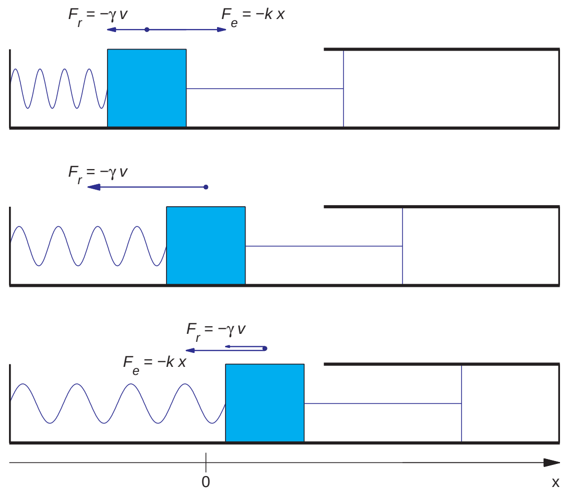


Figura 1.20 – Sistema massa-mola livre com amortecimento

Aqui temos três casos a considerar:

(a) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km > 0$ ou $\gamma > 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que

$$r_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} < 0$$

Este caso é chamado **superamortecimento** e a solução

$$u(t) \to 0 \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

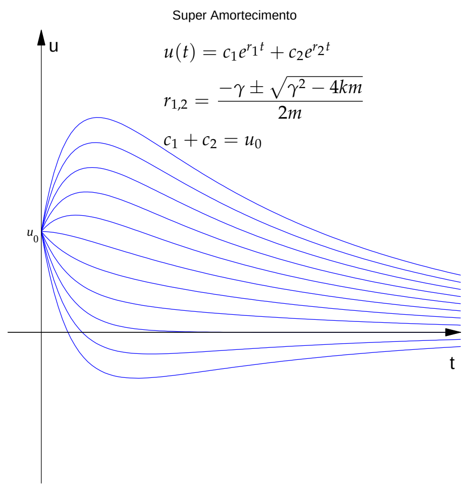


Figura 1.21 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com superamortecimento

(b) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km = 0$ ou $\gamma = 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$$

Este caso é chamado **amortecimento crítico** e a solução

$$u(t) \to 0 \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

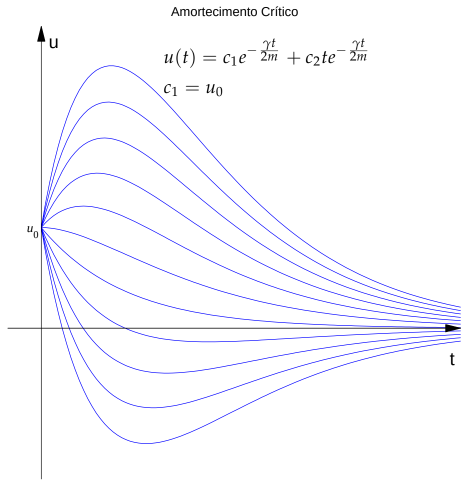


Figura 1.22 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento crítico

(c) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km < 0$ ou $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$, neste caso

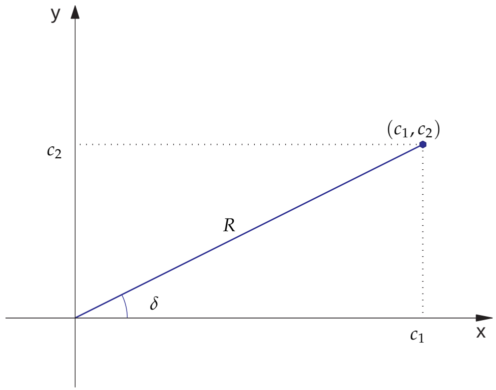
$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}}(c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t) \tag{1.48}$$

em que

$$\mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} < \omega_0$$

Aqui, μ é chamado **quase frequência** e $T = \dfrac{2\pi}{\mu}$ é chamado **quase período**.

Escrevendo novamente o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 = R\cos\delta, \\ c_2 = R\operatorname{sen}\delta. \end{cases} \tag{1.49}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (2.24) obtemos

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}}(R\cos\delta\cos\mu t + R\ \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\mu t) = Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}\cos(\mu t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (1.49).

Este caso é chamado **subamortecimento** e a solução

$$u(t) \to 0 \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

Este é um movimento oscilatório com amplitude $Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}$ é chamado **quase-periódico**.

Observe que nos três casos a solução tende a zero quando t tende a $+\infty$.

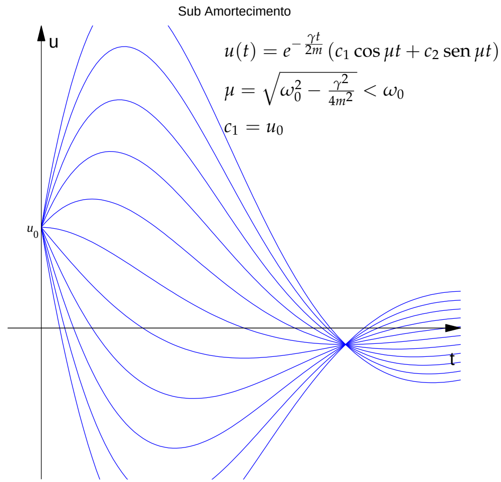


Figura 1.23 – Algumas soluções do sistema massa-mola livre com subamortecimento

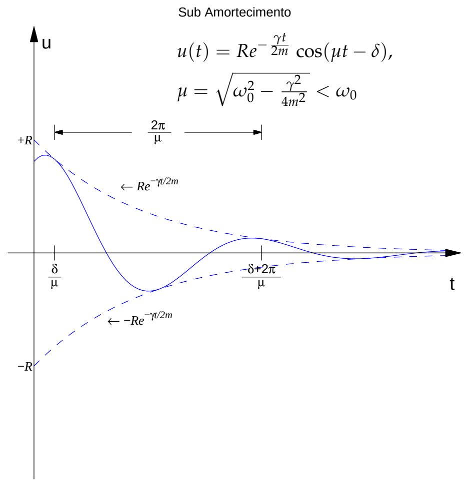


Figura 1.24 – Solução típica do sistema massa-mola livre com subamortecimento

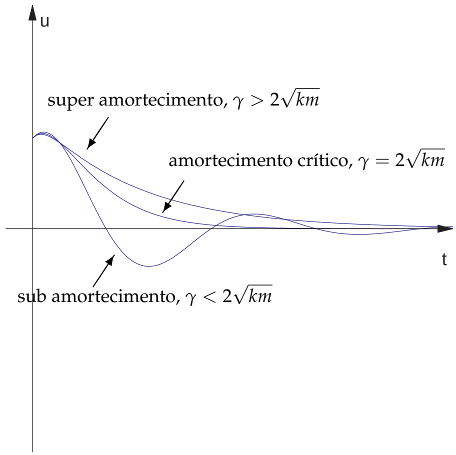


Figura 1.25 – Comparação das soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento para diferentes valores da constante de amortecimento γ

1.6.2 Oscilações Forçadas

Vamos supor que uma força externa periódica da forma $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$, com $\omega > 0$, seja aplicada ao corpo de massa m. Então a equação (1.45) para o movimento sistema é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento sistema é

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t) \tag{1.50}$$

Sabemos que as soluções são da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + u_p(t)$$

em que, pelo método dos coeficientes a determinar,

$$u_p(t) = t^s [A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)]$$

é uma solução particular e s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $u_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e A e B são coeficientes a serem determinados substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (1.50).

Temos dois casos a considerar:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. Neste caso $s = 0$, pois nenhuma das parcelas de $u_p(t)$ é solução da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (1.50) encontramos

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Neste caso a solução $u(t)$ é oscilatória e limitada.

(b) Se $\omega = \omega_0$. Neste caso $s = 1$, pois para $s = 0$ as parcelas, $A\cos(\omega_0 t)$ e $B\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, de $u_p(t)$, são soluções da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = t[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)]$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + t[A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (1.50) encontramos

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Neste caso $u(t)$ é oscilatória, mas fica ilimitada quando t tende a $+\infty$. Este fenômeno é conhecido como **ressonância** e a frequência $\omega = \omega_0$ é chamada **frequência de ressonância**.

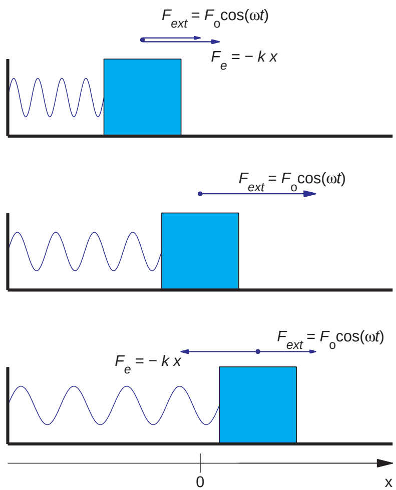


Figura 1.26 – Sistema massa-mola forçado sem amortecimento

Exemplo 1.26. Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

Temos dois casos a considerar:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que (verifique!)

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \operatorname{sen}(\omega_2 t)$$

em que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}.$$

Como ω_1 é menor do que ω_2, então o movimento é uma oscilação de frequência ω_2 com uma amplitude também oscilatória $R(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t)$ de frequência ω_1. Este movimento é chamado **batimento**.

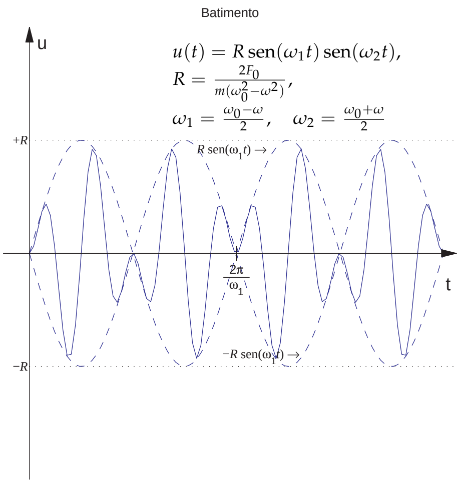


Figura 1.27 – Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de batimento

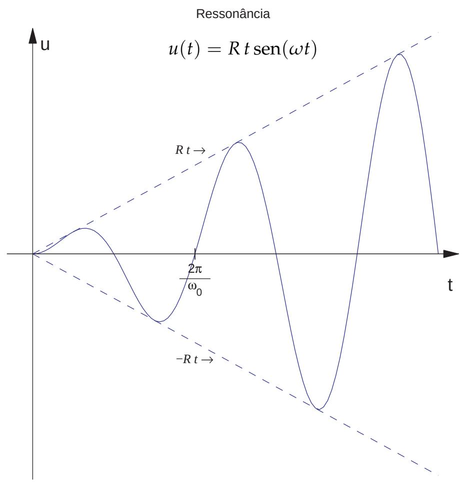


Figura 1.28 – Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de ressonância

(b) Se $\omega = \omega_0$. A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Já vimos que neste caso $u(t)$ fica ilimitada quando t tende a $+\infty$ que é o fenômeno da ressonância. Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que (verifique!)

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Este movimento é uma oscilação de frequência ω_0 com uma amplitude

$$R(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t$$

que aumenta proporcionalmente a t.

Oscilações Forçadas com Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento sistema é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t) \tag{1.51}$$

Seja $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se $u_p(t)$ e suas derivadas na equação diferencial (1.51) encontramos

$$A = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B = \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta},$$

em que $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$. Podemos escrever

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) = R\cos(\omega t - \delta)$$

em que $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ e δ é tal que $A = R\cos\delta$ e $B = R\,\mathrm{sen}\,\delta$. Neste caso a amplitude da solução estacionária é dada por

$$R = \frac{F_0}{\sqrt{\Delta}}.$$

Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R\cos(\omega t - \delta).$$

A solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$, é a solução do problema de oscilação livre amortecida e já mostramos que tende a zero quando t tende a $+\infty$, por isso é chamada **solução transiente**, enquanto a solução particular, $R\cos(\omega t - \delta)$, permanece e por isso é chamada **solução estacionária**.

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R\cos(\omega t - \delta) \approx R\cos(\omega t - \delta), \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

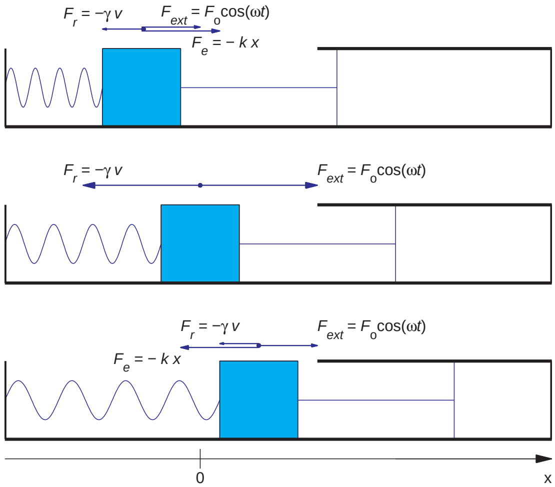


Figura 1.29 – Sistema massa-mola forçado com amortecimento

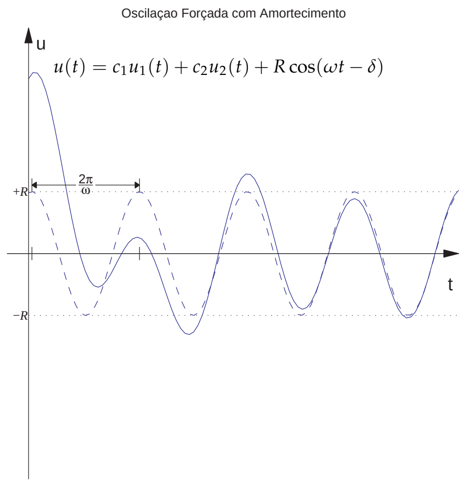


Figura 1.30 – Solução do sistema massa-mola forçado com amortecimento

1.6.3 Circuitos Elétricos

Considere um circuito elétrico formado por um capacitor, um resistor e um indutor ligados em série a um gerador como mostrado na Figura 1.31.

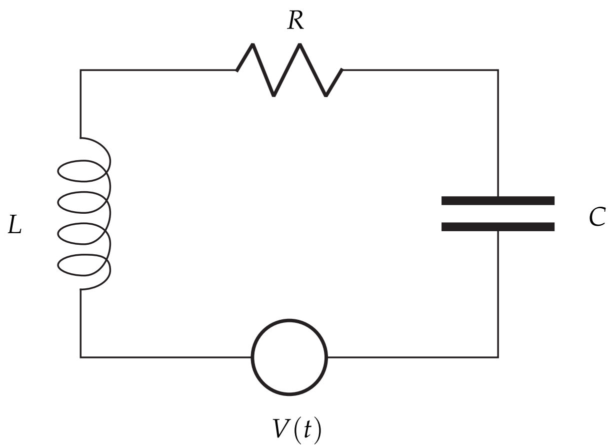


Figura 1.31 – Circuito LRC

A queda de potencial num resistor de resistência R é igual a RI, num capacitor de capacitância C é igual a $\frac{Q}{C}$ e em um indutor de indutância L é igual a $L\frac{dI}{dt}$. Pela segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) a soma da forças eletromotrizes (neste caso apenas $V(t)$) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso $R\,I$ na resistência, Q/C no capacitor e $L\frac{dI}{dt}$ no indutor), ou seja,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t) \tag{1.52}$$

Substituindo-se $I = \frac{dQ}{dt}$ obtemos uma equação diferencial de 2a. ordem para a carga elétrica no capacitor.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t) \tag{1.53}$$

com condições iniciais $Q(0) = Q_0$ e $Q'(0) = I_0$. Uma equação diferencial de 2a. ordem para a corrente elétrica no circuito pode ser obtida derivando-se a equação (1.52), ou seja,

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}(t)$$

e substituindo-se $I = \frac{dQ}{dt}$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}(t)$$

com condições iniciais $I(0) = I_0$ e $I'(0) = \frac{V(0) - RI_0 - Q_0/C}{L}$. A última condição é obtida usando a equação (1.53).

Exemplo 1.27. Um circuito possui um capacitor de $0,5 \times 10^{-1}$ F, um resistor de 25 Ω e um indutor de 5 H, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante

$t = 0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $10e^{-t/4}$ V, e o circuito é fechado.
Vamos determinar a carga no capacitor em qualquer instante $t > 0$. A equação diferencial para a carga no capacitor é

$$5Q'' + 25Q' + \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-1}} Q = 10e^{-t/4}.$$

Dividindo-se por 5 obtemos a equação

$$Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-t/4}.$$

Equação característica é

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

cujas raízes são $r = -1, -4$.
Assim a solução geral da equação homogênea é

$$Q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}.$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma $Q_p(t) = A_0 e^{-t/4}$.

$$Q_p'(t) = -\frac{1}{4} A_0 e^{-t/4}, \quad Q_p''(t) = \frac{A_0}{16} e^{-t/4}$$

Substituindo-se na equação $Q_p(t)$, $Q_p'(t)$ e $Q_p''(t)$ obtemos

$$\frac{A_0}{16} e^{-t/4} - \frac{5}{4} A_0 e^{-t/4} + 4A_0 e^{-t/4} = 2e^{-t/4}$$

$$\frac{45}{16} A_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{32}{45}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é

$$Q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Derivada da solução geral: $Q'(t) = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} - \frac{8}{45} e^{-t/4}$
Substituindo-se $t = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 + \frac{32}{45} = 0 \\ -c_1 - 4c_2 - \frac{8}{45} = 0 \end{array} \right. , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} c_1 = -8/9 \\ c_2 = 8/45 \end{array} \right.$$

Portanto a solução do PVI formado pela equação diferencial e $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$ é

$$Q(t) = -\frac{8}{9} e^{-t} + \frac{8}{45} e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0.$$

Exercícios (respostas na página 141)

6.1. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

6.2. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$2y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

6.3. Uma mola, de um sistema massa-mola sem amortecimento, tem constante de elasticidade igual a 3 N/m. Pendura-se na mola um corpo de massa 2 kg e o sistema sofre a ação de uma força externa de $3\cos(3t)$. Determine a função que descreve o movimento corpo em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual u_0 e a velocidade inicial u'_0.

6.4. Se um sistema massa-mola com um corpo de massa 2 kg e uma mola com constante de elasticidade igual 0,5 N/m é colocado em movimento, no instante $t = 0$, num meio em que a constante de amortecimento é igual a 1 N.s/m, determine a posição do corpo em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual a u_0 e a velocidade inicial u'_0.

6.5. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico.

(a) Se o sistema é colocado em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.

(b) Se o sistema é puxado para baixo esticando a mola 1 centímetro e depois colocado em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.

(c) Se o sistema é puxado para baixo esticando a mola 2 centímetros e depois é solto.

6.6. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado.

(a) Para quais valores da constante de amortecimento γ o sistema é super-amortecido, tem um amortecimento crítico e é sub-amortecido.

(b) Suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 dinas (=gramas·centímetros por segundos^2) quando a velocidade é de 10 centímetros por segundo. Se o sistema é puxado para baixo 2 centímetros e depois é solto, determine a posição u do corpo em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico. Qual o valor do quase período?

6.7. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o corpo é colocado em movimento com uma força externa de $9600\cos(6t)$ dinas, determine a posição do corpo como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

6.8. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o corpo é colocado em movimento na posição de equilíbrio com uma força externa de $1000\cos(\omega t)$ dinas, para ω igual a frequência de ressonância, determine a posição do corpo como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

6.9. Um corpo de massa 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Suponha que o amortecedor exerce uma força de 4200 dinas quando a velocidade é de 1 centímetro por segundo. Se o corpo está sob a ação de uma força externa de $26000\cos(6t)$ dinas, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico, considerando somente a solução estacionária.

6.10. Considere um sistema massa-mola descrito pelo problema de valor inicial

$$u'' + u' + 2u = \cos \omega t, \ \omega > 0, \ u(0) = 0, \ u'(0) = 2.$$

(a) Determine a solução geral da equação diferencial.

(b) Determine a solução estacionária deste problema.

(c) Encontre a amplitude da solução estacionária como função de ω.

6.11. Considere a equação diferencial do sistema massa-mola forçado sem amortecimento

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Mostre que a solução geral:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$ é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t);$$

(b) Se $\omega = \omega_0$ é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

6.12. Mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Se $\omega \neq \omega_0$ é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right).$$

(b) Se $\omega = \omega_0$ é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

6.13. Encontre a solução estacionária de

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t).$$

6.14. Um circuito possui um capacitor de $0{,}125 \times 10^{-1}$ F, um resistor de 60 Ω e um indutor de 10 H, em série. A carga inicial no capacitor é zero. No instante $t = 0$ conecta-se o circuito a uma bateria cuja tensão é de 12 V e o circuito é fechado.

(a) Determine a carga no capacitor em qualquer instante $t > 0$.

(b) Determine a carga no capacitor quando $t \to +\infty$.

(c) Esboce o gráfico da solução obtida.

6.15. O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela função $\theta(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Considere a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.

(a) Encontre $\theta(t)$ sabendo-se que o pêndulo é solto de um ângulo θ_0.

(b) Determine a frequência, o período e a amplitude de oscilação do pêndulo.

1.7 Respostas dos Exercícios

1. Introdução às Equações Diferenciais (página 13)

1.1. (a) Equação diferencial ordinária de 1ª ordem não linear.

(b) Equação diferencial ordinária de 2ª ordem linear.

1.2. $(x+3)y_1'' + (x+2)y_1' - y_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)y_2'' + (x+2)y_2' - y_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)y_3'' + (x+2)y_3' - y_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $y_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e na equação obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar+b)e^{rt} = 0,$$

pois por hipótese $ar + b = 0$.

(b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

pois por hipótese $ar^2 + br + c = 0$.

(c) Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (1.23) obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$r(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right)x^r = 0,$$

pois por hipótese $r^2 + (b-1)r + c = 0$.

1.3. (a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar + b)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar + b = 0$$

(b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ na equação diferencial obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.4. (a)

$$0 = y' + ty^2 = \frac{-2tr}{(t^2-3)^2} + \frac{tr^2}{(t^2-3)^2} = \frac{(-2r + r^2)t}{(t-3)^2} \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2$$

(b)

$$0 = y' - 2ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{2tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-2r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad r^2 + r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1$$

(c)

$$0 = y' - 6ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{6tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-6r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad 3r^2 + r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1/3$$

(d)

$$0 = y' - ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+2)^2} - \frac{tr^2}{(t^2+2)^2} = \frac{(-2r-r^2)t}{(t^2+2)^2}, \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad r^2 + 2r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -2$$

1.5. $y(t) = at + b \Rightarrow y'(t) = a$ e $y''(t) = 0$.

Substituindo-se $y(t) = at + b$, $y'(t) = a$ e $y''(t) = 0$ na equação diferencial $ty'' + (t-1)y' - y = 0$ obtemos

$t \cdot 0 + (t-1)a - (at+b) = 0$.

Simplificando-se obtemos:

$-a - b = 0$ ou $a = -b$.

Logo para que $y(t) = at + b$ seja solução da equação diferencial temos que ter $a = -b$, ou seja,

$$y(t) = at - a = a(t-1).$$

Portanto todas as soluções da equação diferencial que são funções de 1º grau são múltiplos escalares de

$$y_0(t) = t - 1.$$

2. Equações Lineares de 1ª Ordem (página 23)

2.1. (a)

$$\mu(x) = e^{\int (1-2x)dx} = e^{x-x^2}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x-x^2}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x-x^2}y\right) = e^{x-x^2}xe^{-x} = xe^{-x^2}$$

$$e^{x-x^2}y(x) = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{x^2-x}$$

$$2 = y(0) = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 5/2$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$$

(b)

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2dt} = e^{t^3}$$

Multiplicando a equação por $\mu(t) = e^{t^3}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^3}y\right) = e^{t^3}e^{-t^3+t} = e^t$$

$$e^{t^3}y(t) = \int e^t\,dt = e^t + C$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + Ce^{-t^3}$$

$$2 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$$

(c)

$$\mu(t) = e^{\int -\cos t\,dt} = e^{-\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\operatorname{sen} t}y\right) = e^{-\operatorname{sen} t}te^{t^2+\operatorname{sen} t} = te^{t^2}$$

$$e^{-\operatorname{sen} t}y(t) = \int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2+\operatorname{sen} t} + Ce^{\operatorname{sen} t}$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 3/2$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2+\operatorname{sen} t} + \frac{3}{2}e^{\operatorname{sen} t}$$

(d)

$$\mu(x) = e^{\int x^4\, dx} = e^{\frac{x^5}{5}}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{\frac{x^5}{5}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^5}{5}} y\right) = e^{\frac{x^5}{5}} x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} = x^4 e^{x^5}$$

$$e^{\frac{x^5}{5}} y(x) = \int x^4 e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5} e^{x^5}$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{4x^5}{5}} + Ce^{-\frac{x^5}{5}}$$

$$1 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = 4/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{4x^5}{5}} + \frac{4}{5} e^{-\frac{x^5}{5}}$$

2.2. (a)

$$y' - \frac{4}{x} y = -\frac{2}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4} y\right) = -\frac{2}{x^7}$$

Integrando-se

$$x^{-4} y(x) = \int -\frac{2}{x^7} dx = \frac{1}{3x^6} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

(b)

$$y' - \frac{1}{x}y = -x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-1}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-1}y\right) = -1$$

Integrando-se

$$x^{-1}y(x) = -\int dx = -x + C$$

$$y(x) = -x^2 + Cx$$

(c)

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = xe^x$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$y(x) = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

2.3. (a)

$$\mu(x) = e^{\int 5x^4\,dx} = e^{x^5}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x^5}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^5}y\right) = e^{x^5}x^4 = x^4e^{x^5}$$

$$e^{x^5}y(x) = \int x^4e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}e^{x^5} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + Ce^{-x^5}$$

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = y_0 - 1/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)e^{-x^5}$$

(b) $y'(x) = -5x^4\left(y_0 - \frac{1}{5}\right)e^{-x^5}$. Para $y_0 > 1/5$ a solução é decrescente e para $y_0 < 1/5$ a solução é crescente.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1/5$ e claramente independe do valor de y_0.

2.4. (a)

$$y' + \frac{x}{x^2-9}y = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-9}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = \sqrt{x^2-9}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-9}\,y\right) = 0$$

$$\sqrt{x^2-9}\,y(x) = C$$

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$y_0 = y(5) = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4y_0$$

$$y(x) = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2-9}}$$

(b) $x > 3$, para $y_0 \neq 0$ e $-\infty < x < \infty$, para $y_0 = 0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e claramente independe do valor de y_0.

2.5. (a) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}\left(y_1(t) + y_2(t)\right) + p(t)(y_1(t) + y_2(t)) = \left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = 0 + 0 = 0$

(b) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}\left(cy_1(t)\right) + p(t)(cy_1(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) = c0 = 0$

2.6. $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}\left(cy_1(t) + y_2(t)\right) + p(t)(cy_1(t) + y_2(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = c0 + q(t) = q(t)$

2.7. Para resolver a equação precisamos determinar o fator integrante: $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{1}{100}t}$.

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{100}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{100}t}y) = 2t$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{100}t}y(t) = t^2 + C$$

ou

$$y(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + Ce^{-\frac{1}{100}t}.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 100$, obtemos $100 = C$. Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100}t} + 100e^{-\frac{1}{100}t} = (t^2 + 100)e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Para fazer um esboço do gráfico:

$$y'(t) = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \frac{t^2+100}{100}e^{-\frac{1}{100}t} = \frac{-t^2 - 100 + 200t}{100}e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Como a função exponencial é sempre positiva o sinal de $y'(t)$ depende apenas de $-t^2 - 100 + 200t$ que é zero se, e somente se, $t = 100 \pm 30\sqrt{11}$.

Além disso $-t^2 - 100 + 200t$ (e portanto $y'(t)$) é negativa para $t < 100 - 30\sqrt{11} \approx 0{,}5$ e para $t > 100 + 30\sqrt{11} \approx 199{,}5$ e positiva para $100 - 30\sqrt{11} \approx 0{,}5 < t < 100 + 30\sqrt{11} \approx 199{,}5$.

Logo a solução do PVI, $y(t)$, é decrescente para $t < 100 - 30\sqrt{11} \approx 0{,}5$ e para $t > 100 + 30\sqrt{11} \approx 199{,}5$ e crescente para $100 - 30\sqrt{11} \approx 0{,}5 < t < 100 + 30\sqrt{11} \approx 199{,}5$.

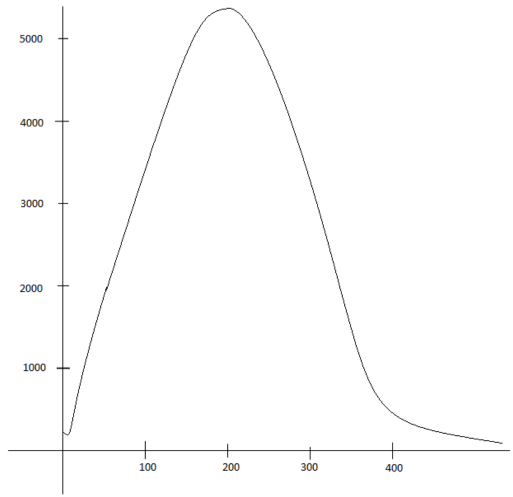
$$y''(t) = \frac{\left(t^2 - 200\,t + 100\right)\, e^{-\frac{t}{100}}}{10000} - \frac{\left(2\,t - 200\right)\, e^{-\frac{t}{100}}}{100} = \frac{\left(t^2 - 400\,t + 20100\right)\, e^{-\frac{t}{100}}}{10000}.$$

Como a função exponencial é sempre positiva o sinal de $y''(t)$ é o mesmo de $t^2 - 400\,t + 20100$ que é zero se, e somente se, $t = 200 \pm 10\sqrt{99}$. Além disso, $t^2 - 400\,t + 20100$ (e portanto $y''(t)$) é positiva para $t < 200 - 10\sqrt{99} \approx 59$ e para $t > 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$ e negativa para $200 - 10\sqrt{99} \approx 59 \approx 0{,}5 < t < 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$.

Logo a solução do PVI, $y(t)$, tem concavidade para cima para $t < 200 - 10\sqrt{99} \approx 59$ e para $t > 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$ e concavidade para baixo para $200 - 10\sqrt{99} \approx 59 < t < 200 + 10\sqrt{99} \approx 341$.

Além disso, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Abaixo o esboço do gráfico feito usando o programa Paint que é um acessório do MSWindows©.



3. Equações Homogêneas - Parte I (página 39)

3.1. (a) Sejam $y_1(t) = e^{-\omega(t-a)}$ e $y_2(t) = e^{\omega(t-a)}$.
$y_1''(t) - \omega^2 y_1(t) = \omega^2 e^{-\omega(t-a)} - \omega^2 e^{-\omega(t-a)} = 0.$
$y_2''(t) - \omega^2 y_2(t) = \omega^2 e^{\omega(t-a)} - \omega^2 e^{\omega(t-a)} = 0.$
Logo $y_1(t) = e^{-\omega(t-a)}$ e $y_2(t) = e^{\omega(t-a)}$ são soluções da equação diferencial.
$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-\omega(t-a)} & e^{\omega(t-a)} \\ -\omega e^{-\omega(t-a)} & \omega e^{\omega(t-a)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\omega & \omega \end{bmatrix} = 2\omega \neq 0.$
Logo a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{-\omega(t-a)} + c_2 e^{\omega(t-a)}.$$

(b) Sejam $y_1(t) = \cosh(\omega(t-a)) = \dfrac{e^{-\omega(t-a)} + e^{\omega(t-a)}}{2}$ e $y_2(t) = \operatorname{senh}(\omega(t-a)) = \dfrac{e^{-\omega(t-a)} - e^{\omega(t-a)}}{2}$.
$y_1''(t) - \omega^2 y_1(t) = \omega^2 \cosh(\omega(t-a)) - \omega^2 \cosh(\omega(t-a)) = 0$.
$y_2''(t) - \omega^2 y_2(t) = \omega^2 \operatorname{senh}(\omega(t-a)) - \omega^2 \operatorname{senh}(\omega(t-a)) = 0$.
Logo $y_1(t) = \cosh(\omega(t-a))$ e $y_2(t) = \operatorname{senh}(\omega(t-a))$ são soluções da equação diferencial.
$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cosh(\omega(t-a)) & \operatorname{senh}(\omega(t-a)) \\ \omega \operatorname{senh}(\omega(t-a)) & \omega \cosh(\omega(t-a)) \end{bmatrix} =$
$\omega \det \begin{bmatrix} \cosh(\omega(t-a)) & \operatorname{senh}(\omega(t-a)) \\ \operatorname{senh}(\omega(t-a)) & \cosh(\omega(t-a)) \end{bmatrix} = \omega \neq 0$, pois $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.
Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \cosh(\omega(t-a)) + c_2 \operatorname{senh}(\omega(t-a)).$$

3.2. (a) $x^2 y_1'' - 6x y_1' + 10 y_1 = x^2(2) - 6x(2x) + 10(x^2) = 0$
$x^2 y_2'' - 6x y_2' + 10 y_2 = x^2(20x^3) - 6x(5x^4) + 10(x^5) = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação.

(b) Como
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$
então a solução geral é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

Agora, como $y(1) = 3$, então substituindo $x = 1$ e $y = 3$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 + c_2 = 3$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) = 2c_1 x + 5c_2 x^4$$

obtemos $2c_1 + 5c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 2c_1 + 5c_2 = 3$$

obtemos $c_2 = 4$ e $c_1 = -1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 4x^2 - x^5$$

3.3. Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (1.23) obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação (1.23) se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

3.4.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{bmatrix} \\ &= x^{r_1-1} x^{r_2-1} \det \begin{bmatrix} x & x \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) x^{r_1+r_2-1} \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

3.5. Neste caso, para $x > 0$, pela fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} = e^{r_1 \ln x} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} \\ &= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \quad \text{e} \\ y_2(x) &= x^{r_2} = e^{r_2 \ln x} = e^{(\alpha-i\beta)\ln x} \\ &= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(-\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(-\beta \ln x)\right) \\ &= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \end{aligned}$$

são soluções complexas da equação diferencial (1.23).

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\ &= C_1 x^{\alpha} \left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &\quad + C_2 x^{\alpha} \left(\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\ &= (C_1 + C_2) x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \\ &\quad + i(C_1 - C_2) x^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln x) \end{aligned}$$

Tomando $C_1 = C_2 = 1/2$, temos que a solução

$$u(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$$

e tomando $C_1 = -\dfrac{i}{2}$ e $C_2 = \dfrac{i}{2}$, temos a solução

$$v(x) = x^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

$$\det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix} = \beta x^{2\alpha - 1} \neq 0, \quad \forall\ x > 0.$$

3.6. Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^r \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^r \ln x$$

são soluções fundamentais da equação de Euler, em que $r = \frac{1-b}{2}$.
$y_2'(x) = x^{r-1}(r \ln x + 1)$,
$y_2''(x) = x^{r-2}((r^2 - r)\ln x + 2r - 1))$
$x^2 y_2'' + bxy_2' + cy_2 =$

$$= x^r((r^2 + (b-1)r + c)\ln x + 2r + b - 1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_1}\ln x \\ r_1 x^{r_1-1} & (1 + r_1 \ln x)x^{r_1-1} \end{bmatrix} \\
&= x^{2r_1-1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r_1 & (1 + r_1 \ln x) \end{bmatrix} \\
&= x^{2r_1-1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0.
\end{aligned}$$

3.7. (a) Equação indicial:

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$$

(b) Equação indicial:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

(c) Equação indicial:

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-1}\cos(2\ln x) + c_2 x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln x)$$

3.8. (a)

$$\begin{aligned}
p(t) &= 0 \\
q(t) &= \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)} \\
f(t) &= \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.
\end{aligned}$$

Como $t_0 = 0$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $-1 < t < 1$.

(b)

$$p(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$f(t) = \frac{e^t}{t^2-t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = -1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t < 0$.

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{2}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2-t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

3.9. Sejam $y_1(t)$ a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e $y_2(t)$ a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 1, \end{cases}$$

então $W[y_1, y_2](t_0) = 1 \neq 0$.

3.10. Substituindo-se $y(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ na equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ obtemos

$$-4\,t^2 \operatorname{sen}(t^2) + q(t) \operatorname{sen}(t^2) + 2\,p(t)\,t \cos(t^2) + 2 \cos(t^2) = 0.$$

Substituindo-se $t = 0$ obtemos $2 = 0$, que é um absurdo.

3.11. $y_1'(t) = 3t^2$, $y_1''(t) = 6t$, $y_2'(t) = 3t|t|$, $y_2''(t) = 6|t|$. Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$ty_1'' - (2+t^2)y_1' + 3ty_1 = 6t^2 - (2+t^2)3t^2 + 3t^4 = 0.$$

$$ty_2'' - (2+t^2)y_2' + 3ty_2 = 6t|t| - (2+t^2)3t|t| + 3t^3|t| = 0.$$

Logo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação diferencial. $y_1(t) = y_2(t)$, para $t \geq 0$ e $y_1(t) = -y_2(t)$, para $t < 0$. Logo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são LI

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{bmatrix} = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

3.12. Vamos supor que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não são soluções fundamentais da equação diferencial no intervalo I, então $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$. Considere a combinação linear nula

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0.$$

Derivando em relação a t obtemos

$$c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) = 0.$$

Substituindo-se $t_0 \in I$ nas duas últimas equações obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1 y_1(t_0) & + & c_2 y_2(t_0) & = & 0 \\ c_1 y_1'(t_0) & + & c_2 y_2'(t_0) & = & 0 \end{array}\right.$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = \bar{0}$$

em que

$$A = \left[\begin{array}{cc} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{array}\right], \quad X = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \bar{0} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Como $W[y_1, y_2](t_0) = \det(A) \neq 0$, então o sistema tem solução não trivial $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Seja

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

$y(t)$ satisfaz as condições iniciais $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 0$. Logo pelo Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 1.1 na página 25),

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como c_1 e c_2 não são ambos nulos, então ou $y_2(t) = -\frac{c_1}{c_2} y_1(t)$ ou $y_1(t) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(t)$, para todo $t \in I$. Ou seja, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são LD.

3.13. (a)

$$W[y_1, y_2](t) = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)$$

$$\begin{array}{rcl} W[y_1, y_2]'(t) & = & y_1'(t) y_2'(t) + y_1(t) y_2''(t) \\ & & -\, y_2'(t) y_1'(t) - y_2(t) y_1''(t) \\ & = & y_1(t) y_2''(t) - y_2(t) y_1''(t) \end{array}$$

(b) Como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação
$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então

$$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \tag{1.54}$$

$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0 \tag{1.55}$$

Multiplicando-se a equação (1.55) por $y_1(t)$ e subtraindo-se da equação (1.54) multiplicada por $y_2(t)$ obtemos

$$y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1(t)'' + p(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)) = 0,$$

ou seja, pelo item anterior

$$W[y_1, y_2]'(t) + p(t)W[y_1, y_2](t) = 0$$

(c) Pelo item anterior o wronskiano satisfaz a equação diferencial $W' + p(t)W = 0$. A equação diferencial pode ser escrita como uma equação separável

$$\frac{W'}{W} = -p(t).$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{W'}{W}dt = -\int p(t)dt + c_1$$

$$\int \frac{1}{W}dW = -\int p(t)dt + c_1$$

$$\ln |W(t)| = -\int p(t)dt + c_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros obtemos

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}.$$

(d) Pelo item anterior, se para algum $t_0 \in I$, $W[y_1, y_2](t_0) = 0$, então $c = 0$ e $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$.
Por outro lado, se para algum $t_0 \in I$, $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, então $c \neq 0$ e $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

(e) Substituindo-se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ na equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ obtemos o sistema $AX = B$, em que $A = \begin{bmatrix} y_1'(t) & y_1(t) \\ y_2'(t) & y_2(t) \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -y_1''(t) \\ -y_2''(t) \end{bmatrix}$. Assim, $\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} y_1'(t) & y_1(t) \\ y_2'(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -y_1''(t) \\ -y_2''(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1,y_2](t)} \begin{bmatrix} y_2(t) & -y_1(t) \\ -y_2'(t) & y_1'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1,y_2](t)} \begin{bmatrix} y_2(t)y_1''(t) - y_1(t)y_2''(t) \\ y_1'(t)y_2''(t) - y_2'(t)y_1''(t) \end{bmatrix}$. Observe a aplicação do Teorema de Abel (exercício anterior).

4. Equações Homogêneas - Parte II (página 56)

4.1. (a) $2x^2y_1'' - xy_1' - 9y_1 = 2x^2(6x) - x(3x^2) - 9x^3 = 12x^3 - 3x^3 - 9x^3 = 0$
Logo, $y_1(x) = x^3$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^3$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^3.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^3 + 3v(x)x^2 \quad \text{e}$$
$$y''(x) = v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x,$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$2x^2y'' - xy' - 9y = 0$
$2x^2(v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x) - x(v'(x)x^3 + 3v(x)x^2) - 9v(x)x^3 = 0$
$2x^5v''(x) + 11x^4v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$2xw' + 11w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$2\frac{w'}{w} = -\frac{11}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln|w|\right) = -\frac{11}{x}$$

$$2\ln|w| = -11\ln|x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln\left|x^{11}(w(x))^2\right| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-11/2}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-11/2} dx = -c_1 \frac{2}{9} x^{-9/2} + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = -9/2$ obtemos $v(x) = x^{-9/2}$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-9/2}x^3 = x^{-3/2}$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^{-3/2}$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^3 & x^{-3/2} \\ 3x^2 & -\frac{3}{2}x^{-5/2} \end{bmatrix} = -\frac{9}{2}x^{1/2} \neq 0$, para $x \neq 0$.

4.2. (a) $x^2 y_1'' + 3xy_1' + y_1 = x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) + x^{-1} = 2x^{-1} - 3x^{-1} + x^{-1} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^{-1}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^{-1}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{-1}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2} \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3},$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$x^2y'' + 3xy' + y = 0$
$x^2(v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3}) + 3x(v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2}) + v(x)x^{-1} = 0$
$xv''(x) + v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|w| = -\ln|x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1\int x^{-1}dx = c_1\ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-1}\ln x$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^{-1}$ e $y_2(x) = x^{-1}\ln x$ são soluções fundamentais da equação.

$$W[y_1, y_2](x) = \det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-1}\ln x \\ -x^{-2} & x^{-2}(1-\ln x) \end{bmatrix} = x^{-3} \neq 0, \text{ para } x \neq 0$$

4.3.

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{\frac{1-b}{2}}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2}v(x)x^{\frac{-1-b}{2}} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} \\ &- \frac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}, \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Euler:

$$x^2(v''(x)x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b)v'(x)x^{\frac{-1-b}{2}} - \tfrac{1-b^2}{4}v(x)x^{\frac{-3-b}{2}}) + bx(v'(x)x^{\frac{1-b}{2}} + \tfrac{1-b}{2}v(x)x^{\frac{-1-b}{2}}) + cv(x)x^{\frac{1-b}{2}} = 0$$

$$x^{\frac{5-b}{2}}v''(x) + x^{\frac{3-b}{2}}v'(x) = 0.$$

$$xv''(x) + v'(x) = 0.$$

Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w| + \ln|x|) = 0$$

$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-1} dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$$

Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^r \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^r \ln x$$

são soluções fundamentais da equação de Euler.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^r & x^r \ln x \\ r x^{r-1} & (1 + r \ln x) x^{r-1} \end{bmatrix} \\
&= x^{2r-1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r & (1 + r \ln x) \end{bmatrix} \\
&= x^{2r-1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0.
\end{aligned}$$

4.4. (a) $(x+3)z_1'' + (x+2)z_1' - z_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = 3x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)z_2'' + (x+2)z_2' - z_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)z_3'' + (x+2)z_3' - z_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $z_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = e^{-x}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x) y_1(x) = v(x) e^{-x}.$$

Como
$y'(x) = (v'(x) - v(x))e^{-x}$ e $y''(x) = (v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x}$,
então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,

$(x+3)y'' + xy' - y = 0$
$(x+3)(v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x} + (x+2)(v'(x) - v(x))e^{-x} - v(x)e^{-x} = 0.$
$(x+3)v''(x) + (-2(x+3) + (x+2))v'(x) = 0$
$(x+3)v''(x) - (x+4)v'(x) = 0$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$(x+3)w' - (x+4)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$\ln|w| = x + \ln(x+3) + \tilde{c}_1$$

$$\ln\left|\frac{w(x)}{x+3}\right| - x = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 e^x (x+3)$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int e^x (x+3)dx = c_1(x+2)e^x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = (x+2)e^x$ e uma segunda solução da equação

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = (x+2)e^x e^{-x} = x+2$$

Vamos ver que $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x+2$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^{-x} & x+2 \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix} = e^{-x}(3+x) \neq 0$, para $x \neq -3$

(c) Como $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x + 2$ são soluções fundamentais da equação a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2(x + 2),$$

Agora, como $y(1) = 1$, então substituindo $x = 1$ e $y = 1$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) \quad = \quad -c_1 e^{-x} + c_2$$

obtemos $-c_1 e^{-1} + c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1, \quad -c_1 e^{-1} + c_2 = 3$$

obtemos $c_1 = -2e$ e $c_2 = 1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) \quad = \quad -2e^{-x+1} + x + 2$$

4.5. $y'' + 2y' = 0$ tem solução geral $y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2$. Logo, $k_1 + k_2 = a, k_1 = -b/2$ e $k_2 = a + b/2$ e $y \to a + b/2$ quando $t \to +\infty$.

4.6. Se $0 < b < 2$ então as raízes da equação característica são

$$-b/2 \pm i\sqrt{4 - b^2}/2$$

e as soluções são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b/2)t} \cos \omega t + c_2 e^{(-b/2)t} \operatorname{sen} \omega t,$$

onde $\omega = \sqrt{4 - b^2}/2$. Logo, como $0 < b$, então $y \to 0$ quando $t \to +\infty$.

4.7. As raízes da equação característica são ± 2 e a solução geral é $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$. Então $c_1 = -c_2 = b/4$ e

$$y(t) = \frac{b}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) = 0$$

Como $b \neq 0$, então $e^{2t} = e^{-2t}$, ou seja, $e^{4t} = 1$ e $t = 0$.

4.8. A equação característica tem $1/2$ como única raiz. Assim, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}.$$

$y(0) = 2$ implica que $c_1 = 2$.

$$y'(t) = \frac{c_1}{2} e^{t/2} + c_2 (1 + \frac{t}{2}) e^{t/2}$$

$y'(0) = b$ implica que $c_1/2 + c_2 = b$. Assim, $c_2 = b - 1$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{(1/2)t}(2 + (b-1)t).$$

Logo, se $b \geq 1$, $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

4.9. A equação característica é

$$r^2 + 2b + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(b^2 - 1)$$

- Se $|b| > 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm \sqrt{b^2 - 1}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

  $$y(t) = c_1 e^{(-b - \sqrt{b^2-1})t} + c_2 e^{(-b + \sqrt{b^2-1})t}.$$

  Se $b > 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $b = \pm 1$ então a raíz da equação característica é $-b$ e as soluções da equação diferencial são da forma

  $$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}.$$

  Se $b = 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $-1 < b < 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm i\sqrt{1 - b^2}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

  $$y(t) = c_1 e^{-bt} \cos\left(\sqrt{1 - b^2}\, t\right) + c_2 e^{-bt} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1 - b^2}\, t\right).$$

  Se $0 < b < 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Logo, para $b > 0$, então $y(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

4.10. A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1 - \alpha)$$

(a) Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1}\, t) + c_2 e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\, t)$$

(b) Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

(c) Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

5. Equações não Homogêneas (página 73)

5.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

As raízes da equação característica são $r_1 = -3$ e $r_2 = -2$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

$y_p(x) = (A_0 + A_1 x)e^{-5x}$,
$y_p'(x) = A_1 e^{-5x} - 5(A_0 + A_1 x)e^{-5x} = (A_1 - 5A_0 - 5A_1 x)e^{-5x}$,
$y_p''(x) = -5A_1 e^{-5x} - 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1 x)e^{5x} = (-10A_1 + 25A_0 + 25A_1 x)e^{-5x}$.
Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos

$(-10A_1 + 25A_0 + 25A_1x) + 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1x) + 6(A_0 + A_1x) = x$
Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6A_0 & - & 5A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $A_0 = 5/36$ e $A_1 = 1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6}x\right) e^{-5x}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6}x\right) e^{-5x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x}$$

(b) A equação característica é

$$r^2 - 4r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8$$

As raízes da equação característica são $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1e^{2x}\cos(\sqrt{2}\,x) + c_2e^{2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

$y_p(x) = A_0 + A_1x$, $y_p'(x) = A_1$, $y_p''(x) = 0$. Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos

$$-4A_1 + 6(A_0 + A_1x) = 3x$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6A_0 & - & 4A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 3 \end{array}\right.$$

que tem solução $A_0 = 1/3$ e $A_1 = 1/2$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + c_1 e^{2x}\cos(\sqrt{2}\,x) + c_2 e^{2x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

(c) Eq. característica: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$.
Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\operatorname{sen}(2t)$

Vamos usar o princípio da Superposição para equações não homogêneas: $y_p^{(1)}(t) = t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)]$ é uma solução da equação $y'' + 4\,y = 2\operatorname{sen}(2t)$ e
$y_p^{(2)}(t) = Ct + D$ é uma solução da equação $y'' + 4\,y = t$. Logo $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$ é solução da equação $y'' + 4\,y = 2\operatorname{sen}(2t) + t$.
Vamos encontrar uma solução particular de $y'' + 4\,y = 2\operatorname{sen}(2t)$:

$y_p^{(1)}(t) = t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)]$

${y'}_p^{(1)}(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) + t[-2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)]$

${y''}_p^{(1)}(t) = (-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t)$

Substituindo-se na equação
$(-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t) + 4t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)] = 2\operatorname{sen}(2t)$
$[-4At + 4B + 4At]\cos(2t) + [-4Bt - 4A + 4Bt]\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(2t)$
Substituindo-se $t = 0$ e $t = \pi/4$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4B & = & 0 \\ -4A & = & 2 \end{array}\right.$$

Logo $A = -1/2, B = 0$ e $y_p^{(1)}(t) = \frac{1}{2}t\cos(2t)$.

Vamos encontrar uma solução particular de $y'' + 4\,y = t$:
$y_p^{(2)}(t) = Ct + D$,
$y'^{(2)}_p(t) = D$,
$y''^{(2)}_p(t) = 0$.
Substituindo-se na equação diferencial obtemos
$4C + 4Dt = t$
Substituindo-se $t = 0$, obtemos $4C = 0$. Derivando-se de substituindo-se $t = 0$ obtemos $4D = 1$.
Logo $C = 0, D = 1/4$ e $y_p^{(2)}(t) = \frac{1}{4}t$.
Sol. particular $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t) = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}t$.
Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}t$$

(d) Eq. característica: $r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}i$.
Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1\cos(\sqrt{2}t) + c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$
Sol. particular da forma $y_p(t) = Ae^t + B$.
$y'_p(t) = Ae^t$
$y''_p(t) = Ae^t$
Substituindo-se na equação
$Ae^t + 2(Ae^t + B) = e^t + 2$
$3Ae^t + 2B = e^t + 2$

$$\begin{cases} 3A &= 1 \\ 2B &= 2 \end{cases}$$

Obtemos $A = 1/3, B = 1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1\cos(\sqrt{2}t) + c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{3}e^t + 1$$

5.2. (a) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{-2\,t} + c_2\, e^{t}$$

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = (-2A_2)t^2 + (2A_2 - 2A_1)t + (2A_2 + A_1 - 2A_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2A_2 & & & & & = & 1 \\ 2A_2 & - & 2A_1 & & & = & 0 \\ 2A_2 & + & A_1 & - & 2A_0 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = -9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{-2\,t} + c_2\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução do PVI

$$y(t) = 7/12\, e^{-2\,t} + 5/3\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

(b) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, te^{-t}$$

Solução particular da equação não homogênea:

$$y_p(t) = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t$$

Substituindo-se na equação
$y_p'' + 2y_p' + y_p = (-3A + 4B)\cos 2t + (-4A - 3B)\,\mathrm{sen}\,2t = 3\,\mathrm{sen}\,2t$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -3A & + & 4B & = & 0 \\ -4A & - & 3B & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{12}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{array} \right]$$

$$y_p(t) = -\frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\,2t$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\,2t$$

Derivada da solução geral:
$y'(t) = -c_1\,e^{-t} + c_2\,(1-t)e^{-t} + \frac{24}{25}\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{18}{25}\cos 2t$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$:

$$c_1 = \frac{12}{25}, \quad c_2 = \frac{6}{5}$$

Solução do PVI:
$y(t) = \frac{12}{25}\,e^{-t} + \frac{6}{5}\,te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\,2t$

(c) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t$$

$$y_p(t) = 1/3\,e^{-t}$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t + 1/3\,e^{-t}$$

Solução do PVI

$$y(t) = -1/3\, e^{2\,t} + e^{2\,t} t + 1/3\, e^{-t}$$

(d) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(t/2)$$

Solução particular:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Substituindo-se na equação:
$2y_p'' + 2y_p' + y_p = (A_2)t^2 + (4A_2 + A_1)t + (4A_2 + 2A_1 + A_0) = t^2$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} A_2 & & & & & = & 1 \\ 4A_2 & + & A_1 & & & = & 0 \\ 4A_2 & + & 2A_1 & + & A_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

Derivada da solução geral:
$y'(t) = c_1 e^{-t/2}(-(1/2)\cos(t/2) - (1/2)\operatorname{sen}(t/2)) + c_2 e^{-t/2}(-(1/2)\operatorname{sen}(t/2) + (1/2)\cos(t/2)) + 2(t-2)$
Substituindo-se $t = 0, y = 0, y' = 0$:

$$c_1 = -4, \quad c_2 = 4$$

Solução do PVI:

$$y(t) = -4e^{-t/2} \cos(t/2) + 4e^{-t/2} \operatorname{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

5.3. (a) A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1 - \alpha)$$

i. Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1}\, t) + c_2 e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\, t)$$

ii. Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

iii. Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

(b) $y_p(t) = t[(A_0 + A_1 t)e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\, t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t} \cos(\sqrt{\alpha - 1}\, t)]$, se $\alpha > 1$.

6. Oscilações (página 103)

6.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5 = 0$$

que tem como raízes $r = \pm\sqrt{5}i$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

Para resolver o problema de valor inicial precisamos calcular a derivada da solução geral

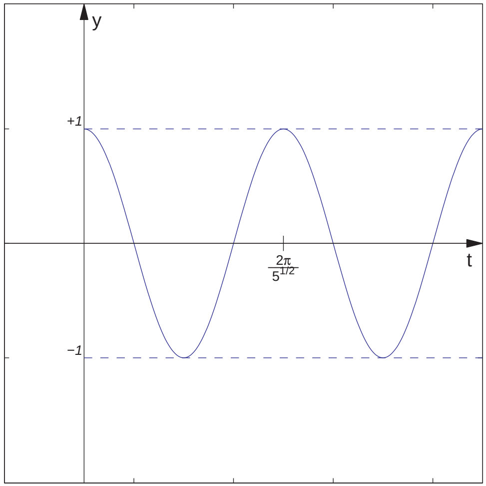
$$y'(t) = -\sqrt{5}\, c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\, t\right) + \sqrt{5}\, c_2 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$ e $y' = 0$ obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a $\sqrt{5}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\pi/\sqrt{5}$.

(b)



6.2. (a) Equação característica: $2r^2 + 3 = 0$
Raízes: $r = \pm\sqrt{3/2}\, i$
Solução geral: $y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$
Derivada da solução geral:
$y'(t) = -c_1\sqrt{3/2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\, t\right) + c_2\sqrt{3/2}\cos\left(\sqrt{3/2}\, t\right)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$, $y' = 0$:

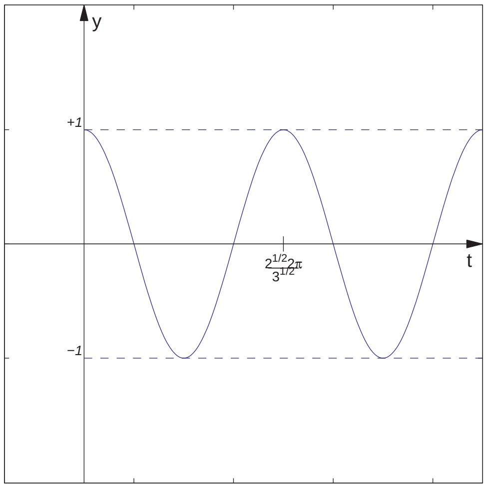
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\sqrt{2}\pi/\sqrt{3}$.

(b)



6.3.

$$2u'' + 3u = 3\cos(3t)$$

$$2r^2 + 3 = 0 \quad r = \pm i\sqrt{3/2}$$

Solução da equação homogênea

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + c_2 \,\text{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right)$$

$$u_p(t) = A\,\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t)$$

$$u_p'(t) = -3A\,\mathrm{sen}(3t) + 3B\,\cos(3t)$$

$$u_p''(t) = -9A\,\cos(3t) - 9B\,\mathrm{sen}(3t)$$

Substituindo-se $u_p(t)$, $u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação obtemos

$$-15A\cos(3t) - 15B\,\mathrm{sen}(3t) = 3\cos(3t)$$

$$\begin{cases} -15A & & = & 3 \\ & -15B & = & 0 \end{cases}$$

que tem solução $A = -1/5$ e $B = 0$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$u_p(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t)$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + c_1\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

$u'(t) = \frac{3}{5}\,\mathrm{sen}(3t) - \sqrt{3/2}c_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{3/2}c_2\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

$u(0) = u_0 = -\frac{1}{5} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_0 + \frac{1}{5}$

$$u'(0) = u_0' = \sqrt{3/2}c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \sqrt{2/3}u_0'$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + (u_0 + \frac{1}{5})\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{2/3}u_0'\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right).$

6.4.

$$2u'' + u' + \frac{1}{2}u = 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$u(t) = c_1 e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + c_2 e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$

$u'(t) = c_1\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right) + c_2\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right)$

$$u(0) = u_0 = c_1$$

$u'(0) = u_0' = -\frac{c_1}{4} + \frac{\sqrt{3}c_2}{4} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{4u_0' + u_0}{\sqrt{3}}$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$u(t) = u_0 e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{4u_0' + u_0}{\sqrt{3}}e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$

6.5. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 10i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A frequência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{100}} = 10.$$

O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \text{ segundos}$$

(a) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -4. \end{cases}$$

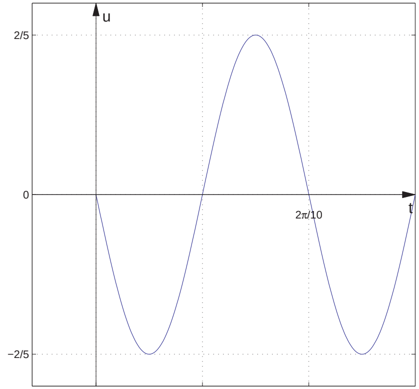
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 = c_1, \\ u'(0) = -4 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(10t)$$

A amplitude é igual a $2/5$.



(b) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 10. \end{cases}$$

$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 = c_1, \\ u'(0) = 10 = 10c_2. \end{cases}$$

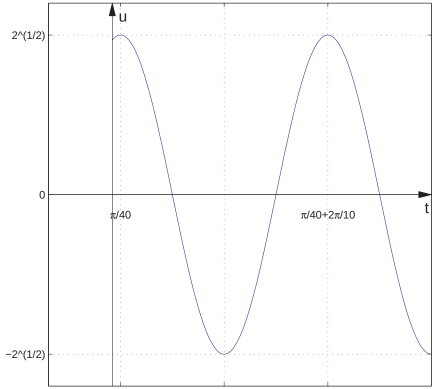
Logo $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}, \quad \delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \cos(10t) + \operatorname{sen}(10t) = \sqrt{2}\cos(10t - \pi/4)$$

A amplitude é igual a $\sqrt{2}$.



(c) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

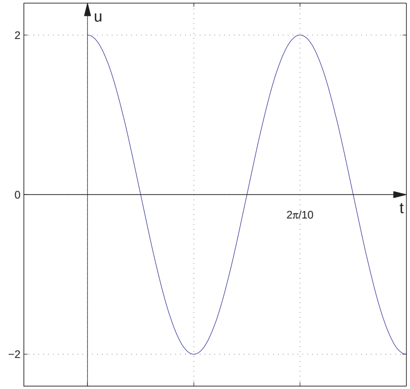
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2\cos(10t)$$

A amplitude é igual a 2.



6.6. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + \gamma u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + \gamma r + 10^4 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot 10^6$$

(a)
- Se $\gamma > 2 \cdot 10^3$ o sistema é super-amortecido.
- Se $\gamma = 2 \cdot 10^3$ o o sistema tem um amortecimento crítico.
- Se $\gamma < 2 \cdot 10^3$ o sistema é sub-amortecido

(b) Neste caso a constante de amortecimento é dada por

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{10^4}{10} = 10^3.$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^3 u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + 10^3 r + 10^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -5 \pm 5\sqrt{3}\, i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}\, t) + c_2 e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}\, t)$$

A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 10u' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'(t) \quad &= \quad e^{-5t}((5\sqrt{3}c_2 - 5c_1)\cos(5\sqrt{3}\, t) + \\ &\quad + (-5\sqrt{3} - 5c_2)\operatorname{sen}(5\sqrt{3}\, t)) \end{aligned}$$

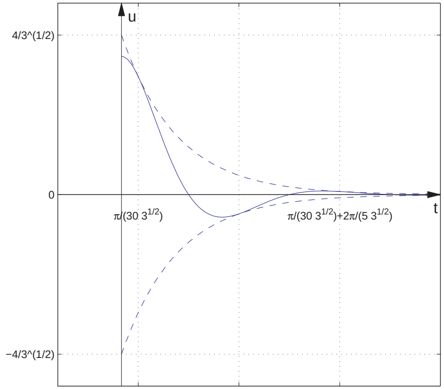
$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 5\sqrt{3}c_2 - 5c_1. \end{cases}$$

Logo $c_1 = 2$ e $c_2 = 2/\sqrt{3}$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\delta = \arccos \frac{c_1}{R} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

e a solução do problema de valor inicial é
$u(t) = 2e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}\, t) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}\, t) = \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}\, t - \pi/6)$
A quase frequência é igual a $5\sqrt{3}$ e o quase período é igual a $2\pi/5\sqrt{3}$.



6.7.

$$\begin{cases} 10^2u'' + 10^4u = 9600\cos(6t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \operatorname{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 3/2$ e $B_0 = 0$.

A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t) + \frac{3}{2}\cos(6t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = -3/2, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

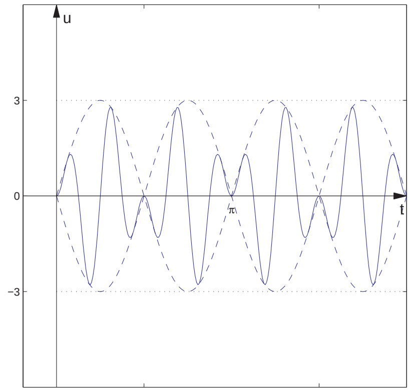
$$u(t) = \frac{3}{2}\left(\cos(6t) - \cos(10t)\right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = 3 \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(8t)$$



6.8.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 10^3 \cos(10t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = t(A_0 \cos(10t) + B_0 \operatorname{sen}(10t))$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 0$ e $B_0 = 1/2$.

A solução geral da equação é

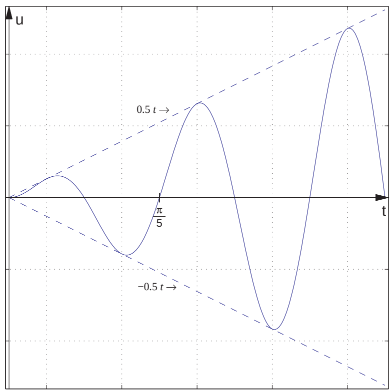
$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t) + \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{t}{2} \operatorname{sen}(10t)$$



6.9. Neste caso a constante de amortecimento é dada por

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{4200}{1} = 4200$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 4200u' + 10^4 u = 26000\cos(6t)$$

A solução estacionária é a solução particular da equação não homogênea

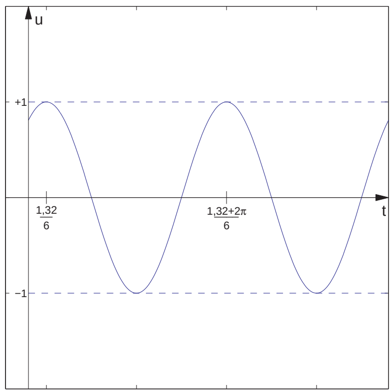
$$u_p(t) = A_0\cos(6t) + B_0\,\mathrm{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos

$$A_0 = 16/65, \quad B_0 = 63/65,$$

$$R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1, \quad \delta = \arccos\frac{A_0}{R} = \arccos\frac{16}{65} \approx 1,32.$$

$$u_p(t) = \frac{16}{65}\cos(6t) + \frac{63}{65}\,\mathrm{sen}(6t) = \cos(6t - 1,32)$$



6.10. (a) A solução da equação homogênea correspondente é
$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}\,t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{7}\,t}{2}$.
Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}\,t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{7}\,t}{2} + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

$$u_p'(t) = \omega\, \cos(\omega\, t)\; B - \omega\, \mathrm{sen}\,(\omega\, t)\; A$$

$$u_p''(t) = -\omega^2\, \mathrm{sen}\,(\omega\, t)\; B - \omega^2\, \cos(\omega\, t)\; A$$

Substituindo-se $u_p(t), u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos
$\left(\omega\, B - \omega^2\, A + 2\, A\right) \cos \omega t$
$- \left(\omega^2\, B - 2\, B + \omega\, A\right) \mathrm{sen}\, \omega t = \cos \omega t$
Substituindo-se $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \left(2 - \omega^2\right) A + \omega\, B & = & 1 \\ -\omega\, A + \left(2 - \omega^2\right) B & = & 0 \end{cases}$$

que tem solução

$$A = \frac{2 - \omega^2}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4}, \quad B = \frac{\omega}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4}.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}\,t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{7}\,t}{2} + \frac{(2 - \omega^2)}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4} \,\mathrm{sen}(\omega t).$$

(b) A solução estacionária é a solução particular da equação diferencial que é dada por

$$u_p(t) = \frac{(2-\omega^2)}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4}\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

(c) A amplitude é

$$R = R(\omega) = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{(\omega^4 - 3\,\omega^2 + 4)^{1/2}}$$

6.11. A solução geral da equação homogênea é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2\,\mathrm{sen}\,(\omega_0\, t)\,,$$

em que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(a) Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A\cos(\omega\, t) + B\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t)\,.$$

Derivando-se:

$$u_p'(t) = B\omega\,\cos(\omega\, t) - B\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t)$$

$$u_p''(t) = -B\omega^2\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t) - A\omega^2\,\cos(\omega\, t)\,.$$

Substituindo-se na equação diferencial:

$$\left(k - m\,\omega^2\right)\,\left(\mathrm{sen}\,(\omega\, t)\; B + \cos(\omega\, t)\; A\right) = F_0 \cos(\omega\, t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos

$$\begin{cases} \left(k - m\,\omega^2\right)\, A & = F_0 \\ \left(k - m\,\omega^2\right)\, B & = 0 \end{cases}$$

Assim
$$A = \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, B = 0.$$

Logo a solução geral é
$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

(b) Dividindo a equação diferencial por m e substituindo-se $k/m = \omega_0^2$ obtemos:
$$u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0\, t)$$

Vamos procurar uma solução particular da forma
$$u_p(t) = t\left[A \cos(\omega_0\, t) + B \operatorname{sen}(\omega_0\, t)\right].$$

Derivando-se:
$u_p'(t) =$
$(\omega_0\, t\, B + A) \cos(\omega_0\, t) + (B - \omega_0\, t\, A) \operatorname{sen}(\omega_0\, t)$
$u_p''(t) =$
$-\omega_0\ (\omega_0\, t\, B + 2\, A)\, (\operatorname{sen}(\omega_0\, t) - (2\, B - \omega_0\, t\, A))\cos(\omega_0\, t)\,.$
Substituindo-se na equação diferencial $u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0\, t)$:
$$2\,\omega_0\ (\cos(\omega_0\, t)\ B - \operatorname{sen}(\omega_0\, t)\ A) = F_0 \cos(\omega_0\, t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos
$$\begin{cases} 2\,\omega_0\, B & = F_0/m \\ -2\,\omega_0\, A & = 0 \end{cases}$$

Assim
$$A = 0, B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Logo a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

6.12. (a)

$$u(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\, m} + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + c_1 \cos(\omega_0 t)$$

$$u'(t) = -\frac{F_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\, m} - \omega_0 c_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$\frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\, m} + c_1$$

$$\omega_0 c_2$$

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

(b)

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$u'(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0 m} - \omega_0 c_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$
$+ \frac{F_0 t \cos(\omega_0 t)}{2m} + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t)$
Derivando-se e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

6.13. Seja $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t).$$

$$u_p'(t) = \omega\,\cos\left(\omega\,t\right)\,B - \omega\,\operatorname{sen}\left(\omega\,t\right)\,A$$

$$u_p''(t) = -\omega^2\,\operatorname{sen}\left(\omega\,t\right)\,B - \omega^2\,\cos\left(\omega\,t\right)\,A$$

Substituindo-se $u_p(t), u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos $\left(\omega\,B\,\gamma + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,m\,A\right)\cos\omega t$ $+ \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,m\,B - \omega\,A\,\gamma\right)\operatorname{sen}\omega t = F_0\cos\omega t$
Substituindo-se $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$ obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,m\,A + \omega\,\gamma\,B & = & F_0 \\ -\omega\,\gamma\,A + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\,m\,B & = & 0 \end{array}\right.$$

encontramos

$$A = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B = \frac{F_0\gamma\omega}{\Delta},$$

em que $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$. Logo, uma solução particular da equação diferencial é

$$u_p(t) = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}\cos(\omega t) + \frac{F_0\gamma\omega}{\Delta}\operatorname{sen}(\omega t).$$

6.14. (a)

$$10Q'' + 60Q' + \frac{1}{0,125 \cdot 10^{-1}} = 12$$

Dividindo-se por 10:

$$Q'' + 6Q' + 8Q = \frac{6}{5}$$

Equação característica: $r^2 + 6r + 8 = 0$
Raízes: $r = -2, -4$
Solução geral da equação homogênea: $Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$
Solução particular da forma $Q_p(t) = A_0$.

$$Q_p'(t) = Q_p''(t) = 0$$

Substituindo-se na equação:

$$8A_0 = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{3}{20}$$

Solução geral:

$$Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

Derivada da solução geral: $Q'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}$
Substituindo-se $t = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + \frac{3}{20} = 0 \\ -2c_1 - 4c_2 = 0 \end{array} \right. , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -3/10 \\ c_2 = 3/20 \end{array} \right.$$

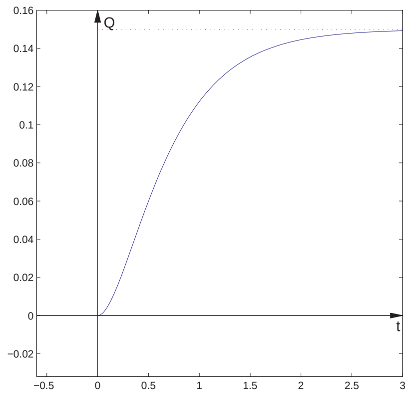
Solução do PVI:

$$Q(t) = -\frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{3}{20} e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

(b)

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = \frac{3}{20} \text{ C}$$

(c)



6.15. (a) Com a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ a equação diferencial se torna

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

que tem solução geral

$$\theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

$$\theta_0 = \theta(0) = c_1$$

$$0 = \theta'(0) = c_2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Logo a solução do PVI é

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

(b) A frequência é $\sqrt{\frac{g}{l}}$, o período é $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ e a amplitude é θ_0.

2

Séries de Fourier

Neste capítulo estudaremos as séries de Fourier.

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[a,b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. De forma análoga uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua por partes em todo intervalo $[a,b]$. Consideramos duas funções contínuas por partes iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes a **série de Fourier** da função f é definida por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \tag{2.1}$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1,2,\ldots \tag{2.3}$$

2.1 Teorema de Fourier

O teorema seguinte, cuja demonstração será realizada somente no final desta seção, afirma que para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes, cuja derivada f' também é contínua por partes a série de Fourier de f converge.

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

As funções $\cos \frac{n\pi t}{L}$ e $\operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$ são periódicas com período (fundamental=menor período) igual a $\frac{2L}{n}$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$ Assim $2L$ é período comum a todas elas. Logo a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T = 2L$. O termo constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt$$

representa a média da função f no intervalo $[-L, L]$ e está escrito desta forma ($\frac{a_0}{2}$ e não simplesmente a_0) somente para que a fórmula que vale para os coeficientes dos cossenos da série de Fourier fique valendo também para o termo constante ($n = 0$).

Como a série de Fourier é periódica de período $2L$ ela pode ser entendida como a série de Fourier da extensão periódica de f, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad \text{se } t \in [-L, L] \quad \text{e é tal que} \quad \tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t).$$

Ou seja, a série de Fourier de f é a mesma série de Fourier de $\tilde{f}$ que é a função que é periódica de período $2L$ e que coincide com f no intervalo $[-L, L]$. Assim temos a versão do Teorema de Fourier para funções periódicas.

Teorema 2.2 (Fourier para Funções Periódicas). *Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **periódica de período** $2L$, contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \textit{para } t \in \mathbb{R} \textit{ em que } f \textit{ é contínua.}$$

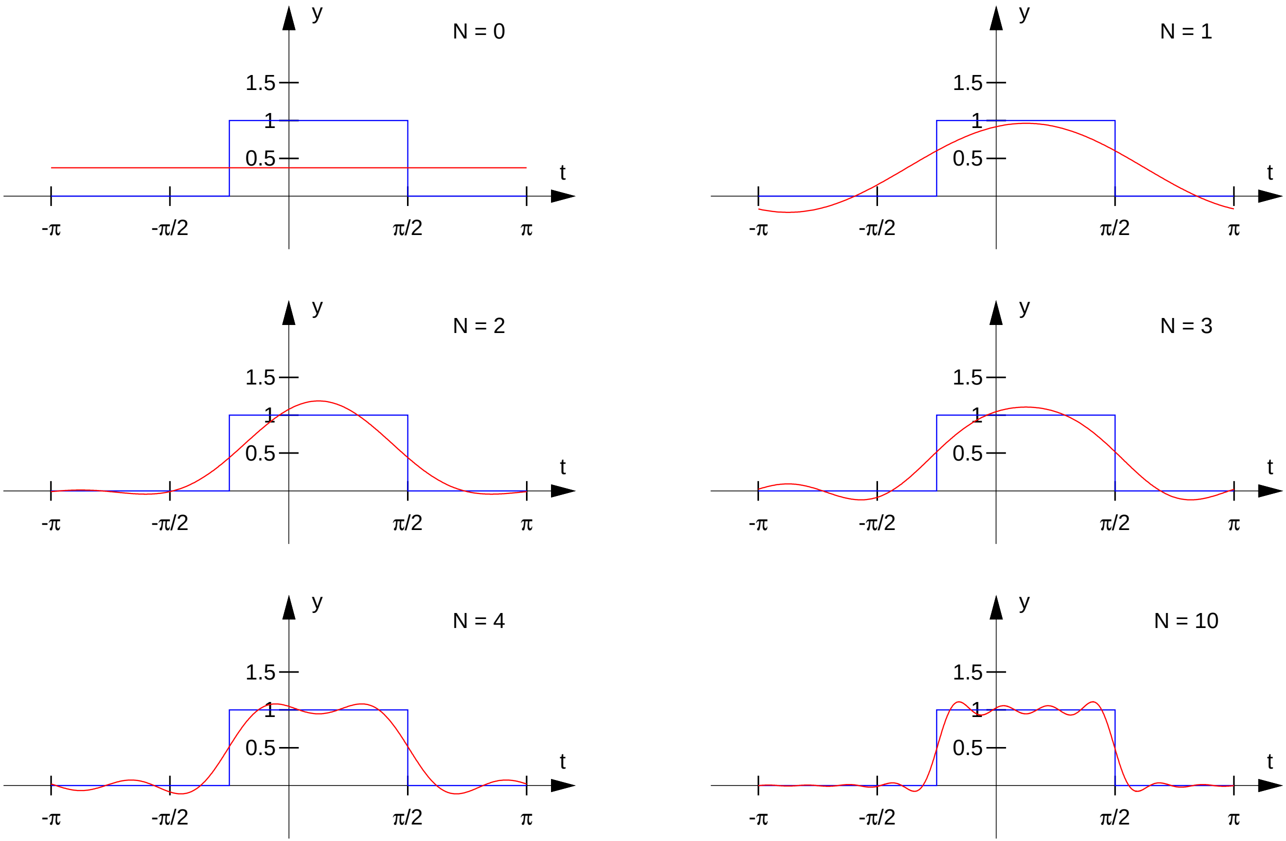


Figura 2.1 – Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 2.1, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

Exemplo 2.1. Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f^{(0)}_{c,d}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{n\pi t}{L}$ obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} dt = d - c, \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{d-c}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi d - \operatorname{sen} n\pi c}{n}\cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi c - \cos n\pi d}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Vamos calcular a série de Fourier da função $u_0 : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por $u_0(t) = 1$. Usando o exemplo anterior vemos que a série de Fourier da função $u_0 = f^{(0)}_{-1,1}$ é

$$S_{u_0}(t) = 1 = u_0(t).$$

que é a própria função.

Exemplo 2.3. Vamos calcular a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

Usando a notação do Exemplo 2.1, podemos escrever

$$f(t) = f^{(0)}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(t), \quad \text{com } L = \pi.$$

Portanto usando os coeficientes que obtivemos para $f^{(0)}_{c,d}$ no Exemplo 2.1, com $c = -\dfrac{1}{4}$ e $d = \dfrac{1}{2}$ temos que

$$S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que f pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt,$$

para $t \neq -\dfrac{\pi}{4}$ e $t \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Exemplo 2.4. Vamos calcular a série de Fourier da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{e tal que} \quad g(t + 2\pi) = g(t)$$

Esta função é a extensão periódica da função $f = f^{(0)}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}$ com período igual a 2π. Logo a sua série de Fourier é a mesma da função do Exemplo anterior

$$S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que g pode ser representada por sua série de Fourier

$$g(t) = S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt,$$

para $t \neq -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ e $t \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

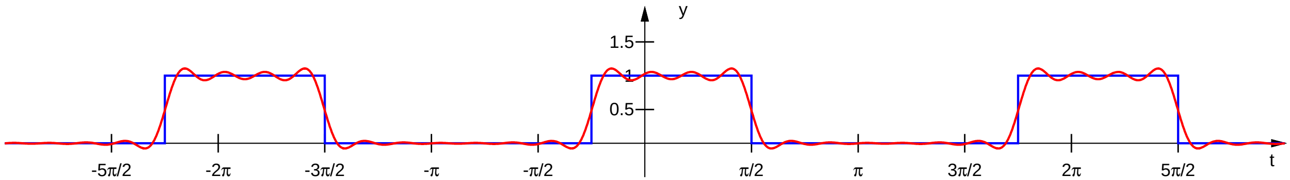


Figura 2.2 – Soma parcial da série de Fourier da função do Exemplo 2.4, com $N = 10$

Exemplo 2.5. Seja L um número real maior que zero. Seja m um inteiro positivo. Seja

$$u_m : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$u_m(t) = \cos \frac{m\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos msds = 0,$$

Vamos calcular os coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2 \ldots$ Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$, para $n > 0$ e $n \neq m$ temos que,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \cos ns \, ds$$

Usando o fato de que $\cos ms \cos ns = \frac{1}{2}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$, temos então que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds \\ &= \frac{1}{2\pi(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(m-n)} \operatorname{sen}(m-n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

e para $n = m$,

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ms \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ms] ds = 1.$$

Aqui usamos o fato de que $\cos^2 ms = \frac{1}{2}[1 + \cos 2ms]$.

Vamos calcular os coeficientes b_n, para $n = 1, 2 \ldots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \ \operatorname{sen} ns \, ds \end{aligned}$$

Usando o fato de $\cos ms \operatorname{sen} ns = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]$, temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0$$

Nestas integrais usamos relações que podem ser obtidas somando-se ou subtraindo-se duas das relações abaixo.

$$\begin{aligned} \cos(m+n)s &= \cos ms \cos ns - \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \cos(m-n)s &= \cos ms \cos ns + \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m+n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns + \cos ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m-n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns - \cos ms \operatorname{sen} ns. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de $u_m : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{u_m}(t) = \cos\frac{m\pi t}{L} = u_m(t), \text{ para } m = 1, 2 \ldots$$

Exemplo 2.6. Seja L um número real maior que zero. Seja m um inteiro positivo. Seja

$$v_m : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$v_m(t) = \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Vamos calcular os coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2 \ldots$ Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms\, ds = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$, temos que para $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} \cos\frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms\, \cos ns ds \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen} ms\, \cos ns = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]$ obtemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0$$

Vamos calcular os coeficientes b_n, para $n = 1, 2 \ldots$ Para $n \neq m$ temos que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms\, \operatorname{sen} ns\, ds$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen} ms\, \operatorname{sen} ns = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$ temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0$$

E para $n = m$,

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 ms\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ms] ds = 1$$

Aqui usamos o fato de que $\text{sen}^2\, ms = \frac{1}{2}[1 - \cos 2ms]$.

Assim a série de Fourier de $v_m : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{v_m}(t) = \cos \frac{m\pi t}{L} = v_m(t), \text{ para } m = 1, 2 \ldots$$

Com os coeficientes das funções destes exemplos podemos determinar os coeficientes das séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

Proposição 2.3. *Sejam* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{R}$. *Se*

$$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \; b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt,$$

$$a_n(g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \; b_n(g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt,$$

então para quaisquer números α *e* β,

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha a_n(f, L) + \beta a_n(g, L) \quad e \quad b_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha b_n(f, L) + \beta b_n(g, L).$$

Demonstração.

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (\alpha f(t) + \beta g(t))\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt + \beta\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha a_n(f, L) + \beta a_n(g, L).$$

$$b_n(\alpha f + \beta g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt + \beta\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha b_n(f, L) + \beta b_n(g, L).$$

■

Exemplo 2.7. Seja L um número real maior que zero. Seja n um inteiro positivo. Seja

$$f : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$f(t) = 3 - 2\cos\frac{15\pi t}{L} + 4\,\text{sen}\,\frac{31\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Usando a Proposição 2.3 temos que os coeficientes da série de Fourier de f são dados por

$$a_n(f, L) = 3a_n(1, L) - 2a_n(\cos\frac{15\pi t}{L}, L) + 4a_n(\text{sen}\,\frac{31\pi t}{L}, L) = 3a_n(u_0, L) - 2a_n(u_{15}, L) + 4a_n(v_{31}, L)$$

$$b_n(f, L) = 3b_n(1, L) - 2b_n(\cos\frac{15\pi t}{L}, L) + 4b_n(\text{sen}\,\frac{31\pi t}{L}, L) = 3b_n(u_0, L) - 2b_n(u_{15}, L) + 4b_n(v_{31}, L)$$

Como já calculamos estes coeficientes nos exemplos anteriores e obtivemos que

$$a_n(u_0, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad b_n(u_0, L) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

$$a_n(u_{15}, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 15, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad b_n(u_{15}, L) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

$$a_n(v_{31}) = 0, \text{ para } n = 1, 2, \ldots, \qquad b_n(v_{31}, L) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 31, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então temos que a série de Fourier da função deste exemplo é ela própria:

$$S_f(t) = 3 - 2\cos\frac{15\pi t}{L} + 4\,\text{sen}\,\frac{31\pi t}{L} = f(t).$$

Exemplo 2.8. Considere a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f^{(1)}_{cd}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\,dt = \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\,ds \\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \mathrm{sen}\, s + \cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\ \mathrm{sen}\, s\,ds \\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{L(d^2 - c^2)}{4} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(s\ \mathrm{sen}\, s + \cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Lembramos que uma função $h : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é **par**, se

$$h(-t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L]$$

e é **ímpar**, se

$$h(-t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [-L, L].$$

Lembramos também que se $h : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} h(t)dt = 0,$$

e que se $h : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} h(t)dt = 2\int_{0}^{L} h(t)dt.$$

Já vimos que se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Teorema 2.1 ela pode ser representada por sua série de Fourier

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.$$

Se a função f é par, então $f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$ é ímpar e $f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}$ é par (verifique!). Logo os coeficientes da série de Fourier de f são dados por:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão par de f. E assim temos o seguinte resultado.

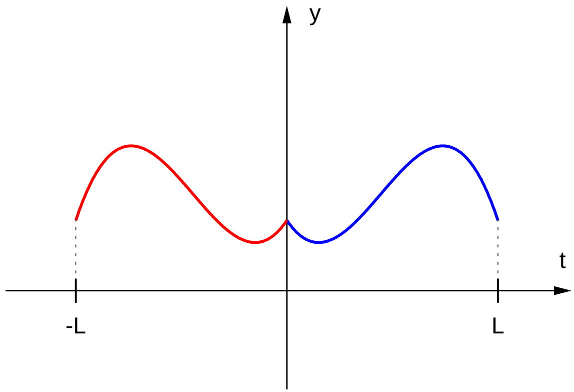


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.4. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* ***série de Fourier de cossenos*** *de f*

$$Sc_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad \textit{para } t \in (0, L) \textit{ em que } f \textit{ é contínua.}$$

Analogamente, se a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}$ é par e $f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}$ é ímpar (verifique!) e assim os coeficientes da série de Fourier de f são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem ímpar no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão ímpar de f. E assim temos o seguinte resultado.

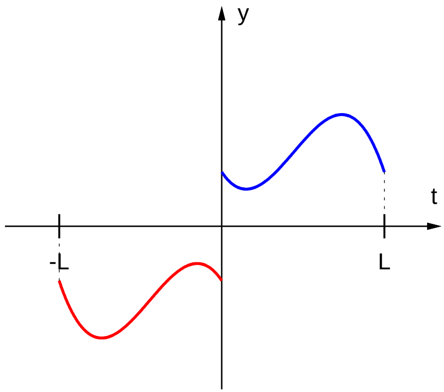


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.5. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A **série de Fourier de senos** de f*

$$Ss_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.9. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = 1$, para $0 \le t \le 1$. A série de cossenos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 202.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$\begin{aligned} Sc_f(t) &= 1, \\ Ss_f(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}. \end{aligned}$$

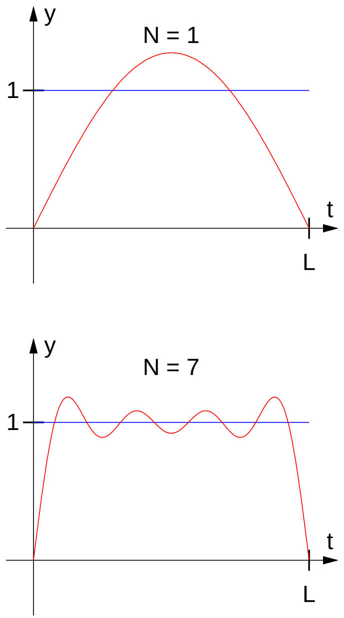


Figura 2.5 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 1$ para $t \in [0, L]$ e as somas parciais da série de Fourier de senos de f, para $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos. Pelo Corolário 2.5 temos que

$$f(t) = Ss_f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\,\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L},\ \text{para } t \in (0, L).$$

Exemplo 2.10. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$, para $0 \leq t \leq L$. A série de cossenos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 202.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2a_0(f^{(1)}_{0,1}, L) = L,\\
a_n &= 2a_n(f^{(1)}_{0,1}, L) = \frac{2L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2L}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1),\\
b_n &= 2b_n(f^{(1)}_{0,1}, L) = \frac{2L}{n\pi}(-\cos n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}2L}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sc_f(t) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{L},\\
Ss_f(t) &= \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

Assim os termos de índice par da série de cossenos (exceção de a_0) são nulos. Pelo Corolário 2.4 e pelo Corolário 2.5 temos que f pode ser representada por sua série de cossenos e por sua série de senos de Fourier

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{L},\\
&= \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},
\end{aligned}$$

para $t \in (0, L)$.

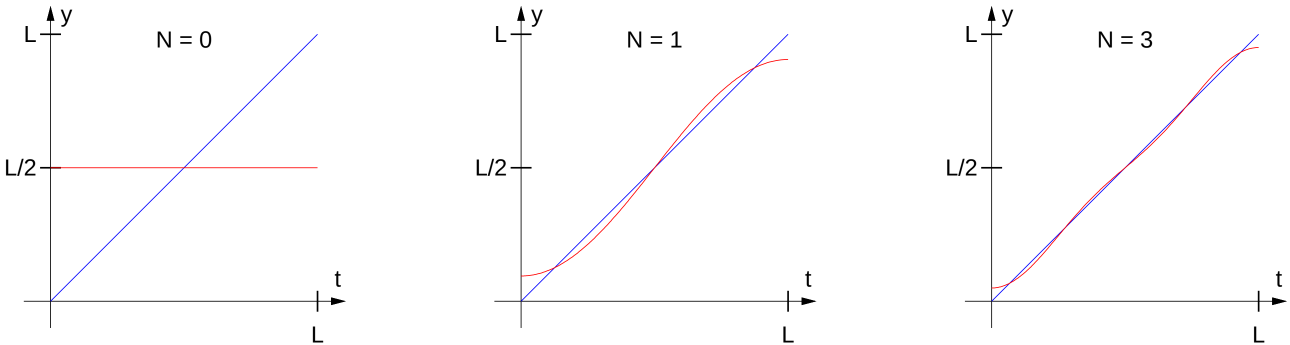


Figura 2.6 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$ para $t \in [0, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para $N = 0, 1, 3$

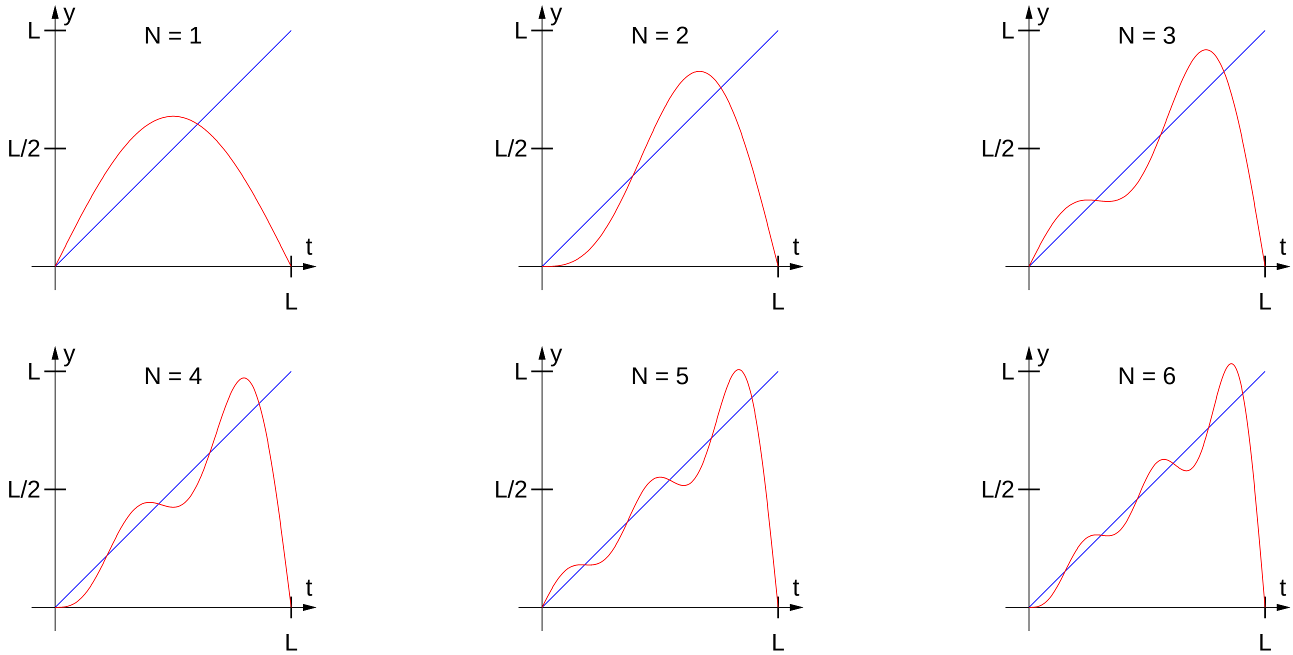


Figura 2.7 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$ para $t \in [0, L]$ e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de f, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

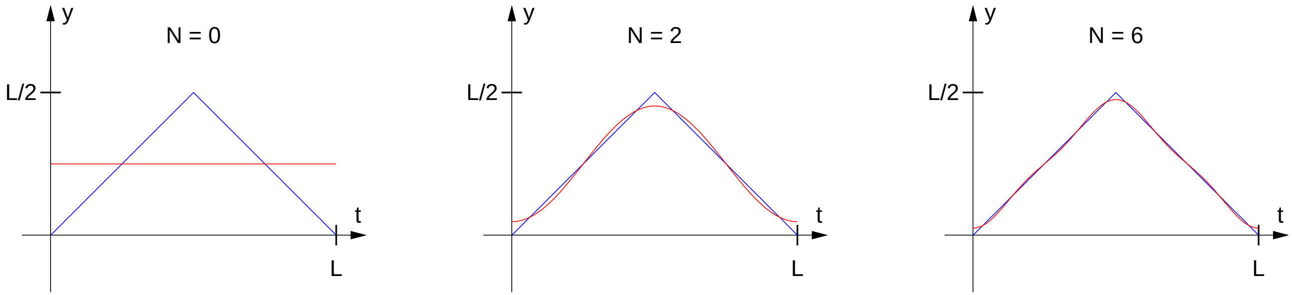


Figura 2.8 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = L - t$ se $t \in [L/2, L]$ e somas parciais da série de Fourier de cossenos para $N = 0, 2, 6$

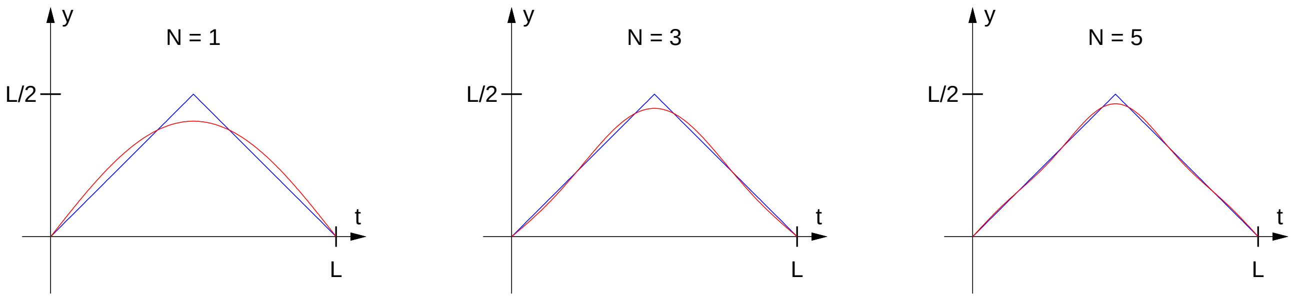


Figura 2.9 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = L - t$ se $t \in [L/2, L]$ e somas parciais da série de Fourier de senos para $N = 1, 3, 5$

Exemplo 2.11. Considere a função $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(t)=\begin{cases} t, & \text{se } 0\le t\le L/2\\ L-t, & \text{se } L/2<t\le L\end{cases}$$

A série de cossenos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L,L]$ de forma que ela seja par e a série de senos é obtida estendo-se f ao intervalo $[-L,L]$ de forma que ela seja ímpar.
Usando a tabela na página 202 os coeficientes a_n e b_n podem ser calculados como

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = 2\left(a_0(f^{(1)}_{0,1/2},L)+La_0(f^{(0)}_{1/2,1},L)-a_0(f^{(1)}_{1/2,1},L)\right)=\frac{L}{2}\\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\
&= 2\left(a_n(f^{(1)}_{0,1/2},L)+La_n(f^{(0)}_{1/2,1},L)-a_n(f^{(1)}_{1/2,1},L)\right)\\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\,s+\cos s)\Big|_0^{n\pi/2}+\frac{2L}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}-\frac{2L}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\,s+\cos s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2L}{n^2\pi^2}-\frac{2L}{n^2\pi^2}\cos n\pi\\
&= 2L\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n}{n^2\pi^2},\ n=1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$a_{2k+1}=0$$

$$a_{2k}=2L\frac{2\cos k\pi-2}{(2k)^2\pi^2}=L\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi^2}.$$

os termos de índice par podem ainda ser separados:

$$a_{2\cdot 2l}=0$$

$$a_{2(2l+1)} = L\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{2L}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx \\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + Lb_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1})\right) \\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{2L}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4L\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Como a função f é contínua com sua derivada f' também contínua, pelo Corolário 2.4, ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos e pelo Corolário

2.5 por sua série de Fourier de senos :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{L}{4} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{L} \\
&= \frac{L}{4} - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2(2n+1)\pi t}{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L}
\end{aligned}
$$

Vários coeficientes são nulos e não é por acaso. Sempre que um coeficiente é calculado por uma integral de 0 a L de uma função $h(t)$ que é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$, ou seja, tal que $h(t) = -h(L-t)$, para $t \in [0, L/2]$, o seu valor é igual a zero (verifique!). No exemplo anterior isto ocorreu com os coeficientes de índice ímpar da série de cossenos e com os de índice par da série de senos (verifique!). Isto é análogo ao que ocorre com funções ímpares sendo integradas em intervalos simétricos.

2.1.2 Demonstração do Teorema sobre a Convergência da Série de Fourier

Demonstração do Teorema 2.1 na página 164. Vamos mostrar que a soma parcial da série tende a $f(x)$, se $x \in (-L, L)$ é um ponto de continuidade de f. Substituindo-se os coeficientes a_n e b_n na soma parcial da série,

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \\ &+ \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N}\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt + \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt \right) = \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L} + \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L})\right) f(t)dt = \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi(t-x)}{L}\right) f(t)dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mas

$$\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}\frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})s - \operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})s\right) = 2\operatorname{sen}\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{N}\cos ns$$

Logo

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos ns = \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})s}{2\operatorname{sen}\frac{s}{2}}.$$

Substituindo-se s por $\dfrac{\pi(t-x)}{L}$ obtemos

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi(t-x)}{L}=\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi(t-x)}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi(t-x)}{2L}}. \tag{2.5}$$

Substituindo-se (2.5) em (2.4) obtemos

$$S_N(x)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi(t-x)}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi(t-x)}{2L}}f(t)dt$$

Substituindo-se f pela sua extensão periódica de período $2L$, $\tilde{f}$, usando o fato de que neste caso as integrais anteriores podem ser calculadas de $-L+x$ até $L+x$ e fazendo a mudança de variáveis $s=t-x$ obtemos

$$S_N(x)=\frac{1}{L}\int_{-L+x}^{L+x}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi(t-x)}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi(t-x)}{2L}}\tilde{f}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}\tilde{f}(x+s)ds \tag{2.6}$$

Tomando-se $f(x)=1$ em (2.6) obtemos

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}=1. \tag{2.7}$$

Assim de (2.6) e (2.7) temos que

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \left(\tilde{f}(x+s) - f(x)\right) \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\dfrac{\pi s}{L}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}} ds =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\dfrac{s}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}} \operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\frac{\pi s}{L} ds. \quad (2.8)$$

Como $\tilde{f}$ é contínua por partes com derivada $\tilde{f}'$ também contínua por partes, então para $x \in (-L, L)$ tal que $f(x)$ é contínua temos que a função

$$g(s) = \frac{\tilde{f}(x+s) - \tilde{f}(x)}{s} \frac{\dfrac{s}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2L}}$$

é contínua por partes. Pois, pelo Teorema do valor médio, se f' é contínua em x, então g é contínua em $s = 0$. Se f não é contínua em x, então os limites laterais de $f'(\xi)$ quando ξ tende a zero existem. Assim segue do lema que apresentaremos a seguir que

$$\lim_{N\to\infty}(S_N(x) - f(x)) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(s)\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\frac{\pi s}{L} ds = 0.$$

■

Lema 2.6 (Riemann-Lebesgue). *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes, então*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(s)\operatorname{sen}\lambda s\, ds = 0$$

Demonstração. Seja

$$I(\lambda) = \int_a^b g(s) \,\text{sen}\, \lambda s \, ds \tag{2.9}$$

Vamos supor inicialmente que g seja contínua. Fazendo-se a mudança de variáveis $s = t + \frac{\pi}{\lambda}$ obtemos

$$I(\lambda) = -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t + \frac{\pi}{\lambda}) \,\text{sen}\, \lambda t \, dt \tag{2.10}$$

Seja $M = \max\limits_{s\in[a-\pi,b]} g(s)$. Somando-se (2.9) e (2.10) e calculando-se o módulo obtemos que

$$|2I(\lambda)| = \left| \int_a^b g(s) \,\text{sen}\, \lambda s \, ds - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(s + \frac{\pi}{\lambda}) \,\text{sen}\, \lambda s \, ds \right| =$$

$$\leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} |g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds$$

$$\leq \frac{2M\pi}{\lambda} + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} |g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| \, ds < 2\epsilon,$$

para $\lambda > \frac{2M\pi}{\epsilon}$ tal que $|g(s) - g(s + \frac{\pi}{\lambda})| < \frac{\epsilon}{b-a}$, para todo $s \in [a, b]$. O caso geral segue da aplicação do argumento acima para cada parte de g que é contínua. ■

2.1.3 Limites e Derivação de Séries de Funções

Teorema 2.7. *Sejam $u_1, u_2 \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Seja $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Se

$$\left|\frac{du_n}{dx}(x)\right| \leq a_n, \quad \text{para todo } x \in [a,b], \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então

$$\frac{du}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x), \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Demonstração. Seja $x \in [a,b]$. Seja $\epsilon > 0$. Sejam

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dx}(x),$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x),$$

$$q_N(x,h) = \frac{S_N(x+h) - S_N(x)}{h},$$

$$q(x,h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M, N > N_0$ implica $\sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}$. Então

$$|S'_N(x) - S'_M(x)| = \left|\sum_{n=M}^{N} \frac{du_n}{dx}(x)\right| \leq \sum_{n=M}^{N} \left|\frac{du_n}{dx}(x)\right| \leq \sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}, \tag{2.11}$$

para todo $x \in [a, b]$. Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|S'_N(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.12}$$

Sejam $M, N > N_0$. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a $S_N(x) - S_M(x)$ e por (2.11) obtemos que existe ξ entre x e $x + h$ tal que

$$|q_N(x, h) - q_M(x, h)| = |S'_N(\xi) - S'_M(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|q_N(x, h) - q(x, h)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } h \text{ tal que } x + h \in [a, b]. \tag{2.13}$$

Como $\lim_{h\to 0} q_N(x, h) = S'_N(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta$ implica que

$$|q_N(x, h) - S'_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.14}$$

De (2.13), (2.14) e (2.12) segue-se que

$$\begin{aligned} &|q(x, h) - g(x)| \\ &\quad \leq |q(x, h) - q_N(x, h)| + |q_N(x, h) - S'_N(x)| + |S'_N(x) - g(x)| \\ &\quad < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

■

Teorema 2.8. *Sejam* $u_1, u_2 \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Seja* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Se

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \text{para todo } x \in [a,b], \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x),$$

para $x_0 \in [a,b]$ *tal que existam* $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$, *para* $n = 1, 2 \ldots$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Sejam

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

$$L_n = \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

$$\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} L_n$$

Existe $L = \sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, pois $|L_n| \leq a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
Logo existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $N > N_0$ temos que

$$|L - \tilde{S}_N| = |L - \sum_{n=1}^{N} L_n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.15}$$

Também existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M, N > N_1$ implica $\sum\limits_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}$. Então

$$|S_N(x) - S_M(x)| = \left|\sum_{n=M}^{N} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=M}^{N} |u_n(x)| \leq \sum_{n=M}^{N} a_n < \frac{\epsilon}{3}, \tag{2.16}$$

para todo $x \in [a, b]$. Deixando N fixo e passando ao limite quando M tende a infinito obtemos

$$|S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \tag{2.17}$$

Seja $N > \max\{N_0, N_1\}$. Como $\lim\limits_{x \to x_0} S_N(x) = \tilde{S}_N$, então existe $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$,

$$|\tilde{S}_N - S_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.18}$$

De (2.15), (2.18) e (2.16) segue-se que

$$|L - u(x)| \leq |L - \tilde{S}_N| + |\tilde{S}_N - S_N(x)| + |S_N(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

■

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \le c < d \le 1$	$a_n(f, L) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos\dfrac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi t}{L}dt$
$f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(0)}_{c,d}, L) = d - c$ $a_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\text{sen}\, s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(1)}_{c,d}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \text{sen}\, s + \cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\, s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(2)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(2)}_{c,d}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\text{sen}\, s + 2s\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\text{sen}\, s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

Exercícios (respostas na página 251)

1.1. Mostre que uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.2. Mostre que uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar, então os coeficientes da sua série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.3. (a) Mostre que se uma função $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$, ou seja, se

$$h(L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então

$$\int_0^L h(t)\,dt = 0.$$

(b) Mostre que se $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = \frac{L}{2}$, ou seja, tal que

$$f(t) = f(L - t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então os coeficientes de índice par da série de senos de Fourier são nulos, ou seja, $b_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, 3 \ldots$ (Sugestão: use o item anterior.)

(c) Mostre que se $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (\frac{L}{2}, 0)$, ou seja, tal que

$$f(t) = -f(L-t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{L}{2}],$$

então os coeficientes de índice par da série de cossenos de Fourier são nulos, $a_{2k} = 0$, para $k = 0, 1, 2. \ldots$ (Sugestão: use o item (a).)

1.4. Determine a série de Fourier da função $f_{c,d}^{(2)} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

1.5. Determine as séries de Fourier das funções $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

(a) $f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -L \leq t < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq t \leq L, \end{cases}$

(b) $f(t) = L/2 - |t|$

1.6. Determine a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = L/2 - |t - L/2|, \quad \text{se } -L/2 < t < 3L/2 \text{ e } f(t + 2L) = f(t).$$

1.7. Determine séries de Fourier de senos e de cossenos da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t(L-t), \quad \text{para } t \in [0, L].$$

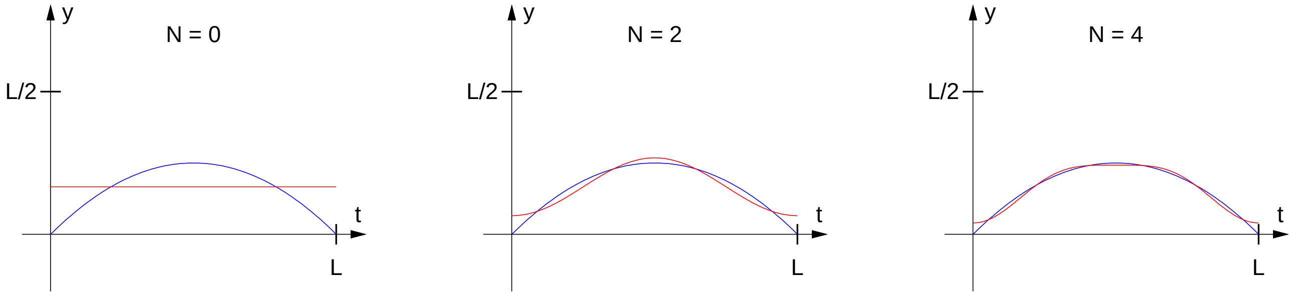


Figura 2.10 – Somas parciais da série de Fourier de cossenos da função $f(t) = t(L - t)$, para $t \in [0, L]$, para $N = 0, 2, 4$.

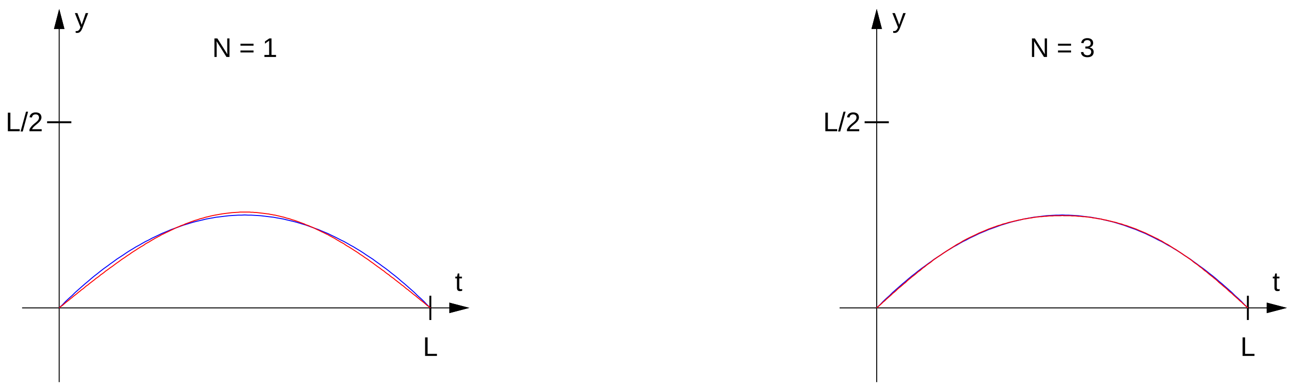


Figura 2.11 – Somas parciais da série de Fourier de senos da função $f(t) = t(L - t)$, para $t \in [0, L]$, para $N = 1, 3$

1.8. Determine as séries de Fourier de senos e de cossenos das funções $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ 1, & \text{se } L/2 \leq t \leq L, \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \leq t < 3L/4 \\ L - t, & \text{se } 3L/4 \leq t \leq L \end{cases}$

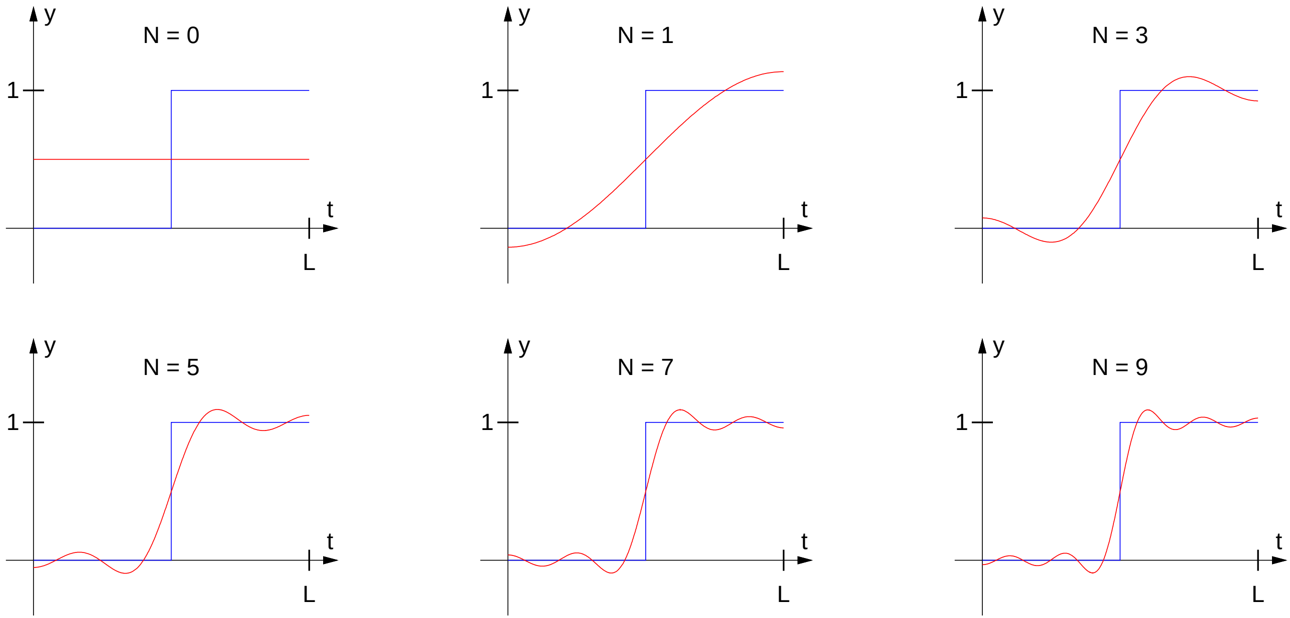


Figura 2.12 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 0, 1, 3, 5, 7, 9$.

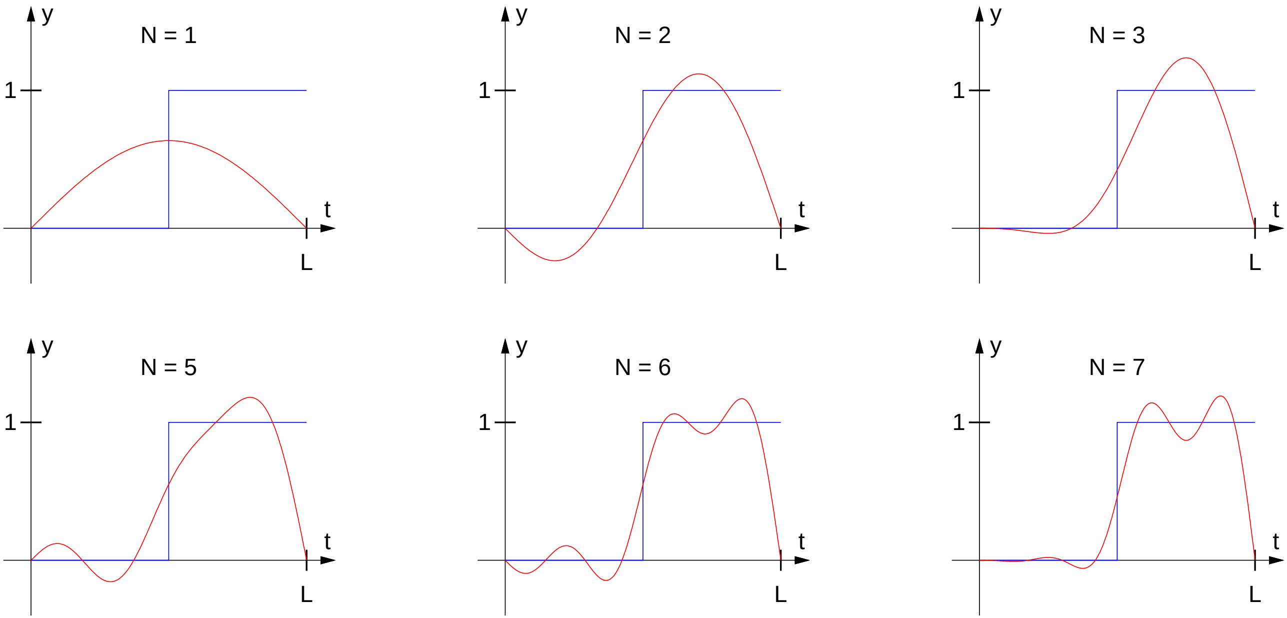


Figura 2.13 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

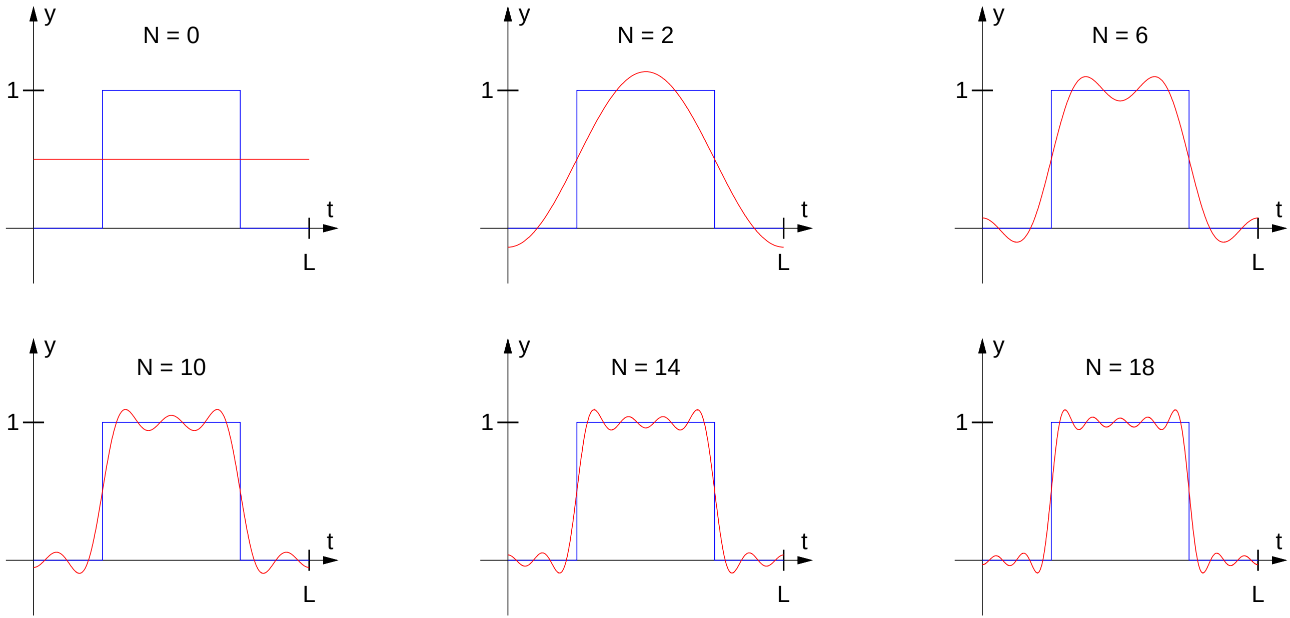


Figura 2.14 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 0, 2, 6, 10, 14, 18$.

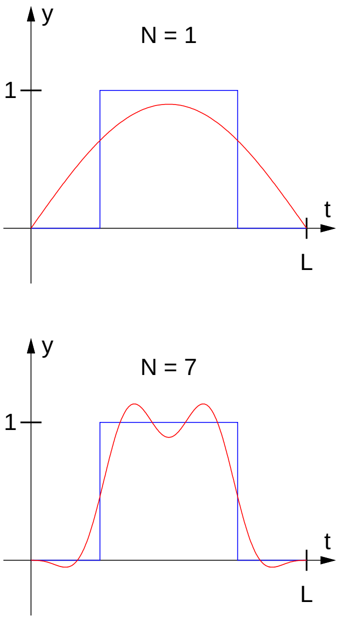


Figura 2.15 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

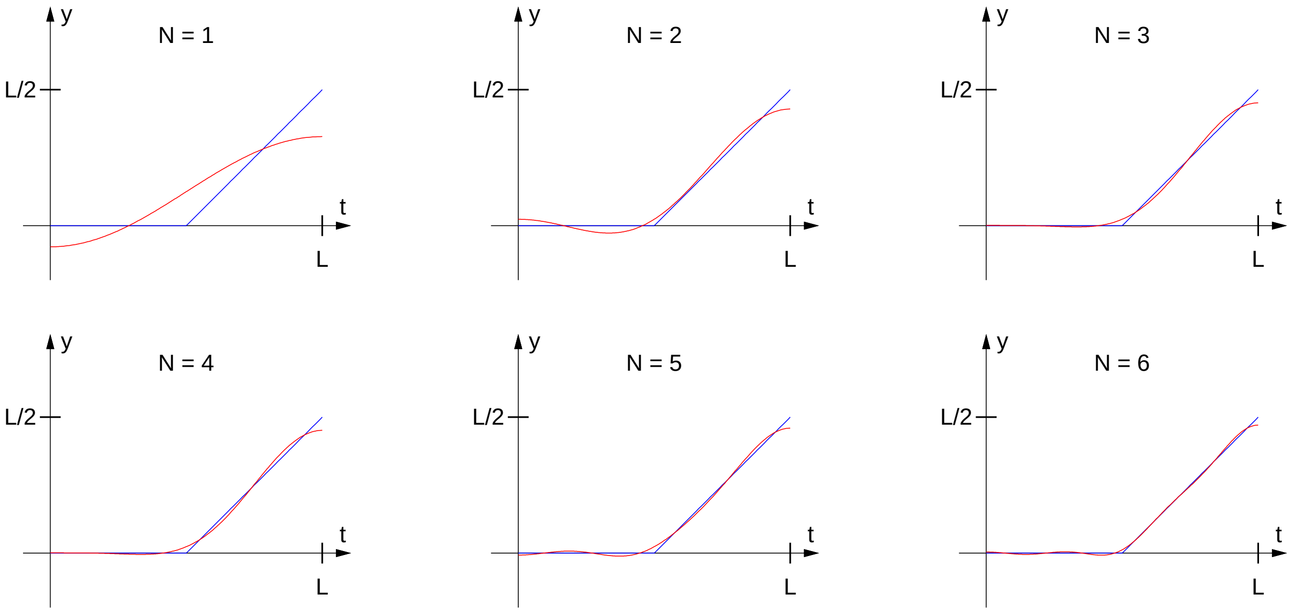


Figura 2.16 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

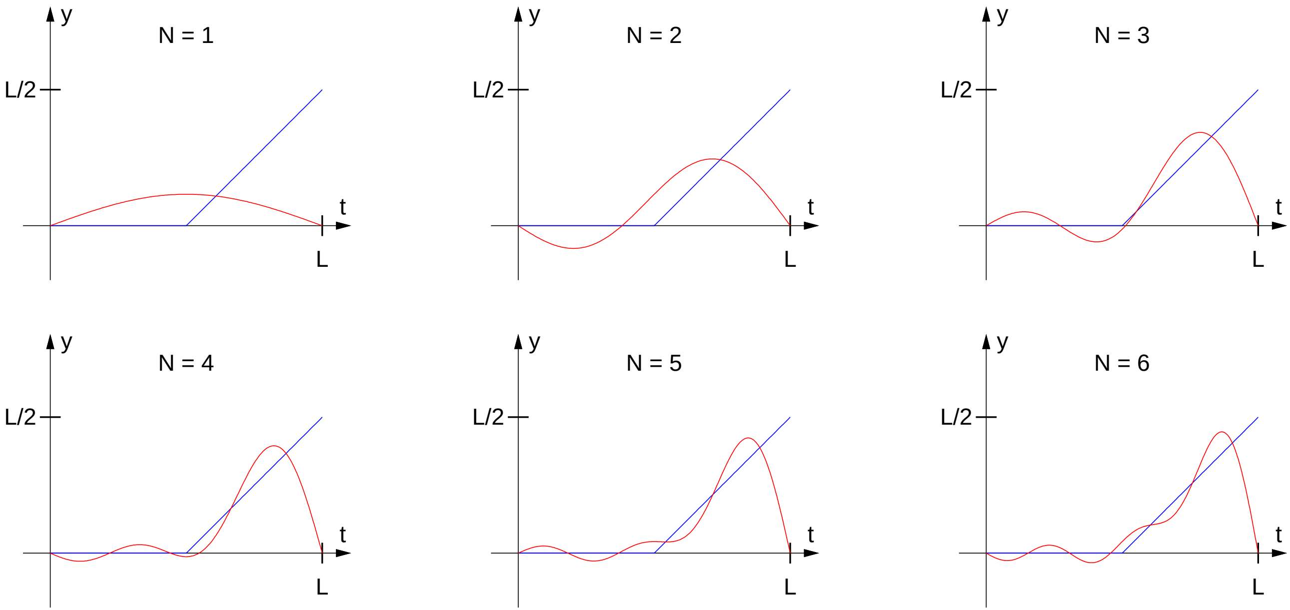


Figura 2.17 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

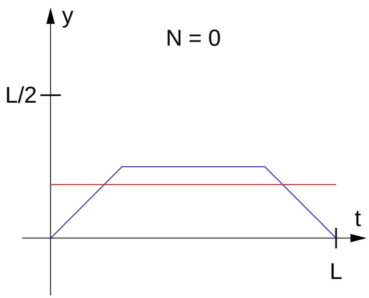


Figura 2.18 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$, se $t \in [0, L/4]$, $f(t) = L/4$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = L - t$, se $t \in [3L/4, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de cossenos para $N = 0, 2, 4$.

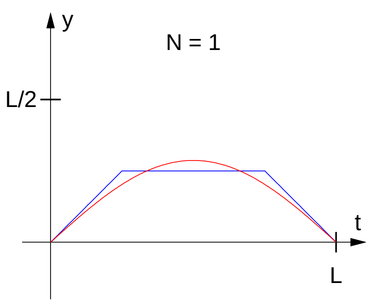


Figura 2.19 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$, se $t \in [0, L/4]$, $f(t) = L/4$, se $t \in [L/4, 3L/4]$ e $f(t) = L - t$, se $t \in [3L/4, L]$ e somas parciais da sua série de Fourier de senos para $N = 1, 3, 5$.

1.9. Considere a seguinte função :

$$f(t) = 1 - |t|, \quad \text{se} \quad -1 < t \leq 1 \quad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t).$$

(a) Calcule a série de Fourier S_f da função f;

(b) Determine os valores $S_f(0)$ e $S_f(100.5)$. Justifique.

1.10. Considere a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 1$.

(a) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha somente termos em cossenos.

(b) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha somente termos em senos.

(c) Encontre uma representação de f em série de Fourier que contenha termos em cossenos e senos.

2.2 Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Análogo ao caso de integração de funções ímpares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 0. \tag{2.19}$$

Também análogo ao caso de integração de funções pares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 2\int_0^{L} h(t)dt. \tag{2.20}$$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.5 ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação à reta $t = L$, isto é, se

$$f(2L - t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\operatorname{sen}\frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t,y) = (L,0)$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t)\operatorname{sen}\frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t,y) = (L,0)$ e como $\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrico em relação à reta $t = L$ (verifique!). Assim, separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$\begin{aligned} b_{2k} &= 0 \\ b_{2k+1} &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0,2L)$$

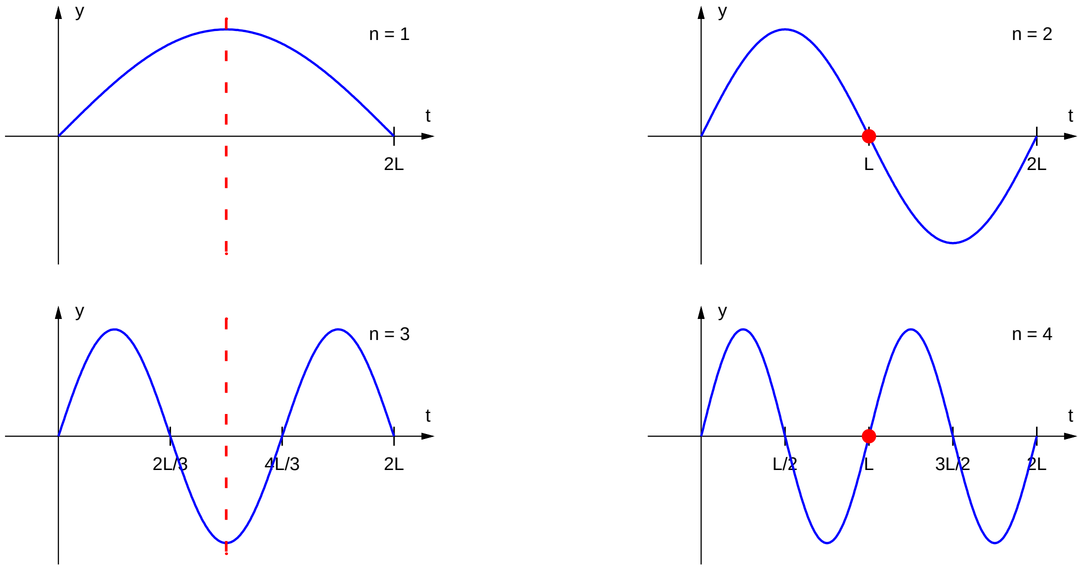


Figura 2.20 – $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Ou seja, se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, a sua série de Fourier de senos tem somente os termos de índice ímpar.

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação à reta $t = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação à reta $t = L$. Assim temos o seguinte resultado.

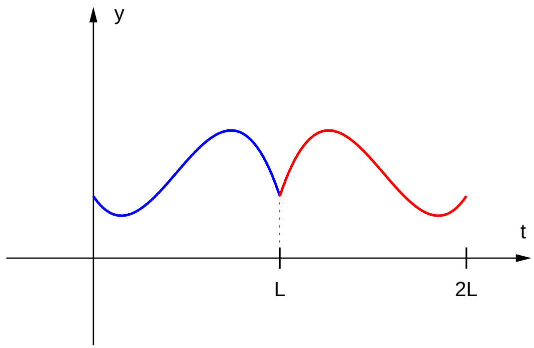


Figura 2.21 – Prolongamento com simetria em relação à reta $t = L$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.9. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* ***série de Fourier de senos de índice ímpar*** *de f*

$$Ssi_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L, \\ f(2L - t), & \text{se } L \le t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \le t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t).$$

ou seja, $\tilde{f}$ é a extensão de f que é periódica de período $4L$, ímpar e simétrica em relação a reta $t = L$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.4 ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{2L}dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, isto é,

$$f(2L - t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\cos \dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t)\cos\dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e como $\cos\dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t)\cos\dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (verifique!). Separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 0 \\ a_{2k+1} &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, 2L)$$

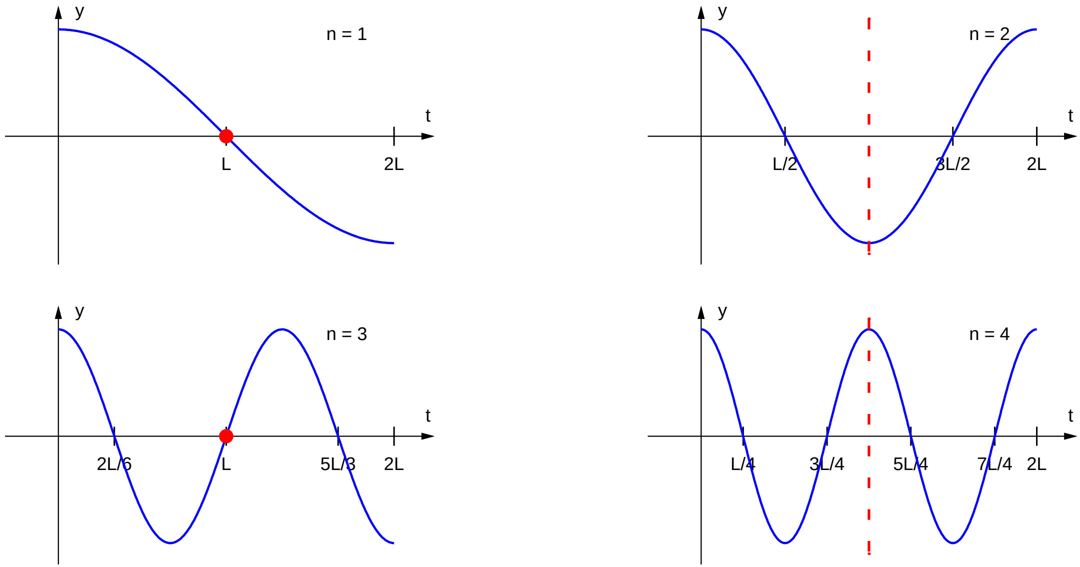


Figura 2.22 – $\cos\frac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Ou seja, se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, a sua série de Fourier de cossenos tem somente os termos de índice ímpar.
Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação ao ponto $(L, 0)$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L \\ -f(2L - t), & \text{se } L \le t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$. E assim temos o seguinte resultado.

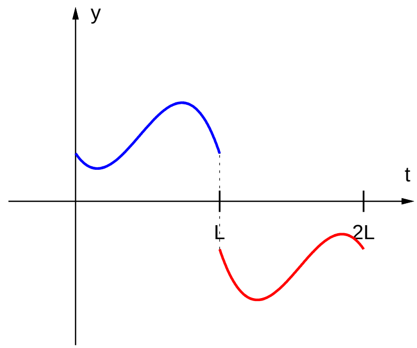


Figura 2.23 – Prolongamento com simetria em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.10. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A* **série de Fourier de cossenos de índice ímpar** *de f*

$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso, se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L, \\ -f(2L - t), & \text{se } L \le t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \le t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t),$$

ou seja, $\tilde{f}$ é a extensão de f que é periódica de período $4L$, par e simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.12. Determine as representações da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \le t < L, \end{cases}$$

$[0, 2L]$:

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= a_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) - \frac{L}{2} a_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) \\
&= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}_{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} s\Big|^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}_{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) + \frac{2L}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)}{(2k+1)^2\pi} + \frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$$

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) - \frac{L}{2} b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) \\
&= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s)\Big|^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}_{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s\Big|^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}_{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)}{(2k+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$$

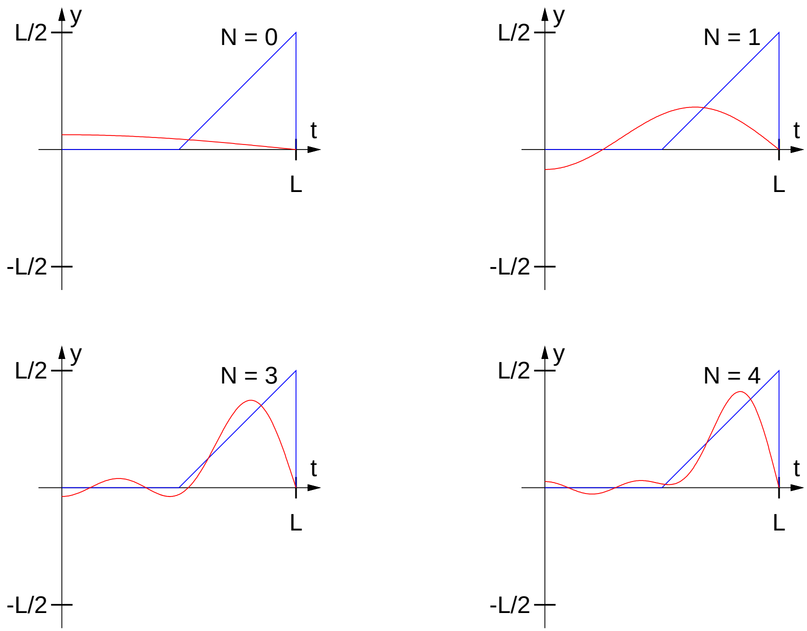


Figura 2.24 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

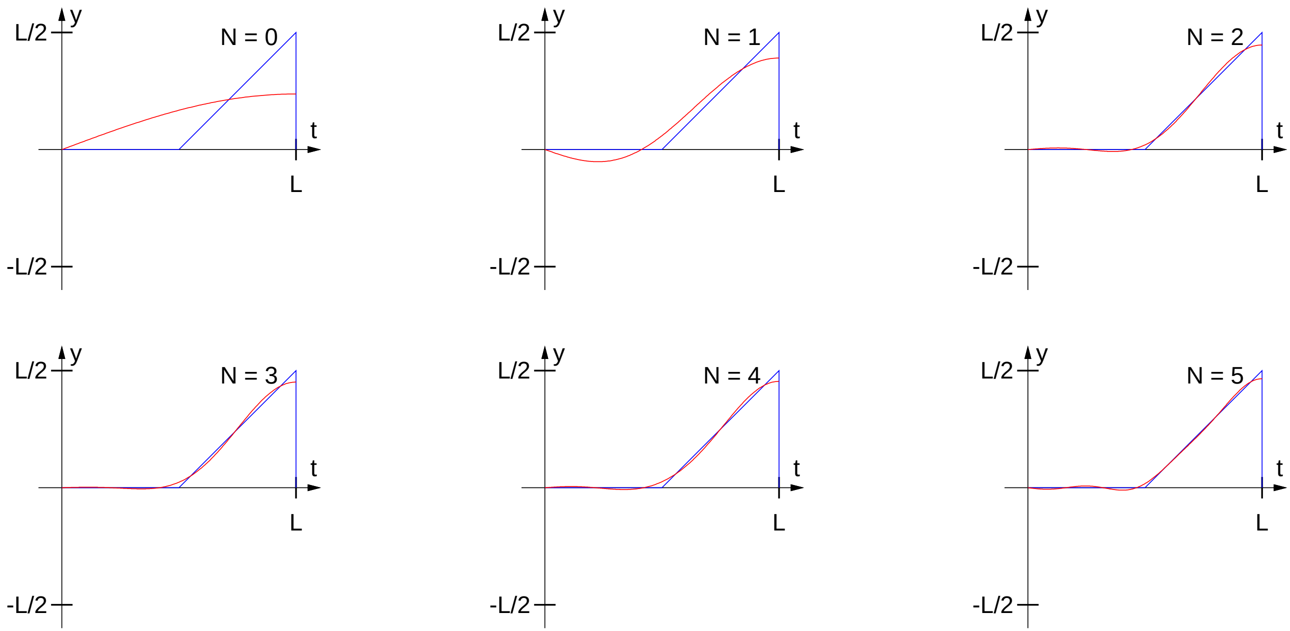


Figura 2.25 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Exercícios (respostas na página 263)

2.1. (a) Mostre que se uma função $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então

$$\int_0^{2L} h(t)\, dt = 0.$$

(b) Mostre que se uma função $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então

$$\int_0^{2L} h(t)\, dt = 2 \int_0^{L} h(t)\, dt.$$

(c) Mostre que se $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, tal que

$$f(t) = f(2L - t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então os coeficientes de índice par da série de senos de Fourier são nulos, ou seja, $b_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, 3 \ldots$ e os coeficientes de índice ímpar são dados por

$$b_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Sugestão: use os itens (a) e (b).)

(d) Mostre que se $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, tal que

$$f(t) = -f(2L - t), \quad \text{para } t \in [0, L],$$

então os coeficientes de índice par da série de cossenos de Fourier são nulos, $a_{2k} = 0$, para $k = 0, 1, 2. \ldots$ e os coeficientes de índice ímpar são dados por

$$a_{2k+1} \quad = \quad \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

(Sugestão: use os itens (a) e (b).)

2.2. Determine as séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} L/2 - t, & \text{se } 0 \le t < L/2, \\ 0, & \text{se } L/2 \le t < L. \end{cases}$$

2.3. Determine a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = L - |t - L|, \quad \text{se } -L < t < 3L \text{ e } f(t + 4L) = f(t).$$

2.4. Determine a série de Fourier de senos da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \le t < L/4 \\ L/4, & \text{se } L/4 \le t < 3L/4 \\ L - t, & \text{se } 3L/4 \le t \le L. \end{cases}$$

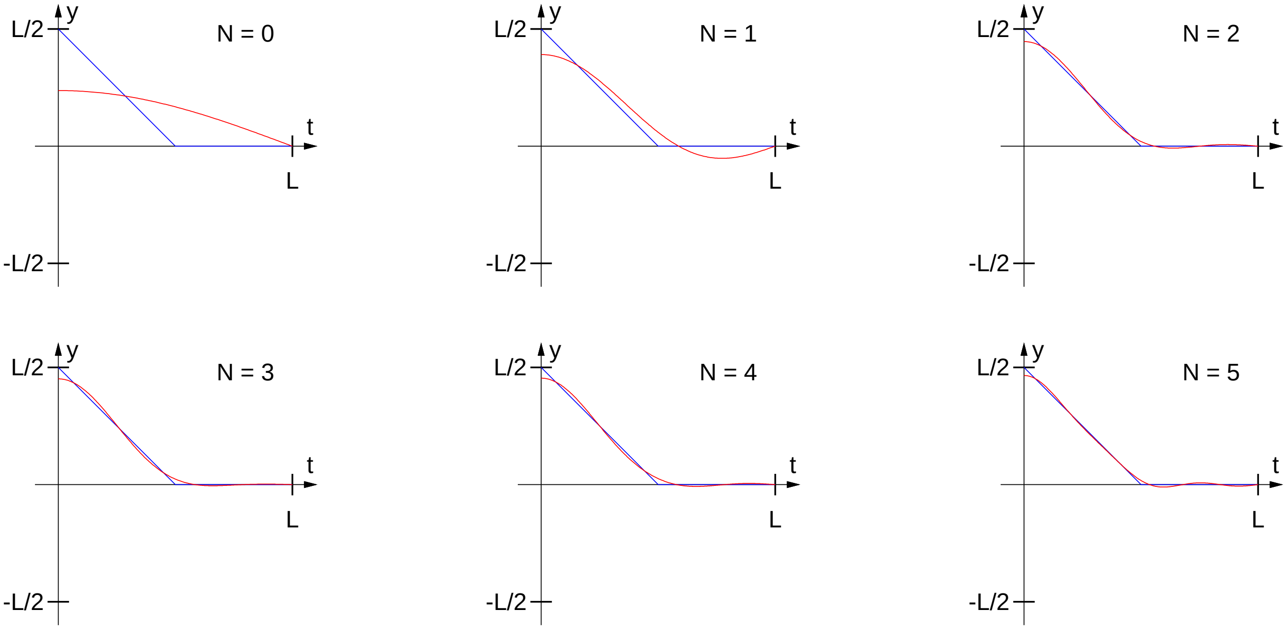


Figura 2.26 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = L/2 - t$, se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

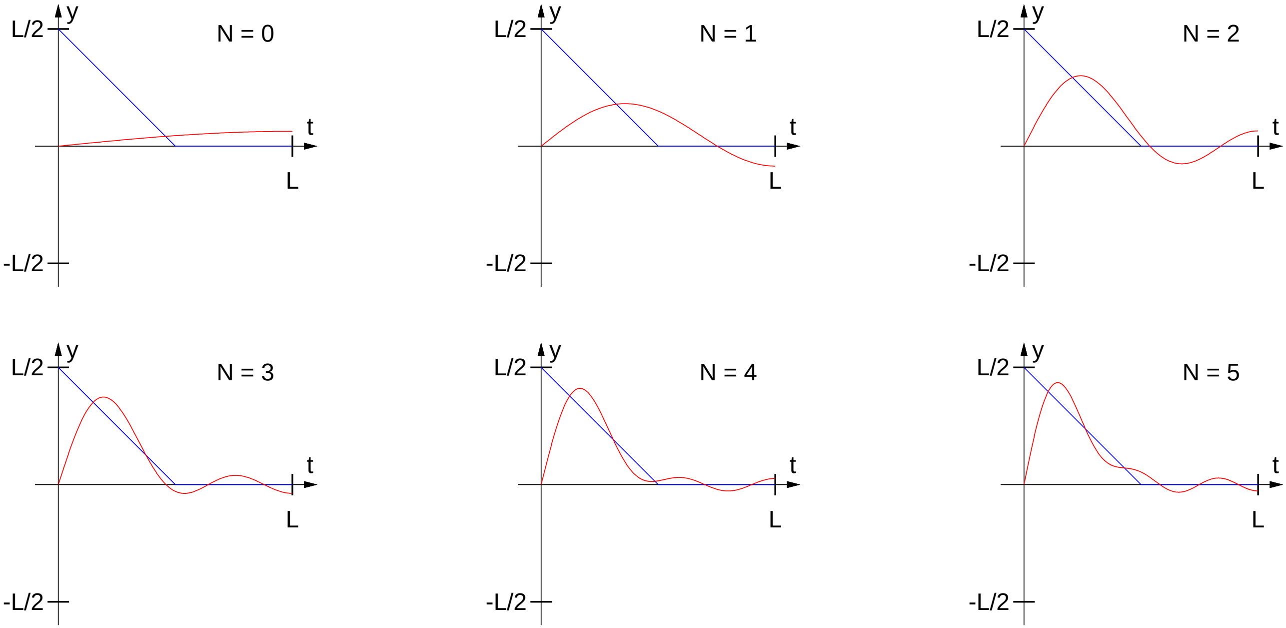


Figura 2.27 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = L/2 - t$, se $t \in [0, L/2]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

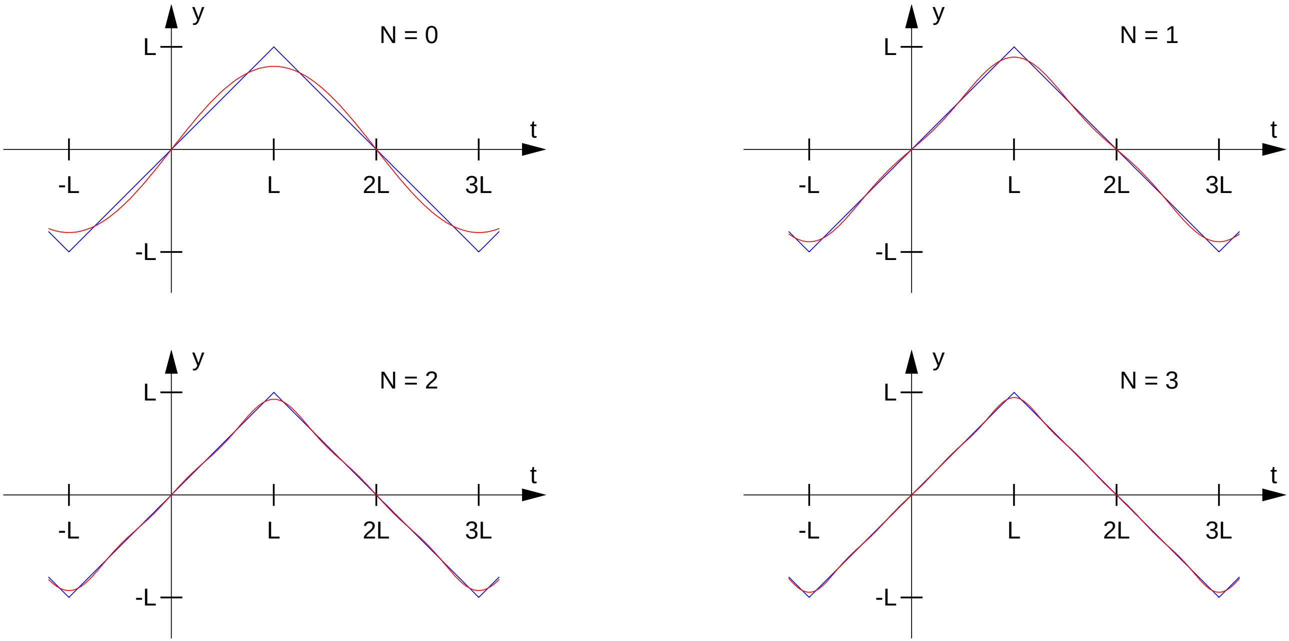


Figura 2.28 – A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = L - |t - L|$, se $-t \in [-L, 3L]$ e tal que $f(t) = f(t + 4L)$ e as somas parciais da sua série de Fourier, para $N = 0, 1, 2, 3$.

2.3 Oscilações Forçadas com Força Externa Periódica

Vamos supor que uma força externa periódica $F_{ext}(t)$, com período T, é aplicada à massa. Então a equação para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_{ext}(t).$$

Supondo que a força externa seja seccionalmente contínua com a sua derivada também seccionalmente contínua, então como ela é periódica de período T, ela pode ser representada por sua série de Fourier.

$$F_{ext}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}$$

em que os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}dt. \quad \text{para } n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

2.3.1 Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento da massa é

$$mu'' + ku = F_{ext}(t) \tag{2.21}$$

A solução geral é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente com uma solução particular da equação não homogênea. A equação homogênea correspondente é

$$mu'' + ku = 0,$$

que é a equação do problema de oscilação livre não amortecida. A equação característica é

$$mr^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$$

Assim a solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Seja $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Então a equação acima pode ser escrita em termos de ω_0 como

$$u(t) = c_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right). \tag{2.22}$$

Assim a solução geral da equação não homogênea é da forma

$$u(t) = c_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) + u_p(t).$$

Pelo método das coeficientes a determinar, devemos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T},$$

em que A_n e B_n são coeficientes a serem determinados substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (2.21). Temos que supor que $\omega_0 \neq \frac{2n\pi}{T}$, para $n = 1, 2, 3\ldots$ (por que?)

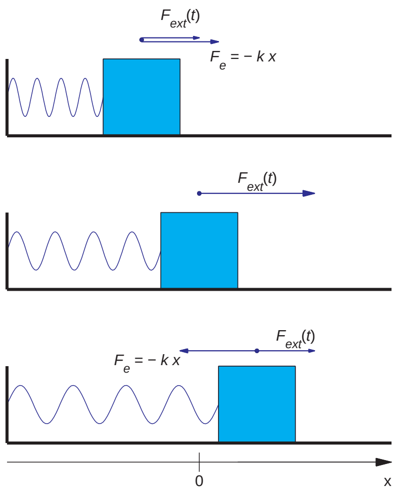


Figura 2.29 – Sistema massa-mola forçado sem amortecimento

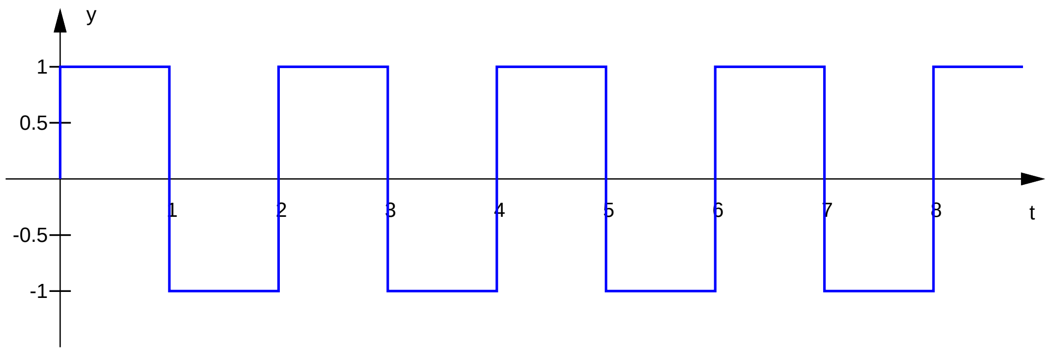


Figura 2.30 – Parte não homogênea, $f(t)$ da equação do problema de valor inicial do Exemplo 2.13

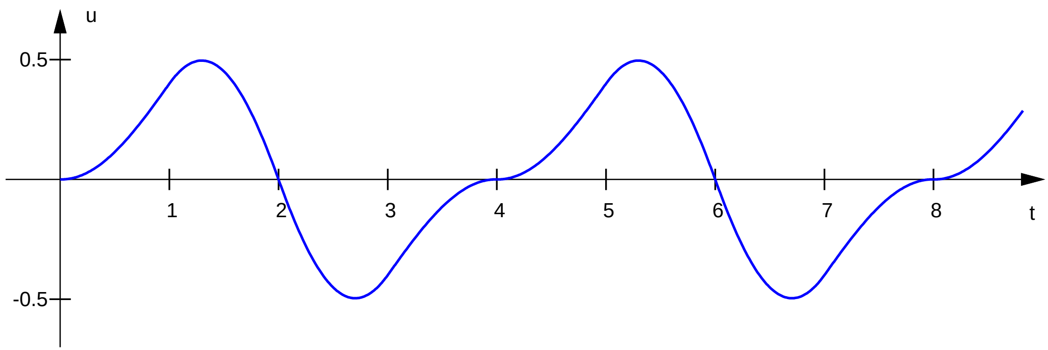


Figura 2.31 – Solução do problema de valor inicial do Exemplo 2.13 para $\omega_0 = \pi/2$.

Exemplo 2.13. Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + \omega_0^2 u = f(t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -1, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t)$$

A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + u_p(t),$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Como f é ímpar, seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua, ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t.$$

com

$$b_n = 2 \int_0^1 f(t) \operatorname{sen} n\pi t \, dt = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

com coeficientes A_n, B_n a determinar. Vamos supor que a derivada da série seja igual a série das derivadas:

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t),$$

$$u_p''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 A_n \cos n\pi t + n^2\pi^2 B_n \operatorname{sen} n\pi t).$$

Substituindo-se $u_p(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2(A_n\cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$
$$+\,\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t,$$

que podemos reescrever como

$$\sum_{n=1}^{\infty}[B_n(\omega_0^2 - n^2\pi^2) - b_n]\operatorname{sen} n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty}(\omega_0^2 - n^2\pi^2)A_n\cos n\pi t = 0.$$

De onde obtemos

$$A_n = 0,\quad B_n = \frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2},\quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi t = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(\omega_0^2 - n^2\pi^2)}\operatorname{sen} n\pi t$$

A solução geral da equação diferencial é então

$$u(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(\omega_0^2 - n^2\pi^2)}\operatorname{sen} n\pi t$$

Substituindo-se $t = 0$ e $u = 0$, obtemos $c_1 = 0$. Substituindo-se $t = 0$ em

$$u'(t) = \omega_0 c_2\cos\omega_0 t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}\cos n\pi t$$

obtemos

$$c_2 = \frac{2}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}$$

Logo a solução do PVI é

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\frac{2}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\omega_0^2 - n^2\pi^2} \right) \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n(\omega_0^2 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t \\ &= \left(\frac{4}{\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 - \omega_0^2} \right) \operatorname{sen} \omega_0 t \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(\omega_0^2 - (2n+1)^2\pi^2)} \operatorname{sen}(2n+1)\pi t \end{aligned}$$

Para encontrar $u_p(t)$ fizemos a suposição de que as derivadas da série eram a série das derivadas. Seja

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t).$$

Então

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t),$$

$$u_p''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)$$

pois,

$$|u_n'(t)| \leq \frac{4}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2 - n^2\pi^2},$$

$$|u_n''(t)| \leq \frac{4}{\pi} \frac{n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}.$$

2.3.2 Oscilações Forçadas com Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0(t) \tag{2.23}$$

A solução geral é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente com uma solução particular da equação não homogênea. A equação homogênea correspondente é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0,$$

que é a equação do problema de oscilação livre amortecida. A equação característica é $mr^2 + \gamma r + k = 0$ e $\Delta = \gamma^2 - 4km$
Aqui temos três casos a considerar:

(a) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km > 0$ ou $\gamma > 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que

$$r_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} < 0$$

Este caso é chamado **superamortecimento**.

(b) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km = 0$ ou $\gamma = 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma t}{2m}} + c_2 t e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$$

Este caso é chamado **amortecimento crítico**.

(c) Se $\Delta = \gamma^2 - 4km < 0$ ou $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$, neste caso

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} (c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t) \tag{2.24}$$

em que

$$\mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} < \omega_0$$

Aqui, μ é chamado **quase frequência** e $T = \dfrac{2\pi}{\mu}$ é chamado **quase período**. Este caso é chamado **subamortecimento**.

Observe que nos três casos a solução tende a zero quando t tende a $+\infty$.

Seja $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ a solução geral da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (2.23) é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método dos coeficientes a determinar

$$u_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T},$$

em que A_n e B_n são coeficientes a serem determinados substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (2.23).

A solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$, é a solução do problema de oscilação livre amortecida e já mostramos que tende a zero quando t tende a $+\infty$, por isso é chamada **solução transiente**, enquanto a solução particular, $u_p(t)$, permanece e por isso é chamada **solução estacionária**.

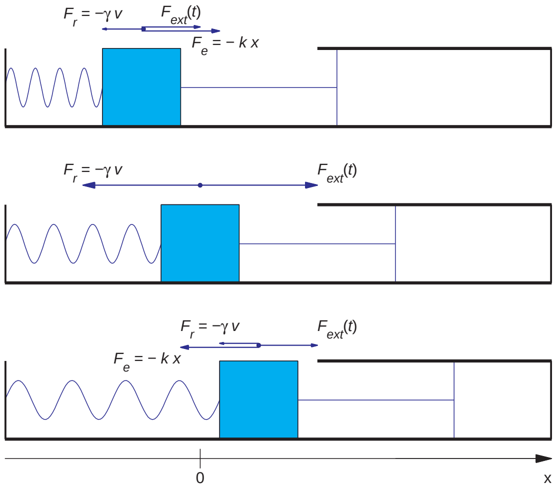


Figura 2.32 – Sistema massa-mola forçado com amortecimento

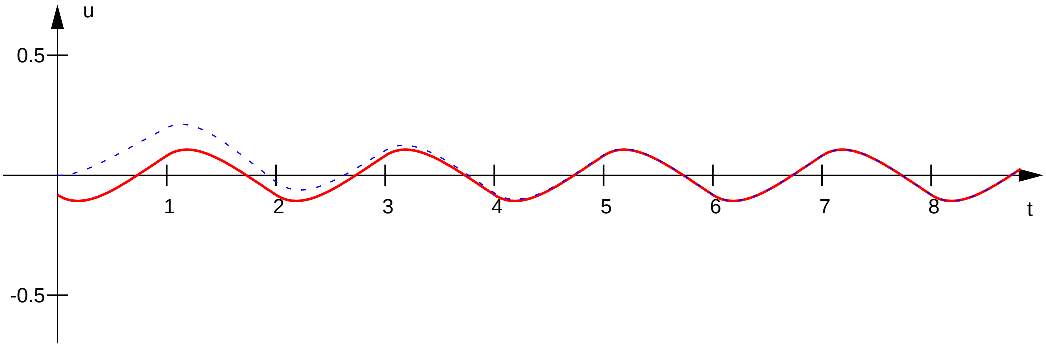


Figura 2.33 – Solução estacionária do problema de valor inicial do Exemplo 2.14.

Exemplo 2.14. Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} u'' + 3u' + 2u = f(t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -1, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{array}\right. \quad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t)$$

A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + u_p(t),$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Como f é ímpar, seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua, ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t$$

com

$$b_n = 2\int_0^1 f(t) \operatorname{sen} n\pi t \, dt = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

com coeficientes A_n, B_n a determinar. Vamos supor que a derivada da série seja igual a série das derivadas:

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t),$$

$$u_p''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 A_n \cos n\pi t + n^2\pi^2 . B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

Substituindo-se $u_p(t), u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) + 3\sum_{n=1}^{\infty}(-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t,$$

que podemos reescrever como

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(2-n^2\pi^2)B_n - 3n\pi A_n - b_n]\operatorname{sen} n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty}[(2-n^2\pi^2)A_n + 3n\pi B_n]\cos n\pi t = 0.$$

De onde obtemos o sistema

$$\begin{cases} (2-n^2\pi^2)A_n + 3n\pi B_n &= 0 \\ -3n\pi A_n + (2-n^2\pi^2)B_n &= b_n \end{cases}$$

que tem solução

$$A_n = -\frac{3n\pi b_n}{\Delta_n}, \quad B_n = \frac{(2-n^2\pi^2)b_n}{\Delta_n}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

em que $\Delta_n = 9n^2\pi^2 + (2-n^2\pi^2)^2$. Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$
\begin{aligned}
u_p(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\pi b_n}{\Delta_n} \cos n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2\pi^2)b_n}{\Delta_n} \operatorname{sen} n\pi t \\
&= 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\Delta_n} \cos n\pi t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2\pi^2)(1-(-1)^n)}{n\Delta_n} \operatorname{sen} n\pi t \\
&= -12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{2n+1}} \cos(2n+1)\pi t + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(2n+1)^2\pi^2}{(2n+1)\Delta_{2n+1}} \operatorname{sen}(2n+1)\pi t
\end{aligned}
$$

que é a solução estacionária. Para encontrar $u_p(t)$ fizemos a suposição de que as derivadas da série eram a série das derivadas. Seja

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t).$$

Então

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t),$$

$$u_p''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)$$

pois,

$$|u_n'(t)| \le 12\frac{n}{\Delta_n} + \frac{4}{\pi}\frac{(2-n^2\pi^2)}{\Delta_n},$$

$$|u_n''(t)| \le 12\frac{n^2}{\Delta_n} + \frac{4}{\pi}\frac{n(2-n^2\pi^2)}{\Delta_n}.$$

Exercícios (respostas na página 268)

3.1. Considere a seguinte função :

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases} \qquad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t)$$

(a) Encontre uma solução particular e a solução geral da equação diferencial $2y'' + y = f(t)$.

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2y'' + y = f(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

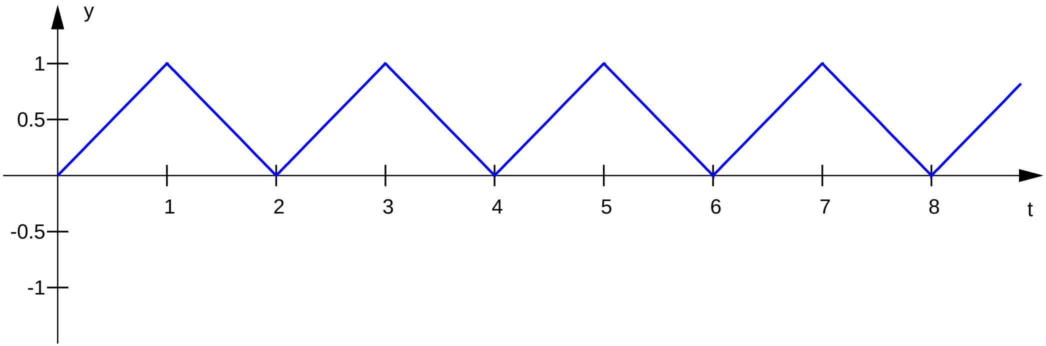


Figura 2.34 – Termo não homogêneo da equação do problema de valor inicial do Exercício 3.2.

3.2. Considere

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{e tal que} \quad f(t+2) = f(t)$$

(a) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + \omega_0^2 u = f(t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, \end{cases}$$

para $\omega_0 \neq (2k+1)\pi$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Encontre a solução estacionária do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 3u' + 2u = f(t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0. \end{cases}$$

2.4 Respostas dos Exercícios

1. Séries de Fourier (página 203)

1.1. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o cosseno e a função f são pares:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\cos\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= -\frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt
\end{aligned}$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o seno é ímpar e a função f é par:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\,\mathrm{sen}\,\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\
&= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0
\end{aligned}$$

1.2. Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o cosseno é par e a função f é ímpar:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\cos\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \end{aligned}$$

Separando a integral em duas partes, usando a mudança de variáveis $t = -s$ na primeira parte e usando o fato de que o seno e a função f são ímpares:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-s)\,\mathrm{sen}\,\frac{-n\pi s}{L}\,(-ds) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= -\frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(s)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{L}\,ds + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \end{aligned}$$

1.3. (a) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(L-t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L/2]$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L h(t)\,dt &= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^L h(t)\,dt \\
&= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^0 h(L-s)\,(-ds) \\
&= \int_0^{L/2} h(t)\,dt + \int_{L/2}^0 h(s)\,ds = 0
\end{aligned}$$

(b) Para $h(t) = f(t)\,\text{sen}\,\frac{2k\pi t}{L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(L-t) &= f(L-t)\,\text{sen}\,\frac{2k\pi(L-t)}{L} = f(t)\,\text{sen}\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{L}\right) = f(t)\,\text{sen}\left(-\frac{2k\pi t}{L}\right) \\
&= -f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $b_{2k} = 0$.

(c) Para $h(t) = f(t)\cos\frac{2k\pi t}{L}$ temos que

$$\begin{aligned}
h(L-t) &= f(L-t)\cos\frac{2k\pi(L-t)}{L} = -f(t)\cos\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{L}\right) = -f(t)\cos\left(-\frac{2k\pi t}{L}\right) \\
&= -f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{L}\right) = -h(t)
\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $a_{2k} = 0$.

1.4. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes duas vezes obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,dt = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\cos s\,ds\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(s^2\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} - 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\,\mathrm{sen}\,s\right)\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(\left(s^2 - 2\right)\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\,\mathrm{sen}\,s\,ds\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(-s^2\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} + 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\right)\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{f_{c,d}^{(2)}}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\\
&= \frac{L^2}{6}(d^3 - c^3) + \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(s^2 - 2\right)\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3}\cos\frac{n\pi t}{L}\\
&\quad + \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}
\end{aligned}$$

1.5. (a) A função é ímpar. A sua série de Fourier de período $2L$ é dada por

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

com

$$b_n = 2\int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}\, dt = -\frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de Fourier de f é dada por

$$S_f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{L}.$$

(b) A função é par. Logo a sua série de Fourier de período $2L$ é dada por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\left(\frac{L}{2} a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) - a_0(f_{0,1}^{(1)}, L)\right) \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\left(\frac{L}{2} a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) - a_n(f_{0,1}^{(1)}, L)\right) \\ &= \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_0^{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{n\pi} \\ &= 0 - \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = -\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de Fourier de f é dada por

$$S_f(t) = \frac{L}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi t}{L}.$$

1.6. A função f é ímpar e periódica de período $2L$. Logo a sua série de Fourier é da forma

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= 2\left(b_n(f_{0,1/2}^{(1)}) + Lb_n(f_{1/2,1}^{(0)}) - b_n(f_{1/2,1}^{(1)})\right) \\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{2L}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{4L\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns coeficientes são nulos:

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Assim a sua série de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L} \end{aligned}$$

1.7. A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t(L-t) = -t^2 + Lt$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)dt = \frac{2}{L}\int_0^L (-t^2+Lt)\,dt = \frac{-2L^2}{3} + L^2 \\ a_n &= -a_n(f_{0,1}^{(2)}, L) + L\,a_n(f_{0,1}^{(1)}, L) \\ &= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(\left(n^2\pi^2-2\right)\operatorname{sen} n\pi + 2n\pi\cos n\pi\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left(n\pi\operatorname{sen} n\pi + \cos n\pi - 1\right) \\ &= \frac{2L^2}{n^2\pi^2}(-\cos n\pi - 1) = \frac{2L^2}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Entretanto os coeficientes de índice ímpar são nulos. Podemos separar os termos em de índice par e de índice ímpar

$$a_{2k+1} = 0$$

$$a_{2k} = \frac{-4L^2}{(2k)^2\pi^2} = \frac{-L^2}{k^2\pi^2}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= -b_n(f_{0,1}^{(2)}, L) + L\,b_n(f_{0,1}^{(1)}, L) \\ &= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left(2n\pi\operatorname{sen} n\pi + \left(2-n^2\pi^2\right)\cos n\pi - 2\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos n\pi + \operatorname{sen} n\pi\right) \\ &= \frac{4L^2}{n^3\pi^3}(-\cos n\pi + 1) = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}((-1)^{n+1} + 1) \end{aligned}$$

Entretanto os coeficientes de índice par são nulos. :

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{8L^2}{(2k+1)^3\pi^3}.$$

$$\begin{aligned} Sc_f(t) &= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{6} - \frac{L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ss_f(t) &= \frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L} \end{aligned}$$

1.8. (a) $a_0 = 2a_0(f^{(0)}_{1/2,1}, L) = 1$, $a_n = 2a_n(f^{(0)}_{1/2,1}, L) = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} = -\frac{2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$,

$b_n = 2b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, L) = -\frac{2}{n\pi}\cos s\Big|_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} = -\frac{2((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$.

$$Sc_f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi t}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{L}.$$

$$Ss_f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$$

(b) $a_0 = 2a_0(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) = 1$, $a_n = 2a_n(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} = \frac{2(\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4})}{n\pi}$,

$b_n = 2b_n(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) = -\frac{2}{n\pi}\cos s\Big|_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} = -\frac{2(\cos\frac{3n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4})}{n\pi}$.

$$Sc_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}}{n} \cos\frac{n\pi t}{L}$$

$$Ss_f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$$

(c) $a_0 = 2\left(a_0(f^{(1)}_{1/2,1}, L) - \frac{L}{2} a_0(f^{(0)}_{1/2,1}, L)\right) = \frac{L}{4}$,
$a_n = 2\left(a_n(f^{(1)}_{1/2,1}, L) - \frac{L}{2} f^{(0)}_{1/2,1}, L)\right) = \frac{2L((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2}$,
$b_n = 2\left(b_n(f^{(1)}_{1/2,1}, L) - \frac{L}{2} b_n(f^{(0)}_{1/2,1}, L)\right) = \frac{L(n\pi(-1)^n + 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2}$.

$$Sc_f(t) = \frac{L}{8} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos\frac{n\pi t}{L}.$$

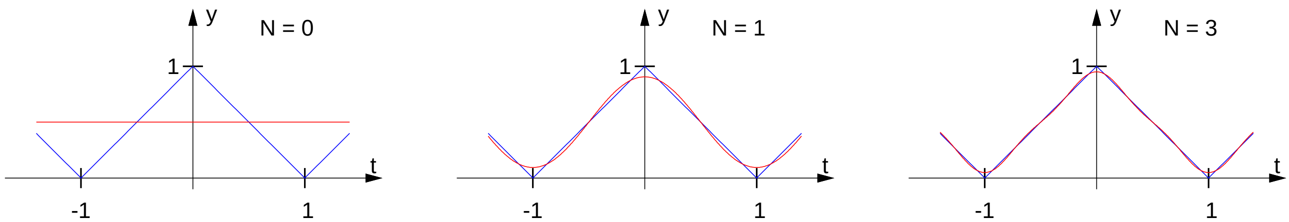
$$Ss_f(t) = -\frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n + 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$$

(d) $a_0 = 2\left(a_0(f^{(1)}_{0,1/4}, L) + \frac{L}{4} a_0(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) + L a_0(f^{(0)}_{3/4,1}, L) - a_0(f^{(1)}_{3/4,1}, L)\right) = \frac{3L}{8}$,
$a_n = 2\left(a_n(f^{(1)}_{0,1/4}, L) + \frac{L}{4} a_n(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) + L a_n(f^{(0)}_{3/4,1}, L) - a_n(f^{(1)}_{3/4,1}, L)\right) = \frac{2L(\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4} - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}$,
$b_n = 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/4}, L) + \frac{L}{4} b_n(f^{(0)}_{1/4,3/4}, L) + L b_n(f^{(0)}_{3/4,1}, L) - b_n(f^{(1)}_{3/4,1}, L)\right) = \frac{2L(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4})}{n^2\pi^2}$.

$$Sc_f(t) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4} - 1 - (-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi t}{L}.$$

$$Ss_f(t) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.$$

1.9.



(a) A função é par, contínua por partes, de período igual a 2. Logo a sua série de Fourier é dada por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi t$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\left(a_0(f_{0,1}^{(0)}, 1) - a_0(f_{0,1}^{(1)}, 1)\right) \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\left(a_n(f_{0,1}^{(0)}, 1) - a_n(f_{0,1}^{(1)}, 1)\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_0^{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2}(s \operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{n\pi} \\ &= 0 - \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = -\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Assim os termos de índice par (com exceção do primeiro) são iguais a zero e neste caso a série de Fourier de f é dada por

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi t,$$

(b) Como a função f é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então a série de Fourier de f, $S_f(t)$, converge para $f(t)$ nos pontos onde f é contínua, que é o caso de $t = 0$. Logo

$$S_f(0) = f(0) = 1.$$

Como a série de fourier é periódica de período fundamental igual a 2, então

$$S_f(t + 100) = S_f(t + 50 \cdot 2) = S_f(t).$$

Assim,

$$S_f(100.5) = S_f(100 + \frac{1}{2}) = S_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, para $t = 1/2$ a função f também é contínua, logo

$$S_f(100.5) = S_f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

1.10. (a) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja par obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de senos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 202.

$$a_0 = 2a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 2, \quad a_n = 2a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$f(t) \quad = \quad 1, \quad \text{para } 0 \le t \le L$$

(b) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela seja ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes dos termos de cossenos são nulos. Os coeficientes podem ser obtidos da tabela na página 202.

$$b_n = 2b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

$$f(t) \quad = \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } 0 \le t \le L.$$

Assim os termos de índice par da série de senos são nulos.

(c) Estendo-se f ao intervalo $[-L, L]$ de forma que ela não seja nem par nem ímpar obtemos uma série de Fourier em que os coeficientes os termos de cossenos e de senos são não nulos. Por exemplo, se a função f é estendida ao intervalo $[-L, L]$ da forma da a seguir

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L \leq t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq t \leq L \end{cases}$$

então os coeficientes que podem ser obtidos da tabela na página 202 são dados por.

$$a_0 = a_0(f_{0,1}^{(0)}, L) = 1, \quad a_n = a_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = 0,$$

$$b_n = b_n(f_{0,1}^{(0)}, L) = -\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{L}, \quad \text{para } -L \leq t \leq L.$$

2. Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares (página 229)

2.1. (a) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = 2L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(2L-t) = -h(t), \quad \text{para } t \in [0, L]$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2L} h(t)\,dt &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^{2L} h(t)\,dt \\ &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(2L-s)\,(-ds) \\ &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(s)\,ds = 0\end{aligned}$$

(b) Dividindo a integral em duas partes, fazendo a mudança de variáveis $t = 2L - s$ na segunda parte e usando o fato de que

$$h(2L-t) = h(t), \quad \text{para } t \in [0, L]$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2L} h(t)\,dt &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^{2L} h(t)\,dt \\ &= \int_0^L h(t)\,dt + \int_L^0 h(2L-s)\,(-ds) \\ &= \int_0^L h(t)\,dt - \int_L^0 h(s)\,ds = 2\int_0^L h(t)\,dt\end{aligned}$$

(c) Para $h(t) = f(t)\,\text{sen}\,\frac{2k\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned}h(2L-t) &= f(2L-t)\,\text{sen}\,\frac{2k\pi(2L-t)}{2L} = f(t)\,\text{sen}\left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{2L}\right) = f(t)\,\text{sen}\left(-\frac{2k\pi t}{2L}\right) \\ &= -f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{2L}\right) = -h(t)\end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $b_{2k} = 0$.

Para $h(t) = f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned} h(2L-t) &= f(2L-t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi(2L-t)}{2L} = f(t) \operatorname{sen} \left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L} \right) \\ &= f(t) \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L} \right) = f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{(2k+1)\pi t}{2L} \right) = h(t) \end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (b) que

$$b_{2k+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(d) Para $h(t) = f(t) \cos \frac{2k\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned} h(2L-t) &= f(2L-t) \cos \frac{2k\pi(2L-t)}{2L} = -f(t) \cos \left(2k\pi - \frac{2k\pi t}{2L} \right) = -f(t) \cos \left(-\frac{2k\pi t}{2L} \right) \\ &= -f(t) \cos \left(\frac{2k\pi t}{2L} \right) = -h(t) \end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (a) que $a_{2k} = 0$.

Para $h(t) = f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ temos que

$$\begin{aligned} h(2L-t) &= f(2L-t) \cos \frac{(2k+1)\pi(2L-t)}{2L} = -f(t) \cos \left((2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L} \right) \\ &= -f(t) \cos \left(\pi - \frac{(2k+1)\pi t}{2L} \right) = f(t) \cos \left(\frac{((2k+1)\pi t}{2L} \right) = h(t) \end{aligned}$$

Assim segue da aplicação do item (b) que

$$a_{2k+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

2.2. Lembrando que a integração deve ser feita no intervalo $[0, 2L]$:

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= 4\left(\frac{L}{2}a_{2k+1}(f^{(0)}_{0,\frac{1}{4}}, 2L) - a_{2k+1}(f^{(1)}_{0,\frac{1}{4}}, 2L)\right) \\
&= \frac{L}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen} s\Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - 4\cdot\frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}(s\operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$Sci_f(t) = \frac{8L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$$

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= 4\left(\frac{L}{2}b_{2k+1}(f^{(0)}_{0,\frac{1}{4}}, 2L) - b_{2k+1}(f^{(1)}_{0,\frac{1}{4}}, 2L)\right) \\
&= \frac{L}{2}\cdot 4\cdot\frac{-1}{(2k+1)\pi}\cos s\Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} - 4\cdot\frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_0^{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}\left((2k+1)\pi - 4\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$Ssi_f(t) = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)\pi - 4\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$$

2.3. A função é ímpar e simétrica em relação a reta $t = L$. Logo a sua série de Fourier é uma série de senos de índices ímpares.

$$
\begin{aligned}
b_{2n+1} &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi t}{2L}dt \\
&= 4\left(b_{2n+1}(f^{(1)}_{0,1/2}, 2L)\right) \\
&= \frac{8L}{(2n+1)^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{(2n+1)\pi/2} \\
&= \frac{8L}{(2n+1)^2\pi^2}\left(-\frac{(2n+1)\pi}{2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\
&= \frac{8L\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)^2\pi^2} = \frac{8L(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}
$$

$$
S_f(t) = \frac{8L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi t}{2L}
$$

2.4. A função é simétrica em relação a reta $t = L/2$. Logo a sua série de senos de Fourier tem somente os termos de índice ímpar.

$$
\begin{aligned}
b_{2n+1} &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi t}{L}dt \\
&= 4\left(b_{2n+1}(f^{(1)}_{0,1/4}, L) + \frac{L}{4}b_{2n+1}(f^{(1)}_{1/4,1/2}, L)\right) \\
&= \frac{4L}{(2n+1)^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{(2n+1)\pi/4} - \frac{L}{(2n+1)\pi}\cos s\Big|_{(2n+1)\pi/4}^{(2n+1)\pi/2} \\
&= \frac{4L\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(2n+1)^2\pi^2},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}
$$

$$Ss_f(t) = \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{L}$$

3. Oscilações Forçadas com Força Externa Periódica (página 248)

3.1. (a) Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com a derivada f' também contínua por partes, ímpar e periódica de período igual a 2 podemos escrevê-la em termos de sua série de Fourier como

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t, \quad \text{para } t \notin \mathbb{Z}.$$

com

$$b_n = 2\int_0^1 f(t) \operatorname{sen} n\pi t \, dt = \frac{2}{n\pi} \cos s \Big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

A solução da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} t$$

Podemos procurar uma solução particular da forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

com coeficientes A_n, B_n a determinar.

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t)$$

$$y''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 A_n \cos n\pi t + n^2\pi^2 B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

Substituindo-se $y(t)$ e $y''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(B_n(1-2n^2\pi^2)-b_n]\,\text{sen}\,n\pi t+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\pi t)=0$$

Substituindo-se $t=0$ e $t=1$ obtemos

$$A_n=0,\quad B_n=\frac{b_n}{1-2n^2\pi^2},\quad \text{para } n=1,2,\ldots$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$y_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{1-2n^2\pi^2}\,\text{sen}\,n\pi t=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n(1-2n^2\pi^2)}\,\text{sen}\,n\pi t$$

A solução geral é então

$$y(t)=c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_2\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n(1-2n^2\pi^2)}\,\text{sen}\,n\pi t$$

(b) $y(0)=0$ implica que $c_1=0$. Logo,

$$y'(t)=c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{1-2n^2\pi^2}\cos n\pi t$$

Substituindo-se $t=0$ e $y'=0$ obtemos

$$c_2=-2\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{1-2n^2\pi^2}$$

e a solução do PVI é

$$y(t)\ =\ \left(-2\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{1-2n^2\pi^2}\right)\text{sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n(1-2n^2\pi^2)}\,\text{sen}\,n\pi t$$

3.2. (a) A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + u_p(t),$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Como f é par, seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua, ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= 2a_0(f_{0,1}^{(1)}, 1) = 1, \\ a_n &= 2a_n(f_{0,1}^{(1)}, 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi t$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

com coeficientes A_n, B_n a determinar. Vamos supor que a derivada da série seja igual a série das derivadas:

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t).$$

$$u_p''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 A_n \cos n\pi t + n^2\pi^2 B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

Substituindo-se $u_p(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$
$$+\,\omega_0^2\Big(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)\Big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\omega_0^2 - n^2\pi^2) \operatorname{sen} n\pi t + \omega_0^2 A_0 - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(\omega_0^2 - n^2\pi^2) - a_n] \cos n\pi t = 0$$

De onde obtemos

$$A_0 = \frac{a_0}{2\omega_0^2}, \quad A_n = \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2}, \quad B_n = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2} \cos n\pi t \\ &= \frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2(\omega_0^2 - n^2\pi^2)} \cos n\pi t \end{aligned}$$

A solução geral é então

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2(\omega_0^2 - n^2\pi^2)} \cos n\pi t$$

Substituindo-se $t = 0$ e $u = 0$, obtemos

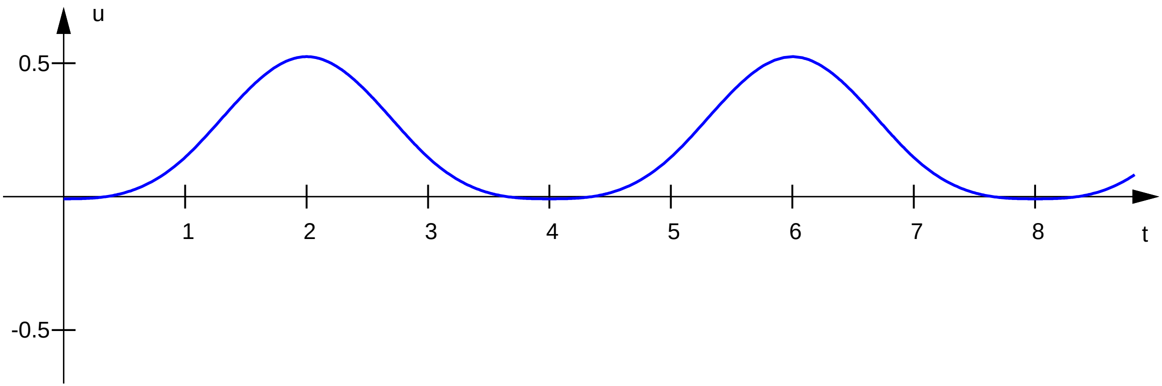
$$c_1 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2} - \frac{1}{2\omega_0^2}.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $u' = 0$ em

$$u'(t) = -\omega_0 c_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + \omega_0 c_2 \cos \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n(\omega_0^2 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t$$

obtemos $c_2 = 0$. Logo a solução do PVI é

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\omega_0^2 - n^2\pi^2} - \frac{1}{2\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2(\omega_0^2 - n^2\pi^2)} \cos n\pi t \\ &= \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - (2n+1)^2\pi^2} - \frac{1}{2\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t \\ &\quad + \frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2((2n+1)^2\pi^2 - \omega_0^2)} \cos(2n+1)\pi t \end{aligned}$$



(b) A solução geral da equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + u_p(t),$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Como f é par, seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua, ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= 2a_0(f_{0,1}^{(1)}, 1) = 1, \\ a_n &= 2a_n(f_{0,1}^{(1)}, 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi t$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

com coeficientes A_n, B_n a determinar. Vamos supor que a derivada da série seja igual a série das derivadas:

$$u_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t),$$

$$u_p''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2\pi^2 A_n \cos n\pi t + n^2\pi^2 . B_n \operatorname{sen} n\pi t)$$

Substituindo-se $u_p(t), u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação diferencial obtemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t) \\
+ 3\sum_{n=1}^{\infty}(-n\pi A_n \operatorname{sen} n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t) \\
+ 2\Big(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\pi t + B_n \operatorname{sen} n\pi t)\Big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t
\end{aligned}
$$

que podemos reescrever como

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}[(2 - n^2\pi^2)B_n - 3n\pi A_n] \operatorname{sen} n\pi t \\
+ 2A_0 - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(2 - n^2\pi^2)A_n + 3n\pi B_n - a_n] \cos n\pi t = 0.
\end{aligned}
$$

De onde obtemos $A_0 = \dfrac{a_0}{4}$ e o sistema de equações

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
(2 - n^2\pi^2)A_n + 3n\pi B_n & = & a_n \\
-3n\pi A_n + (2 - n^2\pi^2)B_n & = & 0
\end{array}
\right.
$$

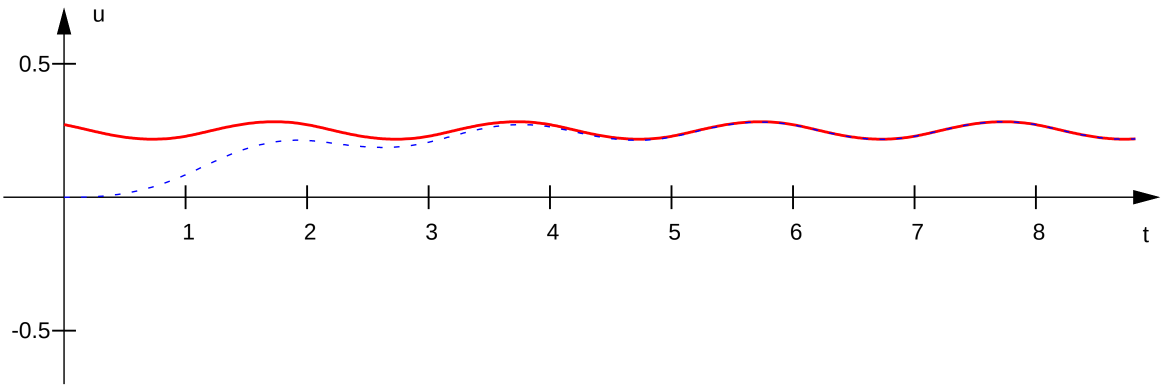
que tem solução

$$
A_n = \frac{(2 - n^2\pi^2)a_n}{\Delta_n}, \quad B_n = \frac{3n\pi a_n}{\Delta_n}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots
$$

em que $\Delta_n = 9n^2\pi^2 + (2 - n^2\pi^2)^2$. Assim uma solução particular da equação diferencial é

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{a_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2\pi^2)a_n}{\Delta_n} \cos n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\pi a_n}{\Delta_n} \operatorname{sen} n\pi t \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2\pi^2)((-1)^n - 1)}{n^2\Delta_n} \cos n\pi t + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\Delta_n} \operatorname{sen} n\pi t \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2\pi^2 - 2}{(2n+1)^2\Delta_{2n+1}} \cos(2n+1)\pi t - \frac{12}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\Delta_{2n+1}} \operatorname{sen}(2n+1)\pi t \end{aligned}$$

que é a solução estacionária.



3

Equação do Calor em uma Barra

Neste capítulo estudaremos a equação do calor unidimensional usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier.

Pode-se mostrar que a temperatura em uma barra homogênea, isolada dos lados, em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação do calor em uma barra**. Aqui $\alpha > 0$ é uma constante que depende do material que compõe a barra é chamada de **difusividade térmica**.

3.1 Extremidades a Temperaturas Fixas

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra isolada dos lados, de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e as temperaturas nas extremidades, T_1 e T_2, que são mantidas constantes com o tempo, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos inicialmente resolver o problema com $T_1 = T_2 = 0$, que chamamos de **condições de fronteira homogêneas**.

3.1.1 Condições de Fronteira Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos usar um método chamado **separação de variáveis**. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $\alpha^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (3.1) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.2) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que a temperatura nas extremidades da barra é mantida igual a zero, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ (a sua equação característica é $r^2 - \lambda = 0$) pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ na solução geral de $X'' - \lambda X = 0$,

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x},$$

obtemos que $0 = c_1 + c_2$, ou seja, $c_2 = -c_1$. Logo

$$X(x) = c_1 (e^{\sqrt{\lambda}\, x} - e^{-\sqrt{\lambda}\, x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ obtemos que $c_1(e^{\sqrt{\lambda}\, L} - e^{-\sqrt{\lambda}\, L}) = 0$. Logo, se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\, L} = e^{-\sqrt{\lambda}\, L}$$

o que só é possível se $\lambda = 0$, que não é o caso.

Se $\lambda = 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ na solução geral de $X'' - \lambda X = 0$,

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 x.$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ obtemos $c_2 L = 0$. Logo, também $c_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ na solução geral de $X'' - \lambda X = 0$,

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x),$$

obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x). \tag{3.3}$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos

$$c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo se $c_1 \neq 0$, então $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Portanto as condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (3.1) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$ e mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se estes valores de λ em (3.3) concluímos que o problema de valores de fronteira (3.1) tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.2) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0,$$

que tem solução fundamental

$$T_n(t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

tem soluções **soluções fundamentais**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = f(x),$$

para uma função $f(x)$ mais geral.
Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira possa ser escrita como uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \tag{3.4}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1,2,3\ldots \tag{3.5}$$

Vamos verificar que realmente (3.4) com os coeficientes dados por (3.5) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (3.4) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $x \in (0, L)$ tais que $f(x)$ é contínua. Vamos ver que (3.4) satisfaz a equação do calor. Cada termo da série satisfaz a equação do calor. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \right| \leq M \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) \right| \leq M \frac{n\pi}{L} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n$$

para $M = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx,\ 0 \leq x \leq L,\ 0 < t_1 \leq t \leq t_2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty.$$

Observamos que a temperatura em cada ponto da barra tende a zero quando t tende a $+\infty$, ou seja,

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\lim_{t \to \infty} u_n(x,t) \right) = 0, \quad \text{para } x \in [0, L],$$

que decorre da aplicação do Teorema 2.8 na página 200, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x,t)| \leq M \left(e^{-\frac{\alpha^2\pi^2}{L^2} t_1} \right)^n$$

para $0 < t_1 \leq t \leq t_2$, $0 \leq x \leq L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2\pi^2}{L^2} t_1} \right)^n < \infty.$$

Exemplo 3.1. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperatura de $0°$ C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600} t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja, usando a tabela na

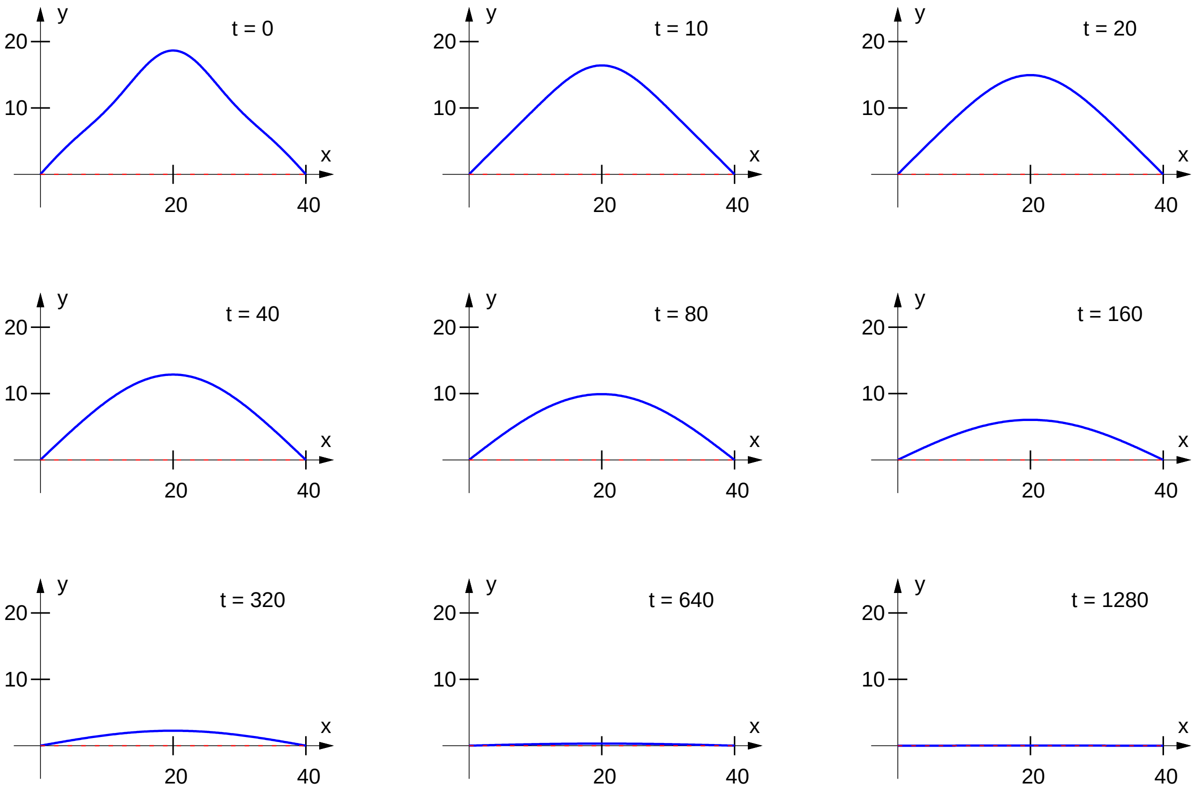


Figura 3.1 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.1 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

página 202, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned}
c_n = &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}\,dx \\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2},40) + 40 b_n(f^{(0)}_{1/2,1},40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1},40)\right) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{160\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução do problema é

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi x}{40}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}
\end{aligned}$$

3.1.2 Condições de Fronteira Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de x (derivada parcial em relação a t nula), tal que a segunda derivada (em relação a x) é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$. O que sugere como solução do problema inicial a função

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

em que $u_0(x,t)$ é a solução do problema com com condições homogêneas, ou seja,

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, precisamos que

$$f(x) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou ainda,

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada

f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série de Fourier de senos de $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{L}\right) x$ são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução

$$v(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x$$

chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**. Observe que a solução estacionária é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\; 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\; u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Exemplo 3.2. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10,\ u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - 10 - \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = 2\left(\frac{3}{2} b_n(f_{0,1/2}^{(1)}, 40) + 60 b_n(f_{1/2,1}^{(0)}, 40) - \frac{3}{2} b_n(f_{1/2,1}^{(1)}, 40)\right) \\ &= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2) \\ &= \frac{240 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 10 + \frac{x}{2}, \quad \text{para } x \in [0,L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x,t) = 10 + \frac{x}{2}.$$

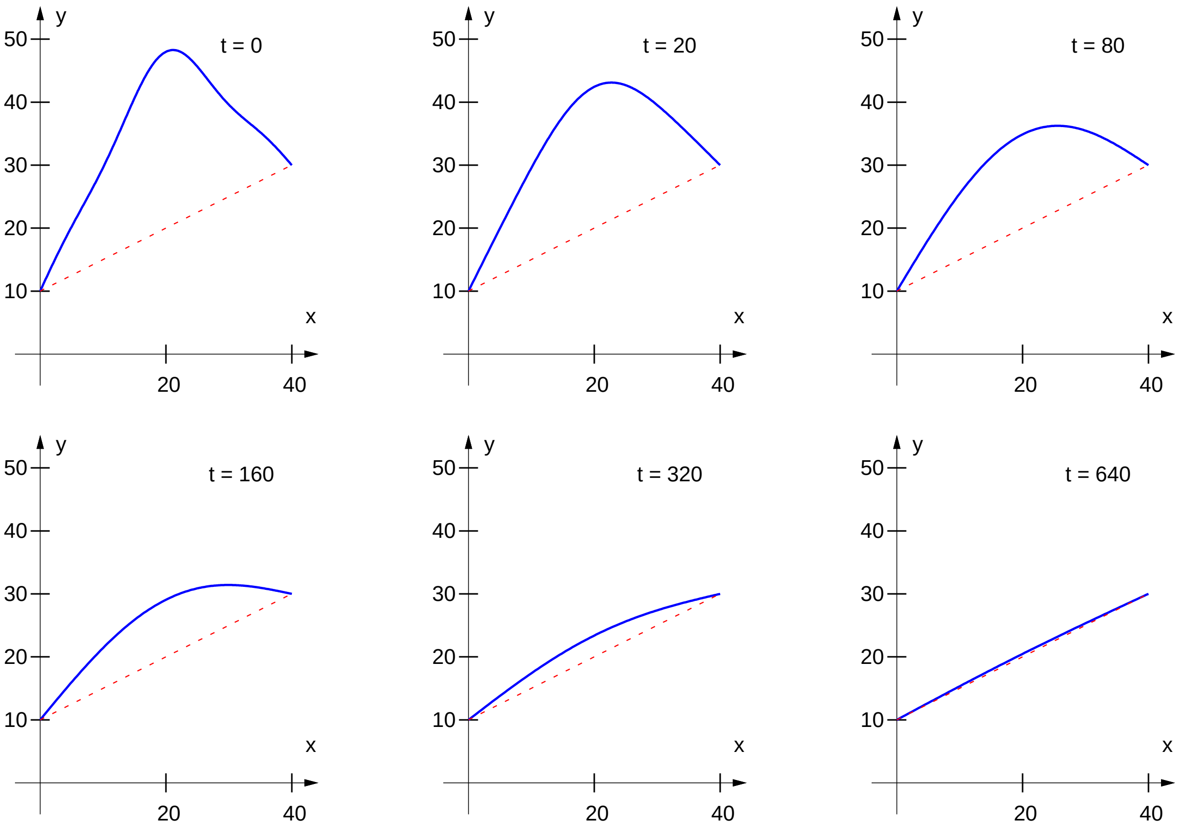


Figura 3.2 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios (respostas na página 316)

1.1. (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C.

(b) Determine o tempo necessário para que o centro da barra esfrie a temperatura de 10° C.

1.2. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de metal com 40 cm de comprimento, isolada dos lados e que está inicialmente a uma temperatura uniforme de 20° C, supondo que $\alpha = 1$ e que suas extremidades são mantidas a temperatura de 0° C e 60° C respectivamente. Qual a temperatura estacionária?

1.3. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$

3.2 Barra Isolada nas Extremidades

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra isolada dos lados, de comprimento L, sendo conhecidos a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, e sabendo que as extremidades são mantidas também isoladas, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $\alpha^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (3.6) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.7) \end{cases}$$

As condições $X'(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que a barra está isolada nas extremidades, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que $0 = c_1 - c_2$, ou seja, $c_2 = c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ obtemos $\sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,L} - e^{-\sqrt{\lambda}\,L})$. Logo, se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = -e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1.$$

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)),$$

obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x). \tag{3.8}$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

obtemos

$$c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Logo, se $c_2 \neq 0$, então $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Logo

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.6) tem solução não nula somente se

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se estes valores de λ em (3.8) vemos que o problema de valores de fronteira (3.6) tem soluções fundamentais

$$X_0 = 1 \quad \text{e} \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.7) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_n(t) = c_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \tag{3.9}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.4 na página 181, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\ c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1,2,3\ldots \tag{3.10}$$

Vamos verificar que realmente (3.9) com os coeficientes dados por (3.10) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (3.9) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $x \in (0, L)$ tais que $f(x)$ é contínua. Vamos ver que (3.9) satisfaz a equação do calor. Cada termo da série satisfaz a equação do calor. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$\left|c_n\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right| \le M\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1}$$

$$\left|c_n\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| \le M\frac{n\pi}{L}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1}$$

$$\left|c_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)\right| \le M\frac{n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1}$$

para $M = \frac{2}{L}\int_0^L |f(x)|dx,\ 0 < t_1 \le t \le t_2,\ 0 < x_1 \le x \le x_2 < L,\ n = 1,2,3,\ldots$ e que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t_1} < \infty.$$

Decorre da aplicação do Teorema 2.8 na página 200, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x,t)| \leq M e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1}$$

para $0 < t_1 \leq t \leq t_2$, $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t_1} < \infty,$$

que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\lim_{t\to\infty} u_n(x,t) \right) = c_0, \quad \text{para } x \in [0, L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a solução constante e igual ao valor médio da temperatura inicial, chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

Exemplo 3.3. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$ e as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

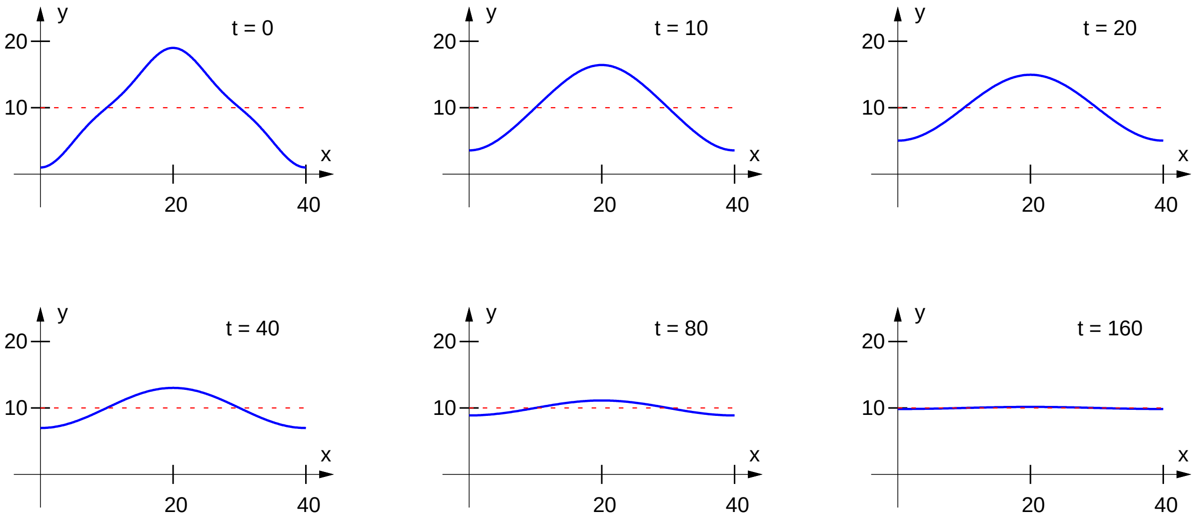


Figura 3.3 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.3 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 10,\\
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx\\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2},40) + 40\,b_n(f^{(0)}_{1/2,1},40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1},40)\right)\\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_0^{n\pi/2} + \frac{80}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{80}{n^2\pi^2} - \frac{80}{n^2\pi^2}\cos n\pi\\
&= 80\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Entretanto alguns termos são nulos:

$$c_{2k+1} = 0$$

$$c_{2k} = 80\frac{2\cos k\pi - 2}{(2k)^2\pi^2} = 40\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

e

$$c_{2\cdot 2l} = 0$$

$$c_{2(2l+1)} = 40\frac{-2}{(2l+1)^2\pi^2} = -\frac{80}{(2l+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 10+\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t} \\ &= 10+\frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{20}e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}\,t} \\ &= 10-\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{20}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}\,t} \end{aligned}$$

Observe que a solução tende a $v(x,t)=10$, quando t tende a mais infinito, que é a solução estacionária.

Exercícios (respostas na página 321)

2.1. Considere uma barra com 40 cm de comprimento , $\alpha = 1$, isolada dos lados e que está inicialmente a temperatura dada por $u(x,0) = 3x/2$, $0 \leq x \leq 40$ e que as extremidades estão isoladas.

(a) Determine $u(x,t)$.

(b) Qual a temperatura estacionária?

2.2. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}u(1,t) = 0,\ t \geq 0 \end{cases}$$

3.3 Condições de Fronteira Mistas e Equação não Homogênea

3.3.1 Condições de Fronteira Mistas

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (3.11) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.12) \end{cases}$$

As condições de fronteira $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$, obtemos que $0 = c_1 + c_2$, ou seja, $c_2 = -c_1$. Logo

$$X(x) = c_1 (e^{\sqrt{\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda} c_1 (e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$ (só é possível se $\lambda = 0$).

Se $\lambda = 0$ **:**

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 + c_2 x$, obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 x.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que também $c_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $c_2 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que

$$\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \text{para } n = 0, 2, 3, \ldots$$

Logo

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.11) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (3.12) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_{2n+1}(t) = e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

Então, para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de índice ímpar de $f(x)$.
Assim, pelo Corolário 2.9 na página 220, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \, dx.$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Exemplo 3.4. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, a extremidade da esquerda mantida a temperatura zero e extremidade da direita isolada, ou seja,

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{6400}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= 4\left(b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 80) - 20 b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 80)\right) \\ &= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s\Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\ &= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)}{(2k+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)}\right]\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{80}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{6400}t}.$$

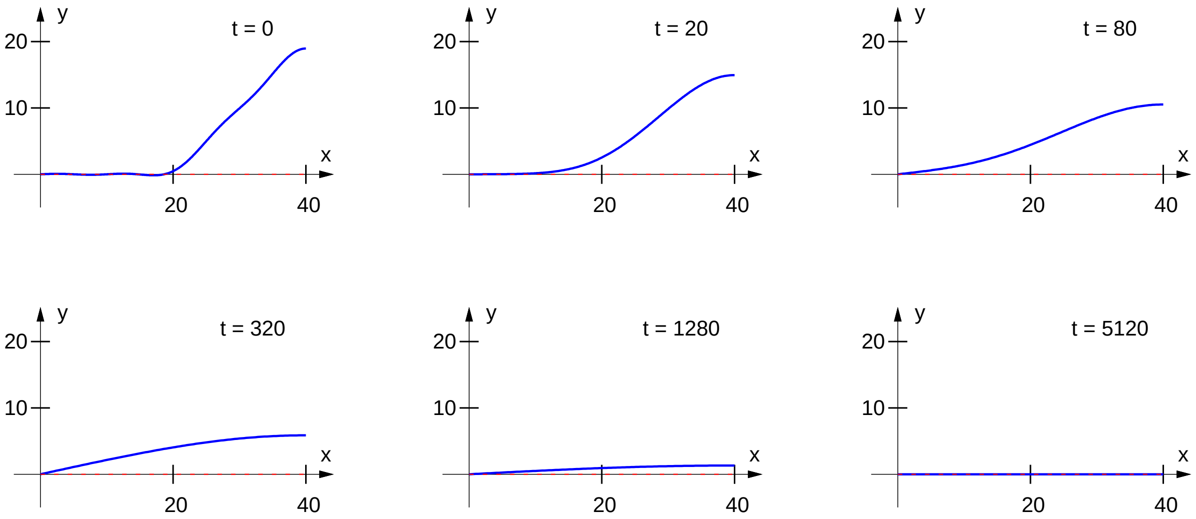


Figura 3.4 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.4 tomando apenas 6 termos não nulos da série.

3.3.2 Equação do Calor não Homogênea

Considere o seguinte PVIF

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{array}\right.$$

Vamos mostrar que a solução deste problema é dada por

$$u(x,t) = v(x) + u_0(x,t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1,\ v(L) = T_2 \end{array}\right.$$

e $u_0(x,t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) - v(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{array}\right.$$

Calculando as derivadas temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} g(x)$$

Substituindo-se na equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + g(x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = g(x)$$

$$u(x,0) = v(x) + u_0(x,0) = v(x) + f(x) - v(x) = f(x),$$

$$u(0,t) = v(0) + u_0(0,t) = v(0) = T_1,$$

$$u(L,t) = v(L) + u_0(L,t) = v(L) = T_2.$$

Como mostramos quando estudamos o problema homogêneo com condições de fronteira homogêneas

$$\lim_{t\to\infty} u_0(x,t) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) + \lim_{t\to\infty} u_0(x,t) = v(x), \quad \text{para } x \in [0,L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a $v(x)$, chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

Exemplo 3.5. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = 10 + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80},$$

Vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\pi^2}{640} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{80} \\ u(x,0) = f(x) = 10 + 10 \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{80}, \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10, \; u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = v(x) + u_0(x,t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} v'' = -\dfrac{\pi^2}{640} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{80} \\ v(0) = 10, \; v(40) = 30 \end{cases}$$

e $u_0(x,t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) - v(x), \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; u(40,t) = 0 \end{cases}$$

Logo

$$v(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10$$

$$u(x,t) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - v(x) = -\frac{x}{4}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= 2\left(-\frac{1}{4}a_n(f_{0,1}^{(1)})\right) \\ &= -\frac{20}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{20}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{20(-1)^n}{n\pi},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Aqui usamos a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores. Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) \quad = \quad 10\operatorname{sen}\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) = 10\operatorname{sen}\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10, \quad \text{para } x \in [0,40]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = 10\operatorname{sen}\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10.$$

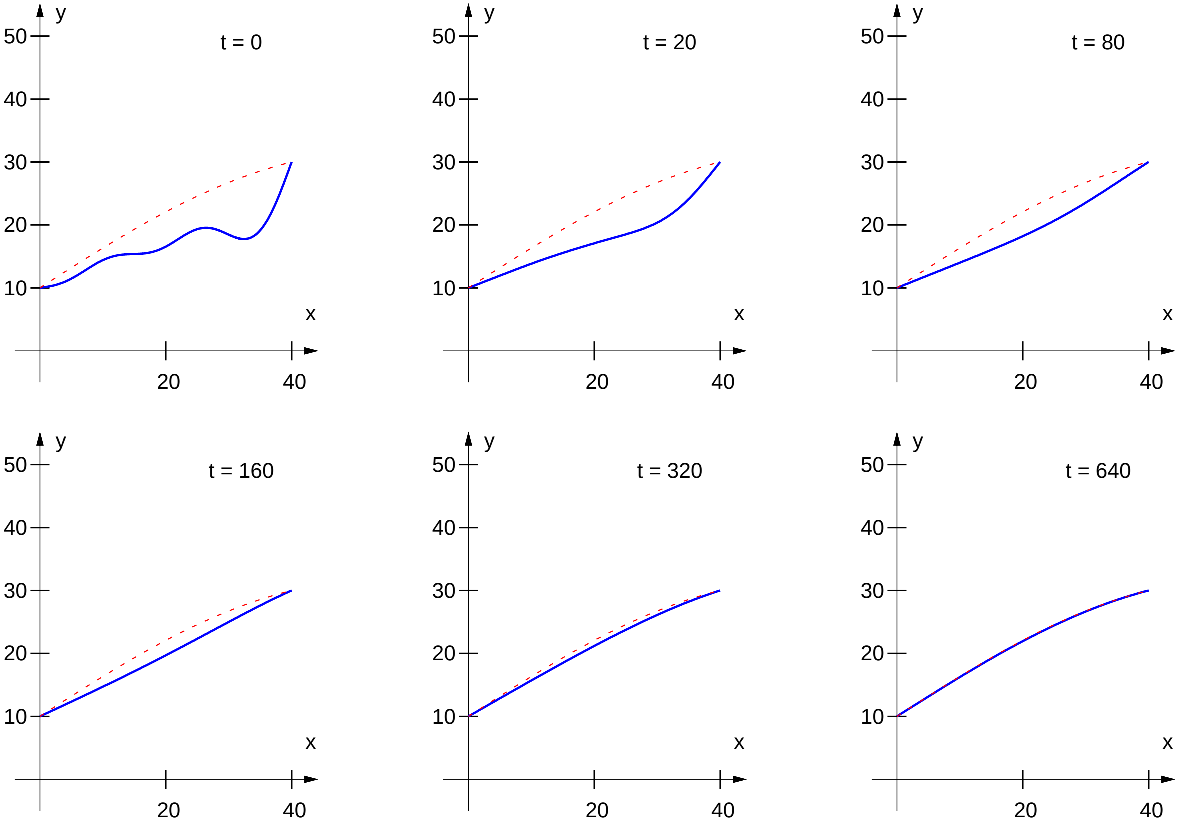


Figura 3.5 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.5 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Exercícios (respostas na página 324)

3.1. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo é mantida isolada e está mantida a temperatura fixa igual a zero do lado direito.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \; u(L,t) = 0. \end{cases}$$

3.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura fixa T_1 e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

3.3. Resolva o PVIF e determine a solução estacionária.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{3}{40} \\ u(x,0) = 20, \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; u(40,t) = 60 \end{cases}$$

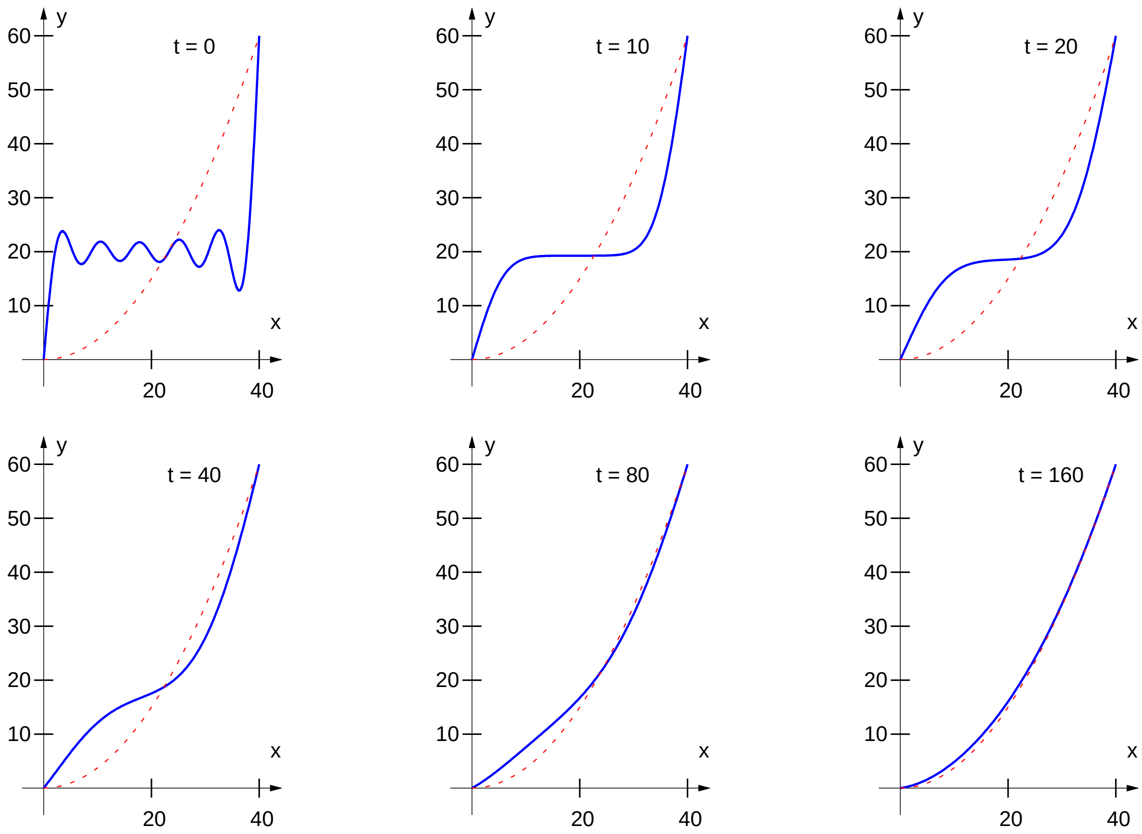


Figura 3.6 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exercício 3.3 tomando apenas 10 termos não nulos da série.

3.4 Respostas dos Exercícios

1. Extremidades a Temperaturas Fixas(página 291)

1.1. (a) Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) = 20, \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 2\left(20 b_n(f_{0,1}^{(0)}, 40)\right) \\ &= -20\frac{2}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) \\ &= \frac{40}{n\pi}(1-(-1)^n), \; n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{40}x\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

(b)

$$|u(x,t)| \le \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\pi^2}{1600}t}\right)^n = \frac{80}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi^2}{1600}t}}{1-e^{-\frac{\pi^2}{1600}t}} = \frac{80}{\pi}\frac{1}{e^{\frac{\pi^2}{1600}t}-1}, \text{ para } 0<x<40,$$

é equivalente a

$$e^{\frac{\pi^2}{1600}t} \ge \frac{\frac{80}{\pi}}{|u(x,t)|}+1.$$

Ou seja, se

$$t \ge \frac{1600}{\pi^2}\ln\left(\frac{\frac{80}{\pi}}{|u(x,t)|}+1\right) = \frac{1600}{\pi^2}\ln\left(\frac{\frac{80}{\pi}}{10}+1\right) \approx 200 \text{ segundos},$$

então a temperatura no centro da barra será menor ou igual a 10° C.

1.2. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) = 20,\ 0<x<40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 60 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \frac{3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = f(x) - \frac{3x}{2} = 20 - \frac{3x}{2}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 2\left(20 b_n(f_{0,1}^{(0)},40) - \frac{3}{2} b_n(f_{0,1}^{(1)},40)\right) \\ &= -\frac{40}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi} \\ &= -\frac{40}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos(n\pi)\right) \\ &= \frac{40(1+2(-1)^n)}{n\pi},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3x}{2} + \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = \dfrac{3x}{2}$.

1.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como
$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$
O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,
$$\frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = u(L,t) = X(L)T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0 & (3.13) \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 & (3.14) \end{cases}$$

A equação $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})\,x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\,x}$.
Se $\lambda = -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.
Se $\lambda < -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{-1-\lambda}\,x) + c_2 e^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}\,x))$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (3.13) tem solução não identicamente nula somente se$\lambda < -1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por
$$\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (3.13) tem solução
$$X(x) = c_1 e^{-x}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (3.14) obtemos

$$T'(t) + (1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2})T(t) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = c_2 e^{-t} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Vamos considerar as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x-t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)e^x$. Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)e^x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

2. Barra Isolada nas Extremidades (página 301)

2.1. (a) Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) = \frac{3x}{2},\ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx = 30, \\ c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}\,dx \\ &= 2\left(\frac{3}{2}a_n(f_{0,1}^{(1)})\right) = \frac{120}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_0^{n\pi} \\ &= 120\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 30 + \frac{120}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t} \\ &= 30 - \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{40}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t} \end{aligned}$$

(b) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 30.$

2.2. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t).$$

Dividindo-se por $X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X'(1) = 0, & (3.15) \\ T'(t) + (1-\lambda)T(t) = 0 & (3.16) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}.$

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(1) = 0$ implicam que (3.15) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$. Mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2\pi^2, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (3.15) tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \cos n\pi x, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2\pi^2$ na equação diferencial (3.16) obtemos

$$T'(t) + (1 + n^2\pi^2)T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_n(t) = e^{-(n^2\pi^2+1)\, t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$ e as condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$ tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(n\pi x)e^{-(1+n^2\pi^2)\, t} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\pi x e^{-n^2\pi^2\, t}. \tag{3.17}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\pi x.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.4 na página 181, se a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \int_0^1 f(x)dx, \; c_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x \, dx, \; n = 1,2,3\ldots \tag{3.18}$$

3. Condições de Fronteira Mistas e Equação não Homogênea (página 314)

3.1. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X(L) = 0 & (3.19) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.20) \end{cases}$$

As condições de fronteira $X'(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

Se $\lambda > 0$:
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que $0 = c_1 - c_2$, ou seja, $c_2 = c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{\lambda}\,x})$, obtemos que se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}\,L} = -e^{-\sqrt{\lambda}\,L}$$

o que não é possível.

Se $\lambda = 0$:
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X(x) = c_2$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1$, obtemos que também $c_1 = 0$.

Se $\lambda < 0$:
Substituindo-se $x = 0$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x))$, obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X = 0$ em $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $c_2 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que $\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, para $n = 0, 2, 3, \ldots$. Portanto

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.19) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \; \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (3.20) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_{2n+1}(t) = e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \; \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

Então, para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de índice ímpar de $f(x)$.

Assim, pelo Corolário 2.10 na página 225, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} \quad = \quad \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx.$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

3.2. Observamos que $v(x,t) = T_1$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que satisfaz as condições

$$u(0,t) = T_1, \; \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Logo a solução do problema é

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

em que $u_0(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$u(x,t) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}\, t}$$

é a solução do problema da valor inicial e de fronteiras se

$$u(x,0) = f(x) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

ou seja, os coeficientes são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_1] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx.$$

3.3. A solução de

$$\begin{cases} v'' = \frac{3}{40} \\ v(0) = 0,\ v(40) = 60 \end{cases}$$

é $v(x) = \dfrac{3}{80} x^2$. A solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 20 - \dfrac{3}{80} x^2,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = 20 - \frac{3}{80}x^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= 2\left(20 b_n(f_{0,1}^{(0)},40) - \frac{3}{80} b_n(f_{0,1}^{(2)},40)\right) \\
&= -\frac{40}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^3\pi^3}\left(2s\operatorname{sen} s + \left(2-s^2\right)\cos s\right)\Big|_0^{n\pi} \\
&= -\frac{40}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) - \frac{120}{n^3\pi^3}\left((2-n^2\pi^2)\cos(n\pi)-2\right) \\
&= \frac{40\left(2\pi^2n^2(-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2n^2 + 6\right)}{\pi^3\, n^3},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3}{80}x^2 + \frac{40}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2n^2(-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2n^2 + 6}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = \frac{3}{80}x^2.$$

4

Equação da Onda Unidimensional

4.1 Corda Elástica Presa nas Extremidades

Pode-se mostrar que o deslocamento vertical de cada ponto de uma corda elástica homogênea como função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

chamada **equação da corda elástica**. Aqui $a > 0$ é uma constante que depende do material que compõe a corda e mostraremos que é a **velocidade de propagação das ondas** na corda.

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda de comprimento L presa nas extremidades, sendo conhecidos o deslocamento inicial de cada ponto da corda, $f(x)$, e a velocidade inicial de cada ponto da corda, $g(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{array}\right.$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{array}\right.$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0. \end{array}\right.$$

4.1.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa nas extremidades, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Calculando-se as derivadas parciais e substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \ X(L) = 0 & (4.1) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T'(0) = 0 & (4.2) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0).$$

A equação (4.1) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1,2,3,\ldots$$

e tem como soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.2) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0.$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\frac{an\pi}{L}i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para $T(t)$ é

$$T(t) = c_1\cos\frac{an\pi t}{L} + c_2\operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L}.$$

Com a condição inicial $T'(0) = 0$ concluímos que a equação diferencial para $T(t)$ com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.3}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.4}$$

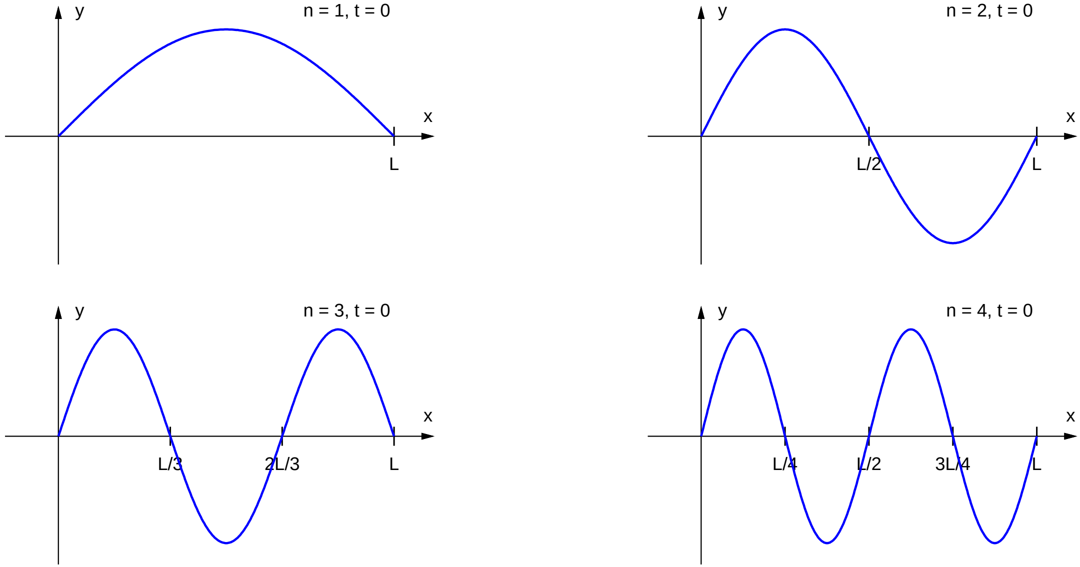


Figura 4.1 – Modos naturais de vibração $u_n(x,t) = \cos\frac{an\pi t}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$ e $t = 0$.

Para cada n, a solução fundamental (4.4) do problema (4.3)

$$u_n(x,t) = [\cos \frac{an\pi t}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

é chamada **modo normal (ou natural) de vibração**, **onda estacionária** ou **harmônico** e o seu período fundamental na variável x é igual a $\frac{2L}{n}$ e é chamado **comprimento de onda** do modo normal. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma cossenoidal $R_n(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$ com frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais** da corda. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são $T_n = \frac{2L}{na}$. Observe, também, que cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).

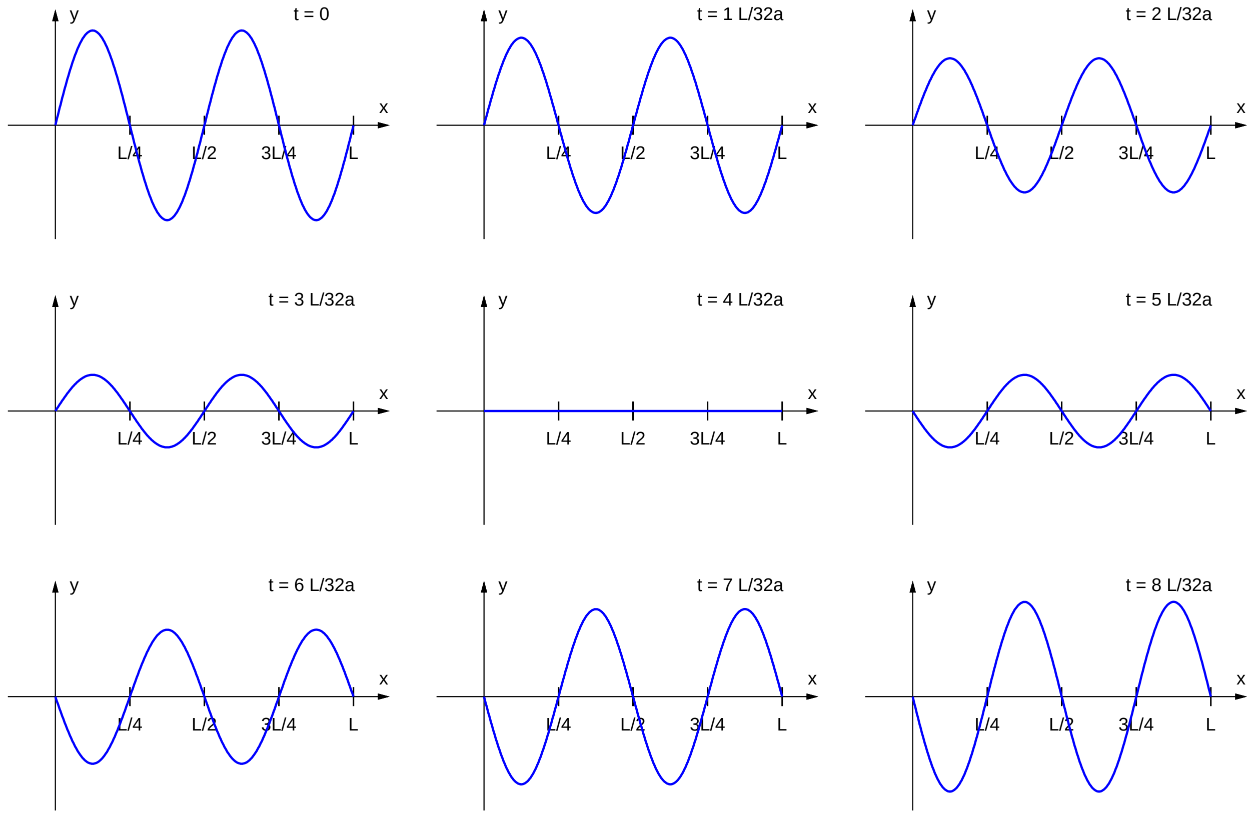


Figura 4.2 – Modo natural de vibração $u_4(x,t) = \cos\frac{4a\pi t}{L}\,\text{sen}\,\frac{4\pi x}{L}$, para $t = 0, \ldots, \frac{L}{4a}$.

Combinações lineares das soluções fundamentais são também solução (verifique!),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira é uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L} \tag{4.5}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{2L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.4) do problema (4.3) na forma (verifique!)

$$u_n(x,t) = \cos\frac{an\pi t}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x-at)}{L} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x+at)}{L}\right)$$

Substituindo-se esta expressão na série (4.5) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x-at)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x+at)}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at)+\tilde{f}(x+at)\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar e periódica de período $2L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a que se refletem e se invertem em $x = 0$ e $x = L$.

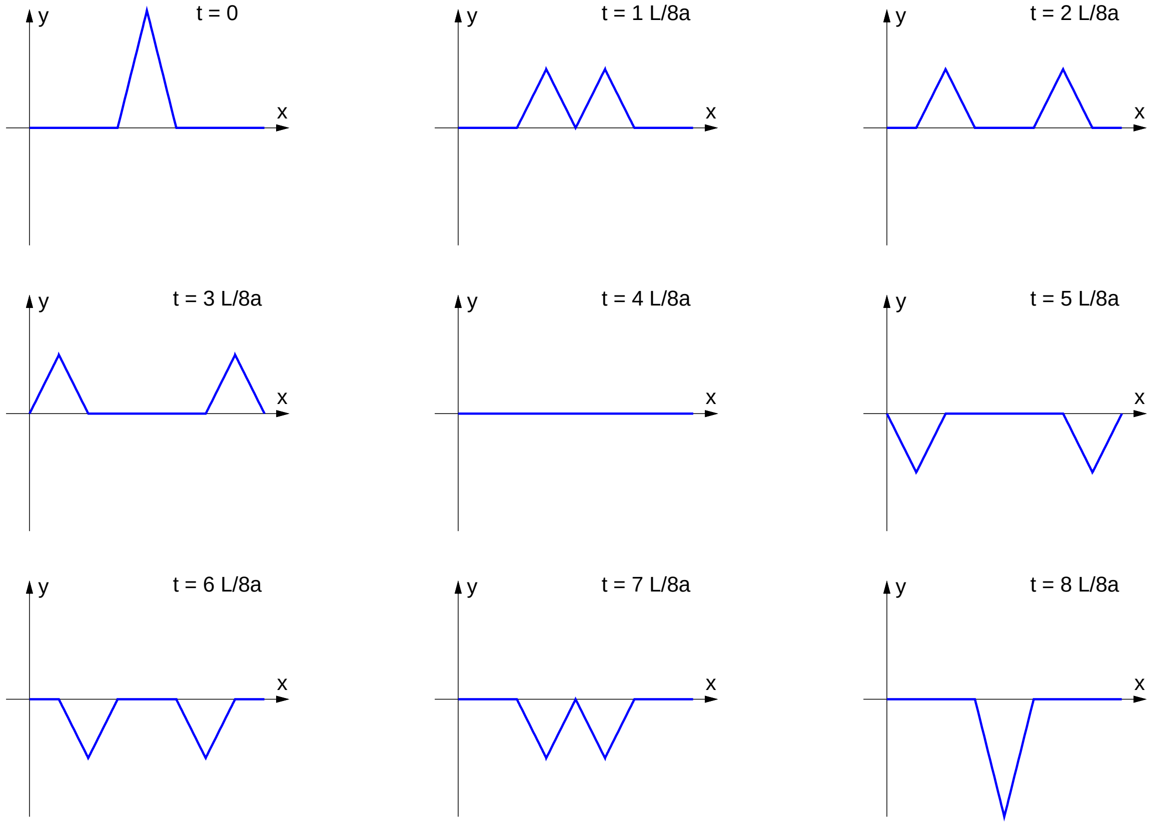


Figura 4.3 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa nas extremidades com velocidade inicial nula, para t variando entre 0 e $T/2$.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com as suas derivadas, f' e f'', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{f}''$ é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert, (4.6), satisfaz a equação da onda e $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in [0, L]$.

Exemplo 4.1. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução em série é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$. Usando a tabela na página

202, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\,\text{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2},40) + 40 b_n(f^{(0)}_{1/2,1},40) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1},40)\right) \\
&= \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\, s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{160}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{160\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}
$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{160(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{n^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} \\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,\text{sen}\,\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20}
\end{aligned}
$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t) + \tilde{f}(x+2t)\right),$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar e periódica de período 80, ou seja, $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}40+x, & \text{se} \quad -40\le x<-20,\\ x, & \text{se} \quad -20\le x<20,\\ 40-x, & \text{se} \quad 20<x\le 40,\end{cases} \qquad \tilde{f}(x+80)=\tilde{f}(x).$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T=40$ segundos.

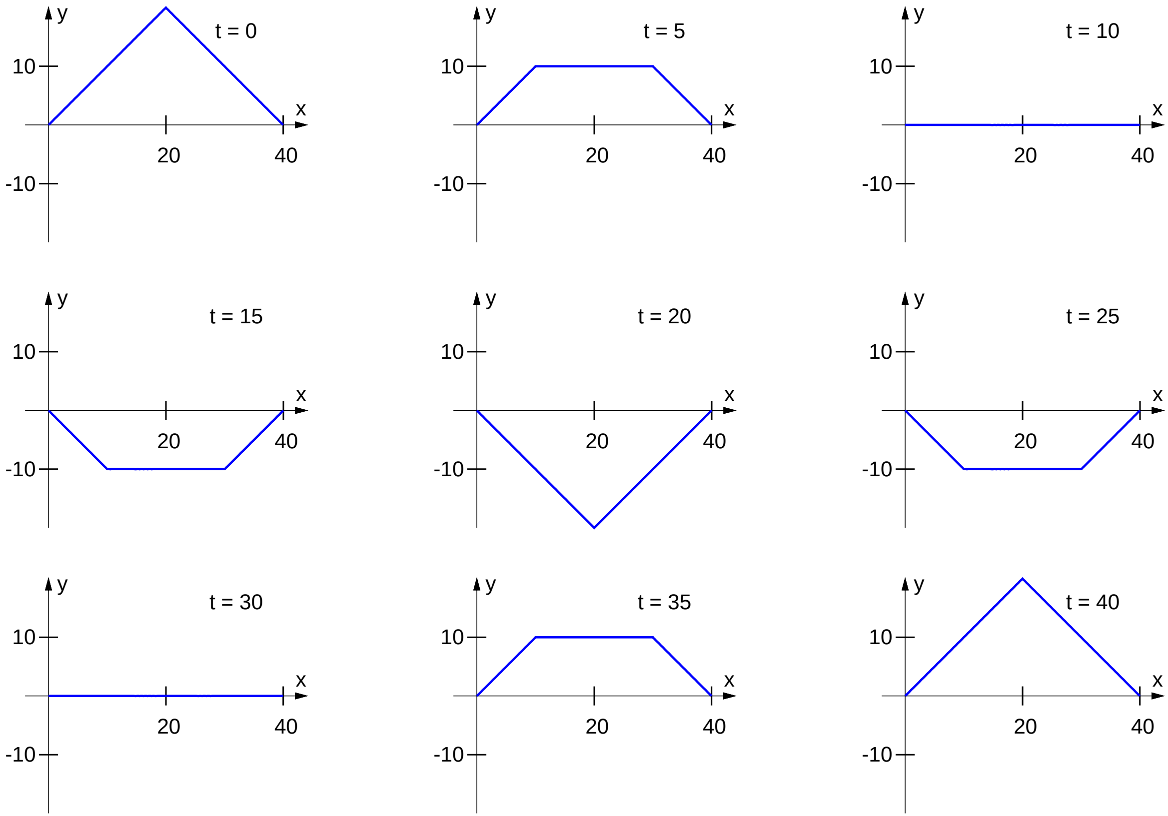


Figura 4.4 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.1.

4.1.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias, uma com condições de fronteira e a outra com condição inicial:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \ X(L) = 0 & (4.7) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0 & (4.8) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

A condição $T(0) = 0$, decorre do fato de que o deslocamento inicial é nulo, ou seja,

$$0 = u(x,0) = X(x)T(0).$$

A equação (4.7) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1,2,3,\ldots$$

e tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.8) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\frac{an\pi}{L}i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para $T(t)$ é

$$T(t) = c_1\cos\frac{an\pi t}{L} + c_2\operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L}.$$

Usando a condição inicial $T(0) = 0$ concluímos que a equação diferencial para $T(t)$ com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad u(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.9}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.10}$$

chamadas **modos normais (ou naturais) de vibração**, **ondas estacionárias** ou **harmônicos** e o seu período fundamental na variável x é igual a $\frac{2L}{n}$ e é chamado **comprimento de onda** do modo normal. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma senoidal $R_n(t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$ com frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais** da corda. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são $T_n = \frac{2L}{na}$. Observe, também, que cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).

Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}. \tag{4.11}$$

Para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, devemos ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \tag{4.12}$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(x)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \frac{2L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.10) do problema (4.9) na forma (verifique!)

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{n\pi(x - at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x + at)}{L} \right)$$

Substituindo-se esta expressão na série (4.11) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrita como

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos \frac{n\pi(x - at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x + at)}{L} \right).$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (4.12), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(x')dx' = a\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos\frac{n\pi(x-at)}{L} - \cos\frac{n\pi(x+at)}{L}\right).$$

em que $\tilde{g}$ é a extensão de g que é ímpar e periódica de período $2L$. Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(x')dx'. \tag{4.13}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Definindo $h(x) = \int_0^x \tilde{g}(x')dx'$, podemos escrever a solução de d'Alembert como

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\left(h(x+at) - h(x-at)\right).$$

A função $h(x)$ é periódica de período $2L$ e par (verifique!). A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a que se refletem e se invertem em $x = 0$ e $x = L$.

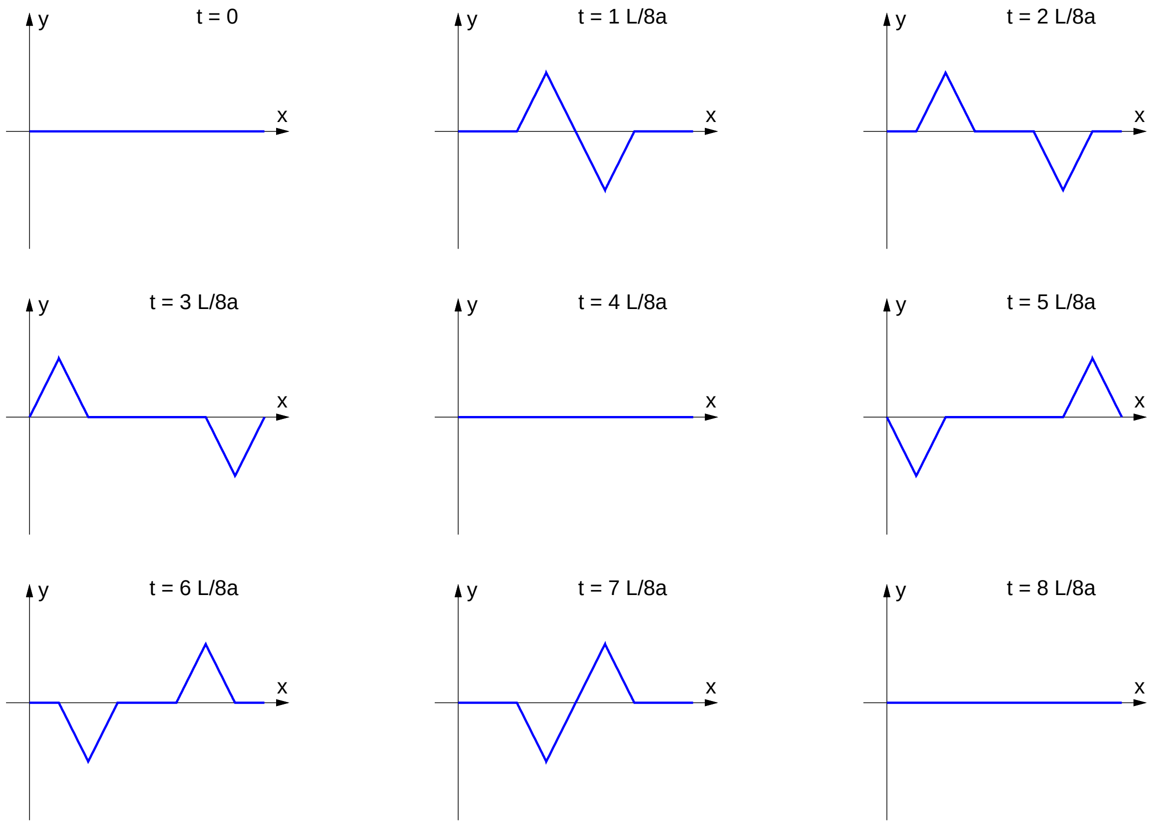


Figura 4.5 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa nas extremidades com posição inicial nula, para t variando entre 0 e $T/2$.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se g é contínua por partes com a sua derivada, g', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{g}'$ é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert, (4.13), satisfaz a equação da onda e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ para todo $x \in (0,L)$ onde g é contínua.

Exemplo 4.2. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x/10, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 4 - x/10, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.1 na página 341 dividos por 10, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{16 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{320}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \tilde{g}(x')dx' = \frac{1}{4} \left(h(x+2t) - h(x+2t) \right),$$

em que $\tilde{g}$ é a extensão de g que é ímpar e periódica de período 80, ou seja, $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 4 + x/10, & \text{se} \quad -40 \le x < -20, \\ x/10, & \text{se} \quad -20 \le x < 20, \\ 4 - x/10, & \text{se} \quad 20 < x \le 40, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x+80) = \tilde{g}(x)$$

e

$$h(x) = \int_0^x \tilde{g}(y)dy = \begin{cases} 40 - (40+x)^2/20, & \text{se} \quad -40 \le x < -20, \\ x^2/20, & \text{se} \quad -20 \le x < 20, \\ 40 - (40-x)^2/20, & \text{se} \quad 20 < x \le 40, \end{cases} \qquad h(x+80) = h(x).$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T = 40$ segundos.

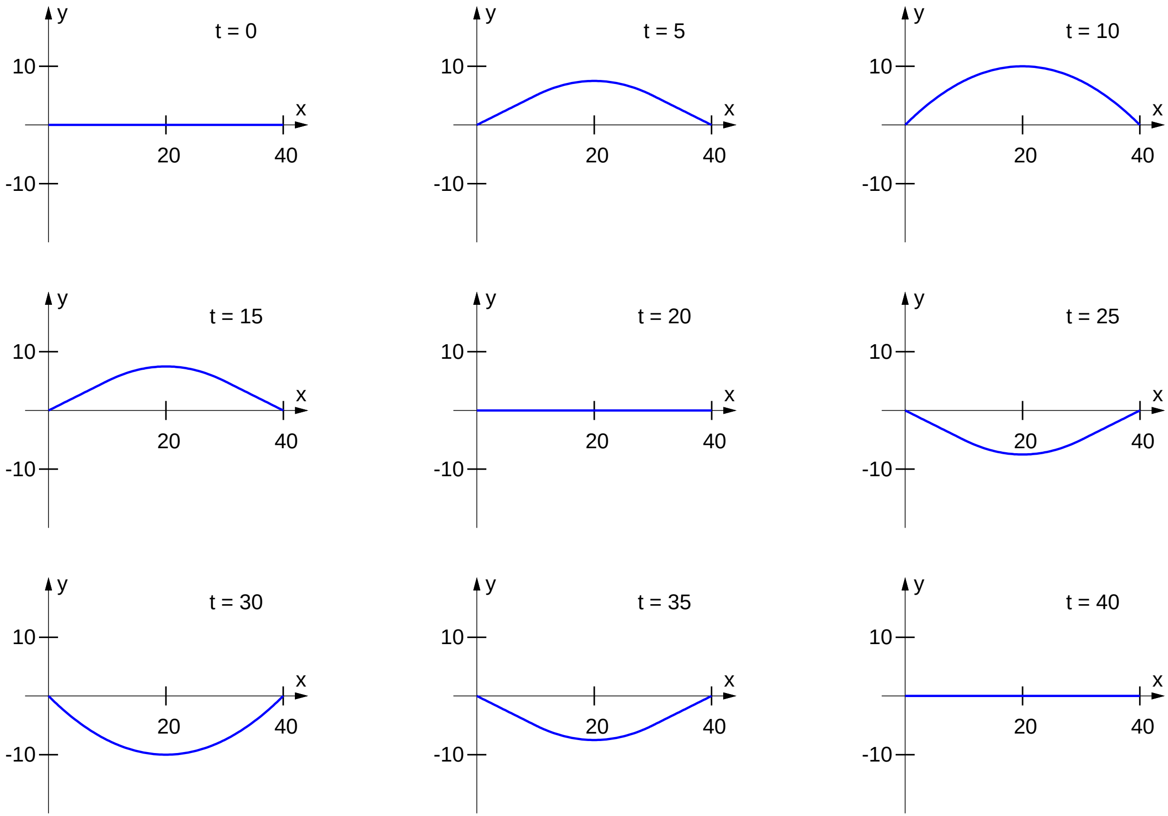


Figura 4.6 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.2.

4.1.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Como observamos anteriormente a solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{na\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{na\pi t}{L} \end{aligned}$$

em que c_n e $\frac{na\pi}{L} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\frac{na\pi}{L} d_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Para cada x, a solução, $u(x,t)$, é periódica com relação a t com período $T = \dfrac{2L}{a}$.

As funções

$$u_n(x,t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{na\pi t}{L} + d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{na\pi t}{L}$$

são chamadas **modos normais (ou naturais) de vibração**, **ondas estacionárias** ou **harmônicos**. Substituindo-se $(c_n, d_n) = (R_n \cos\delta_n, R_n \operatorname{sen}\delta_n)$ os harmônicos podem ser escritos como (verifique!)

$$u_n(x,t) = \left[R_n \cos\left(\frac{na\pi t}{L} - \delta_n\right)\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Portanto, os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitudes $R_n \cos\left(\frac{na\pi t}{L} - \delta_n\right)$ e frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais** da corda. Logo os períodos fundamentais são $T_n = \frac{2L}{na}$. Cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).
Usando (4.6) na página 339 e (4.13) na página 339 podemos escrever a solução do problema de valor inicial e de fronteira como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy \tag{4.14}$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar e periódica de período $2L$ e $\tilde{g}$ é a extensão de g que é ímpar e periódica de período $2L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com suas derivadas, f' e f'', também contínuas por partes e g é contínua por partes com a sua derivada, g', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{g}'$ e $\tilde{f}''$ são contínuas em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert, (4.14), satisfaz a equação da onda e

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } x \in [0,L];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } x \in (0,L) \text{ onde } g \text{ é contínua.}$$

Exemplo 4.3. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40, \end{cases} \quad g(x) = \frac{f(x)}{10}.$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas dados nos Exemplos 4.1 e 4.2, ou seja,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \ n = 1,2,3\ldots$$

$$\frac{n\pi}{20} d_n = \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{16 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} \ n = 1,2,3\ldots$$

$$d_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3}, \ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}+\frac{320}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}\\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20}\\
&\quad+\frac{320}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}
\end{aligned}$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t)+\tilde{f}(x+2t)\right)+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\tilde{g}(y)dy\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t)+\tilde{f}(x+2t)\right)+\frac{1}{4}\left(h(x+2t)-h(x+2t)\right),
\end{aligned}$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar e periódica de período 80, ou seja, $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}40+x, & \text{se} \quad -40\le x<-20,\\ x, & \text{se}\quad -20\le x<20,\\ 40-x, & \text{se}\quad 20<x\le 40,\end{cases}\qquad \tilde{f}(x+80)=\tilde{f}(x),$$

$\tilde{g}$ é a extensão de g que é ímpar e periódica de período 80, ou seja, $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}4+x/10, & \text{se}\quad -40\le x<-20,\\ x/10, & \text{se}\quad -20\le x<20,\\ 4-x/10, & \text{se}\quad 20<x\le 40,\end{cases}\qquad \tilde{g}(x+80)=\tilde{g}(x)$$

e

$$h(x)=\int_0^x\tilde{g}(y)dy=\begin{cases}40-(40+x)^2/20, & \text{se}\quad -40\le x<-20,\\ x^2/20, & \text{se}\quad -20\le x<20,\\ 40-(40-x)^2/20, & \text{se}\quad 20<x\le 40,\end{cases}\qquad h(x+80)=h(x).$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T = 40$ segundos.

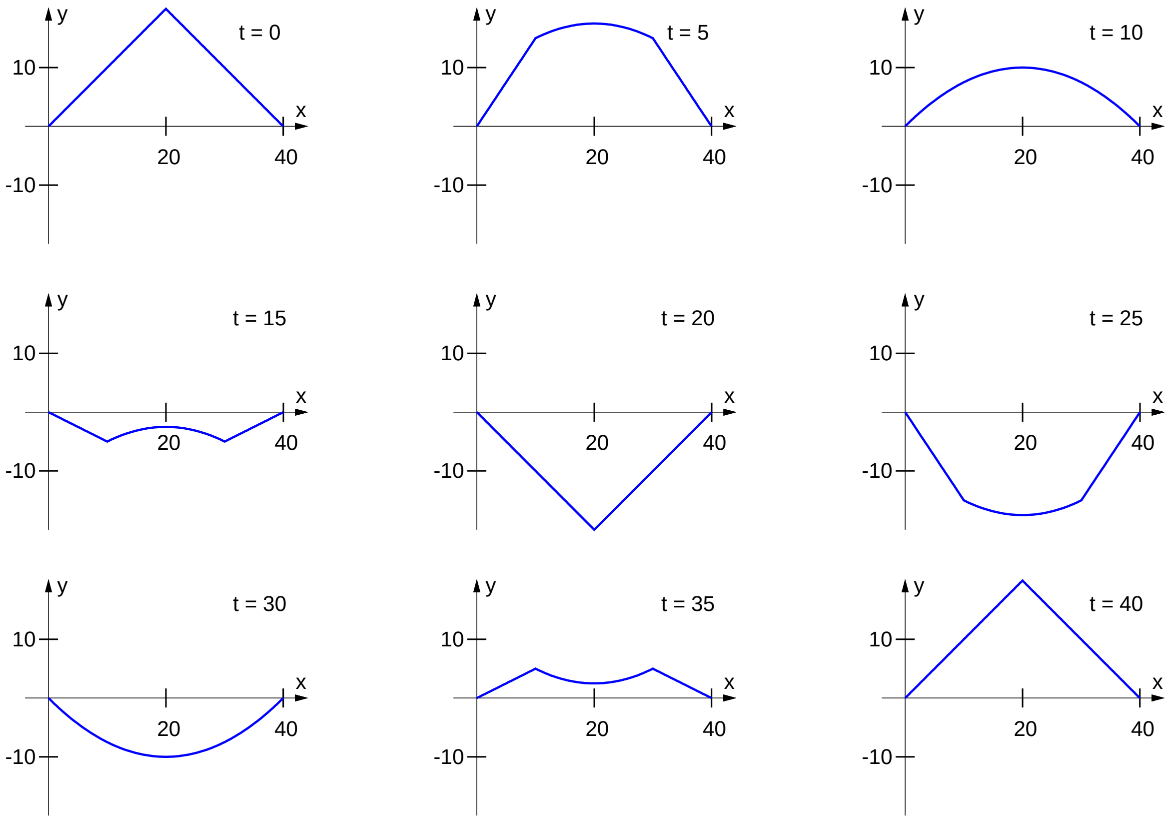


Figura 4.7 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.3.

Exercícios (respostas na página 394)

1.1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica de período T. Mostre que

$$\int_0^T g(x)dx = \int_a^{a+T} g(x)dx,$$

para $a \in \mathbb{R}$.

1.2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, ímpar e periódica de período T. Seja

$$h(x) = \int_0^x g(y)dy.$$

Mostre que

(a) $h(x)$ é periódica de período T.

(b) $h(x)$ é par.

1.3. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

1.4. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por $\text{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$. Qual o período fundamental da corda?

1.5. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

1.6. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por $\operatorname{sen}(\pi x/20)$, para $0 < x < 40$. Qual o período fundamental da corda?

1.7. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ solta de forma que a velocidade inicial seja $g(x)$ em que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

1.8. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira usando o método de separação de variáveis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \quad 0 < x < L. \\ u(0,t) = 0, \ \ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

1.9. Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t); \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; \quad 0 < x < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x); \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

1.10. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Verifique que se f é contínua por partes com suas derivadas, f' e f'', também contínuas por partes e g é contínua por partes com a sua derivada, g', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{g}'$ e $\tilde{f}''$ são contínuas em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy$$

satisfaz a equação da onda e

$$u(x,0) = f(x), \text{ para } x \in [0,L],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \text{ para } x \in (0,L) \text{ onde } g \text{ é contínua},$$

$$u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0.$$

Aqui $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são as extensões ímpares de período $2L$ de f e g respectivamente.

4.2 Corda Elástica Solta em uma Extremidade

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

4.2.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (4.15) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \; T'(0) = 0 & (4.16) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$. A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como foi mostrado na Subseção 3.3.1 página 302 para o caso da equação do calor, que (4.15) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0,1,2,3,\ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.15) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.16) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.17}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{4.18}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $f(x)$ de período L. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.20}$$

Assim, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} \quad = \quad \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.21}$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.18) do problema (4.17) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right). \end{aligned}$$

Substituindo-se esta expressão na série (4.20) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at) \right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$. Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a que se refletem em $x = L$ e se refletem e se invertem em $x = 0$.

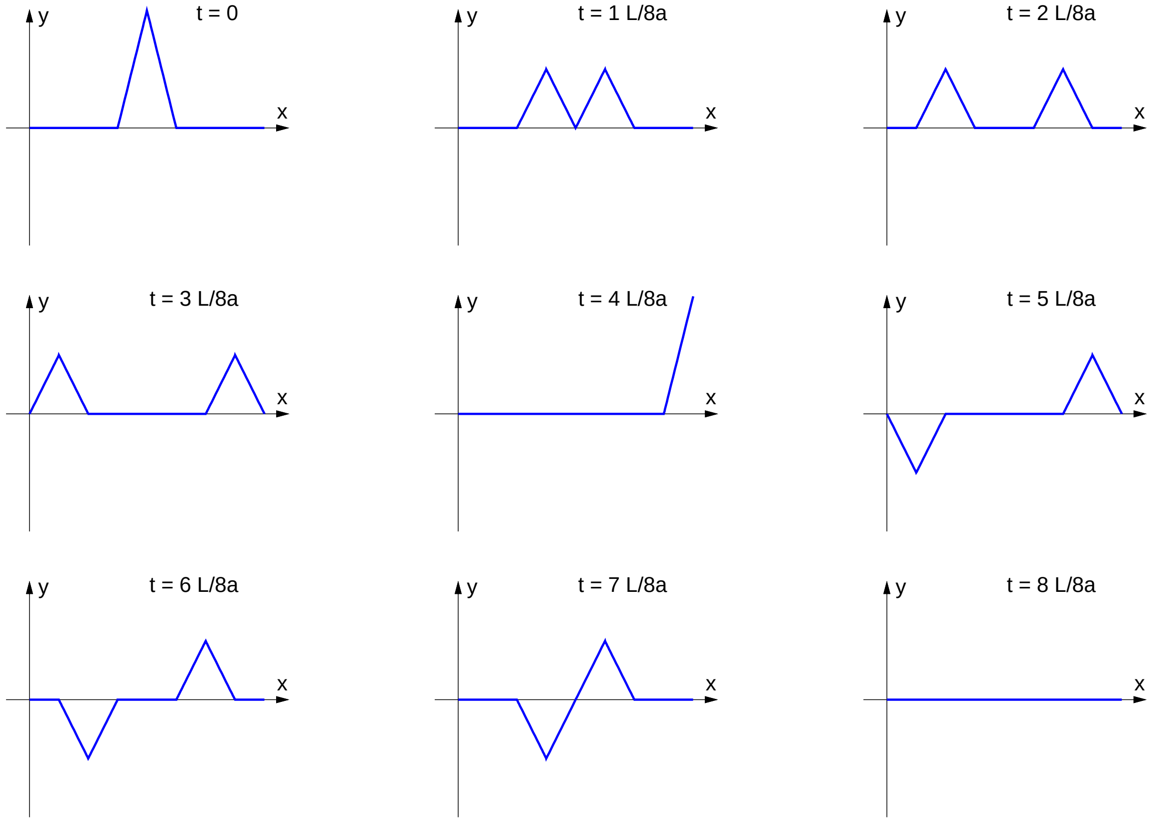


Figura 4.8 – Solução, $u(x, t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre 0 e $T/4$.

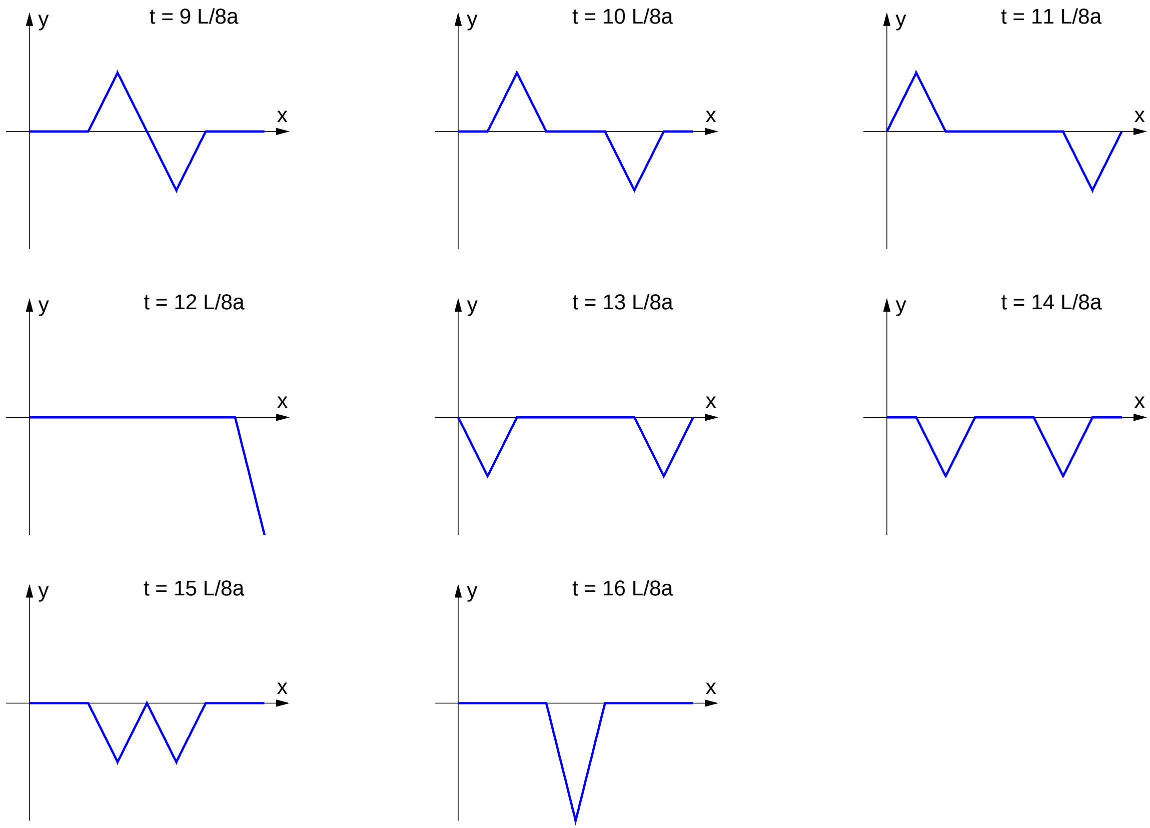


Figura 4.9 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre $T/4$ e $T/2$.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com as suas derivadas, f' e f'', também contínua por partes, então para (x,t) tal que $\tilde{f}''$ é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert, (4.22), satisfaz a equação da onda e $u(x,0) = f(x)$ para todo $x \in [0, L]$.

Exemplo 4.4. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa somente na extremidade esquerda, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0. \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= 4\left(b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}},80) - 20b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}},80)\right)\\
&= 4\cdot\frac{80}{(2n+1)^2\pi^2}(-s\cos s+\operatorname{sen}s)\Big|^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}_{\frac{(2n+1)\pi}{4}} - 20\cdot 4\cdot\frac{-1}{(2n+1)\pi}\cos s\Big|^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}_{\frac{(2n+1)\pi}{4}}\\
&= \frac{320}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{80}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi t}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t)+\tilde{f}(x+2t)\right),$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x=40$ e periódica de período 160, ou seja, $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0\le x<20,\\ x-20, & \text{se} \quad 20\le x<40,\\ f(80-x), & \text{se} \quad 40\le x\le 80,\\ f(-x), & \text{se} \quad -80\le x<0,\end{cases} \qquad \tilde{f}(x+160)=\tilde{f}(x).$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T=80$ segundos.

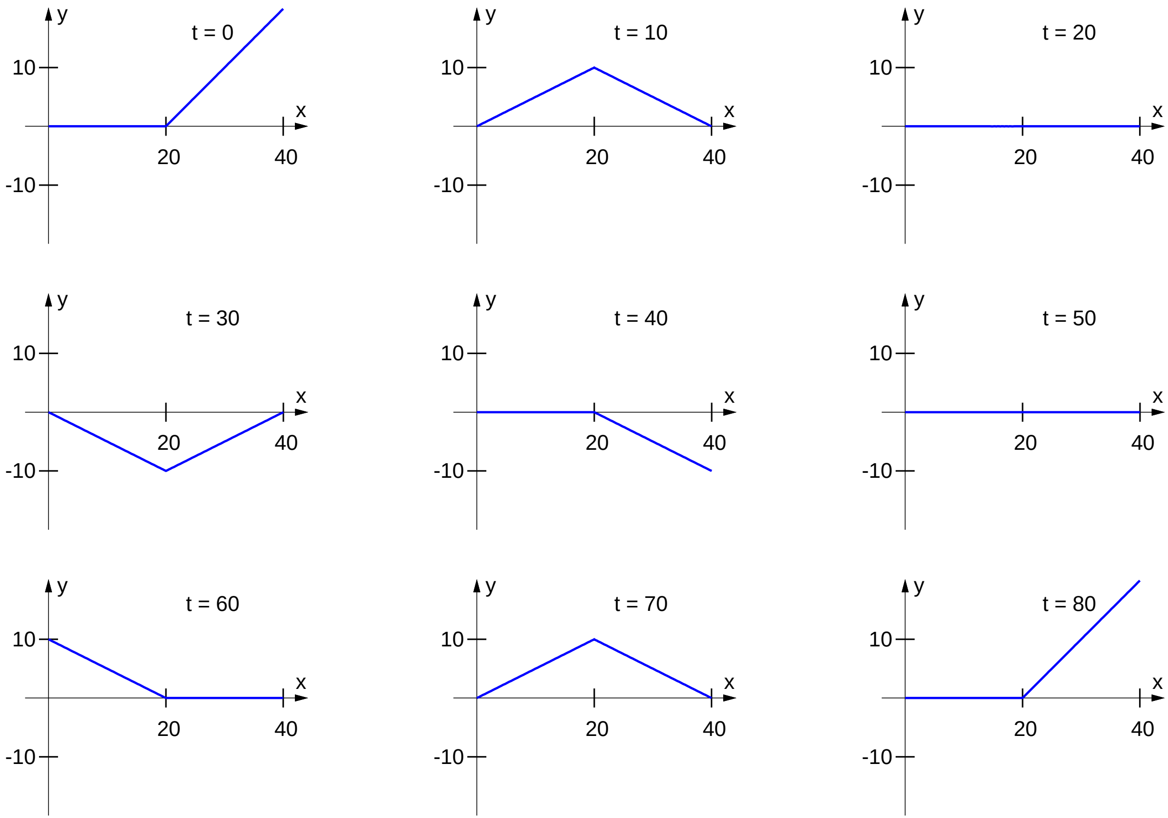


Figura 4.10 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.4.

4.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X'(L) = 0, & (4.23) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0. & (4.24) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$. A condição $T(0) = 0$, decorre do fato de que a posição inicial é nula, ou seja,

$$0 = u(x,0) = X(x)T(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como no caso do exercício sobre a equação do calor resolvido na página 314, que (4.23) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.23) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \; \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.24) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad u(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.25}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x) T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \tag{4.26}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $g(x)$ de período L. Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ g(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.28}$$

Assim, se a função $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L} c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx. \tag{4.29}$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.26) do problema (4.25) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} - \cos \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (4.28), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at} \hat{g}(y)dy = a \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\cos \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} - \cos \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right).$$

em que $\hat{g}$ é a extensão de g que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$. Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{g}(y)dy. \tag{4.30}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Exemplo 4.5. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que $\frac{(2n+1)\pi}{40} c_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 divididos por 10, ou seja,

$$\frac{(2n+1)\pi}{40}c_{2n+1} = \frac{32}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{8}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{320}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right]\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\tilde{g}(y)dy,$$

em que $\tilde{g}$ é a extensão de g que é simétrica em relação a reta $x = 40$, ímpar e periódica de período 160, ou seja, $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \le x < 20, \\ x/10 - 2, & \text{se} \quad 20 \le x \le 40, \\ g(80-x), & \text{se} \quad 40 < x \le 80, \\ g(-x), & \text{se} \quad -80 < x \le 0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x+160) = \tilde{g}(x).$$

Seja

$$h(x) = \int_0^x \tilde{g}(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \le x < 20, \\ x^2/20 - 2x + 20, & \text{se} \quad 20 \le x < 40, \\ -x^2/20 + 6x - 140, & \text{se} \quad 40 \le x \le 60, \\ 40, & \text{se} \quad 60 < x \le 80 \\ h(-x), & \text{se} \quad -80 \le x \le 0 \end{cases} \qquad h(x+160) = h(x),$$

então

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\tilde{g}(y)dy = \frac{1}{4}\left(h(x+2t) - h(x+2t)\right).$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T = 80$ segundos.

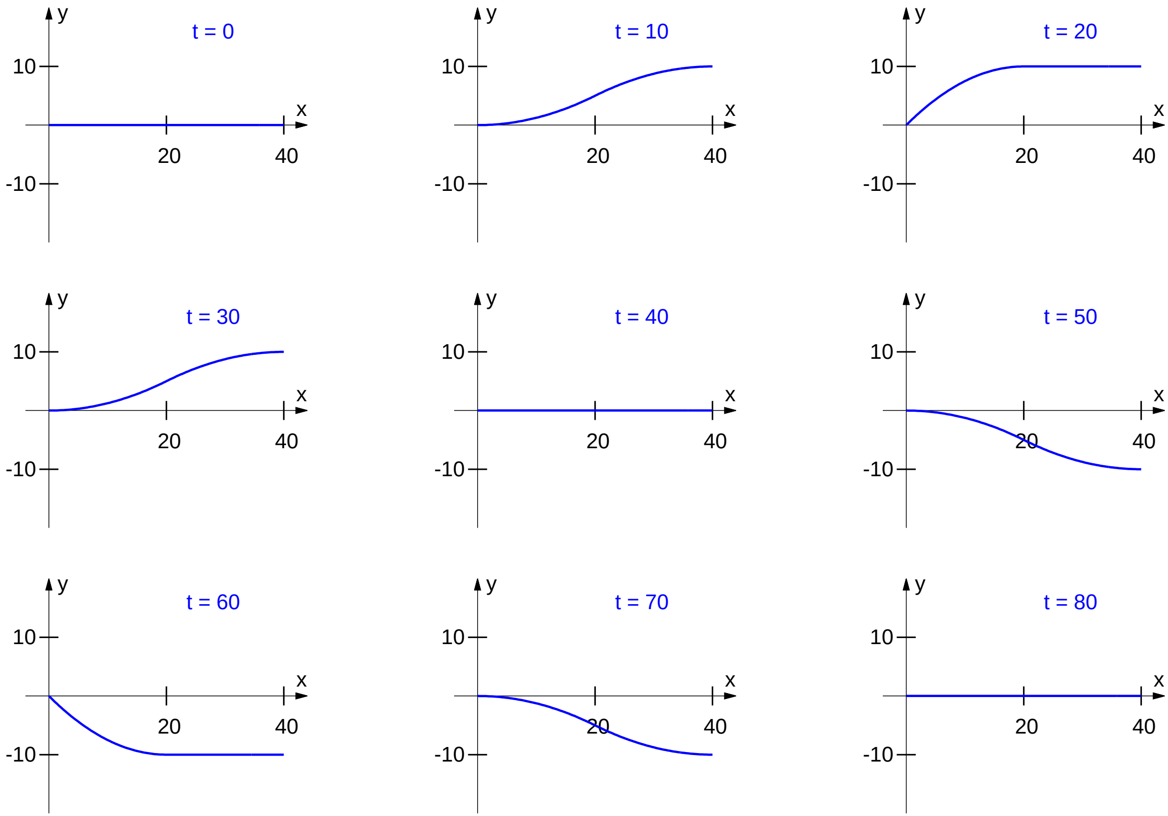


Figura 4.11 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.5.

4.2.3 Caso Geral

Voltando ao caso geral em que o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{array} \right.$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{g}(y)dy$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$ e $\hat{g}$ é a extensão de g que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = L$ e periódica de período $4L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

Exemplo 4.6. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, com deslocamento inicial dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

e com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 e $\frac{(2n+1)\pi}{40} d_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $g(x)$ do Exemplo 4.5 na página 378, ou seja,

$$c_{2n+1} = \frac{320}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{80}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\frac{(2n+1)\pi}{40}d_{2n+1} = \frac{32}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{8}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi t}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80} + \\ &+ \frac{320}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right]\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}. \end{aligned}$$

A solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t) + \tilde{f}(x+2t)\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\tilde{g}(y)dy,$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é ímpar, simétrica em relação a reta $x = 40$ e periódica de período 160, ou seja, $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \le x < 20, \\ x-20, & \text{se} \quad 20 \le x < 40, \\ f(80-x), & \text{se} \quad 40 \le x \le 80, \\ f(-x), & \text{se} \quad -80 \le x < 0, \end{cases} \qquad \tilde{f}(x+160) = \tilde{f}(x).$$

e $\tilde{g}$ é a extensão de g que é simétrica em relação a reta $x = 40$, ímpar e periódica de período 160, ou seja, $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \le x < 20, \\ x/10-2, & \text{se} \quad 20 \le x \le 40, \\ g(80-x), & \text{se} \quad 40 < x \le 80, \\ g(-x), & \text{se} \quad -80 < x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x+160) = \tilde{g}(x).$$

Seja

$$h(x) = \int_0^x \tilde{g}(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq x < 20, \\ x^2/20 - 2x + 20, & \text{se} \quad 20 \leq x < 40, \\ -x^2/20 + 6x - 140, & \text{se} \quad 40 \leq x \leq 60, \\ 40, & \text{se} \quad 60 < x \leq 80 \\ h(-x), & \text{se} \quad -80 \leq x \leq 0 \end{cases} \qquad h(x+160) = h(x),$$

então

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t) + \tilde{f}(x+2t)\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \tilde{g}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-2t) + \tilde{f}(x+2t)\right) + \frac{1}{4}\left(h(x+2t) - h(x+2t)\right). \end{aligned}$$

A solução $u(x,t)$ é periódica de período $T = 80$ segundos.

Exercícios (respostas na página 402)

2.1. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa apenas na extremidade esquerda, com coeficiente $a = 2$, solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por $\operatorname{sen}(3\pi x/80)$, para $0 < x < 40$. Qual o período fundamental da corda neste caso?

2.2. Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade direita, enquanto que na extremidade esquerda é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical.

(a) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

(b) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

(c) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

2.3. Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L solta nas duas extremidades, ou seja, nas extremidades são colocados anéis que correm sem atrito em volta de barras verticais.

(a) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

(b) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

(c) Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

4.3 Corda Elástica Infinita

4.3.1 Solução Geral

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

na solução $u(x,t)$ da equação da corda elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ou seja, se $u(x,t) = v(\xi(x,t), \eta(x,t))$, então

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

Assim

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Logo a equação da corda elástica é equivalente a equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Mas se $v(\xi,\eta)$ satisfaz esta equação então $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ não depende de ξ, ou seja,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{\phi}(\eta).$$

E assim

$$v(\xi,\eta) = \int \tilde{\phi}(\eta) d\eta + \psi(\xi) = \phi(\eta) + \psi(\xi).$$

Voltando às variáveis x e t, temos que a solução geral da equação da onda em uma dimensão é

$$u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at), \tag{4.31}$$

que representa duas ondas viajando em sentidos opostos com velocidade igual a a.

4.3.2 Problema de Valor Inicial

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica infinita, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Substituindo-se $t = 0$ na solução de D'Alembert (4.31) e na sua derivada obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) &= f(x) && (4.32) \\ -a\phi'(x) + a\psi'(x) &= g(x). && (4.33) \end{aligned}$$

Derivando-se a equação (4.32), multiplicando-se por a, somando-se e subtraindo-se da equação (4.33) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2a}g(x), && (4.34) \\ \phi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2a}g(x). && (4.35) \end{aligned}$$

Integrando-se de 0 a x as equações (4.34) e (4.35) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(y)dy, \\ \phi(x) &= \phi(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(y)dy. \end{aligned}$$

Usando-se o fato de que $f(0) = \phi(0) + \psi(0)$ obtemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x-at) + \psi(x+at) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy. && (4.36) \end{aligned}$$

Esta solução é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial da corda infinita.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é contínua por partes com as suas derivadas, f' e f'', também contínua por partes, então para (x,t) tal que f'' é contínua em $x - at$ e $x + at$ temos que $u(x,t)$ dado pela solução de d'Alembert satisfaz a equação da onda, $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios (respostas na página 415)

3.1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sugestão: faça a mudança de variáveis $\xi = x + t, \quad \eta = x - t$.

3.2. Determine o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica "semi-infinita", presa na extremidade esquerda sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x > 0 \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

3.3. Considere a solução do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2(1 - |x|), & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -1, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Determine $u(x,1)$.

(b) Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u(0,t)}{t}$.

4.4 Respostas dos Exercícios

1. Corda Elástica Com Extremidades Presas (página 360)

1.1.

$$\int_a^{a+T} g(x)dx = \int_a^0 g(x)dx + \int_0^T g(x)dx + \int_T^{a+T} g(x)dx =$$
$$\int_a^0 g(x)dx + \int_0^T g(x)dx + \int_0^a g(y+T)dy = \int_0^T g(x)dx,$$

pois $g(x+T) = g(x)$.

1.2. (a) Usando o exercício anterior temos que

$$h(x+T) = \int_0^{x+T} g(y)dy = \int_0^x g(y)dy + \int_x^{x+T} g(y)dy =$$
$$\int_0^x g(y)dy + \int_{-T/2}^{T/2} g(y)dy = \int_0^x g(y)dy = h(x).$$

Pois como g é ímpar, então $\int_{-T/2}^{T/2} g(y)dy = 0$.

(b) Usando o fato de que $g(-x) = -g(x)$, temos que

$$h(-x) = \int_0^{-x} g(y)dy = -\int_0^x g(-z)dz = \int_0^x g(z)dz = h(x).$$

1.3. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/4},40)+10b_n(f^{(0)}_{1/4,3/4},40)+40b_n(f^{(0)}_{3/4,1},40)-b_n(f^{(1)}_{3/4,1},40)\right) \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n=1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}$$

1.4. A solução é então

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}.$$

$$f(x)=\operatorname{sen}2\pi x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$$

Logo,

$$c_n=\begin{cases}1, & \text{se } n=2,\\ 0, & \text{se } n\neq 2.\end{cases}$$

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{20}x)\cos(\frac{\pi}{10}t)$$

Período fundamental igual a $\frac{2\pi}{\pi/10}=20$ segundos.

1.5. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \quad n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3},\ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

1.6. A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}.$$

$$g(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{20} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}.$$

Logo

$$\frac{n\pi}{20} c_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 0, & \text{se } n \neq 2. \end{cases}$$

Assim,

$$u(x,t) \;=\; \frac{10}{\pi} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{20}x) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{10}t)$$

Período fundamental da corda é igual a $\frac{2\pi}{\pi/10} = 20$ segundos.

1.7. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{an\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n\pi}{20}d_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\ &= \frac{80}{\pi^2}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}+\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\quad n=1,2,3\ldots\end{aligned}$$

$$d_n = \frac{1600}{\pi^3}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}+\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi}{4}}{n^3},\ n=1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}+\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi}{4}}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}+ \\ &\quad \frac{1600}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}+\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi}{4}}{n^3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{40}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{20}\end{aligned}$$

1.8. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)+2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)+2X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira $X(0) = X(L) = 0$ e $T'(0) = 0$ que decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$, $0 = u(L,t) = X(L)T(t)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0) = 0$:

$$\begin{cases} X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0 & (4.37) \\ T''(t) - \lambda T(t) = 0, \; T'(0) = 0 & (4.38) \end{cases}$$

A equação $X''(x) + 2X'(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})\,x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\,x}$.
Se $\lambda = -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.
Se $\lambda < -1$ **:** $X(x) = c_1 e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{-1-\lambda}\,x) + c_2 e^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}\,x))$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.37) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < -1$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valores de fronteira (4.37) tem solução

$$X(x) = c_1 e^{-x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ em (4.38) obtemos

$$T''(t) + (1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2})T(t) = 0, \; T'(0) = 0$$

que tem solução

$$T(t) = c_2 \cos\left(\sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\; t\right), \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = e^{-x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\;t\right)$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\;t\right)$$

Vamos considerar as séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\;t\right).$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)e^x$. Assim, se a função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)e^x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,\; n = 1,2,3\ldots$$

1.9. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) - X(x)T(t) + X'(x)T(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x)+X'(x)-\lambda X(x)=0, \; X(0)=0, \; X'(1)=0 \\ T''(t)+(1-\lambda)T(t)=0, \; T(0)=0 \end{cases}$$

1.10.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{a}{2}\left(\tilde{f}'(x+at)-\tilde{f}'(x-at)\right) + \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+at)+\tilde{g}(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{a^2}{2}\left(\tilde{f}''(x+at)+\tilde{f}'(x-at)\right) + \frac{a}{2}\left(\tilde{g}'(x+at)-\tilde{g}'(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}'(x+at)+\tilde{f}'(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\left(\tilde{g}(x+at)-\tilde{g}(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}''(x+at)+\tilde{f}''(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\left(\tilde{g}''(x+at)-\tilde{g}''(x-at)\right)$$

$$u(x,0)=\tilde{f}(x)=f(x)\text{para } x\in[0,L];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \quad \text{para } x\in(0,L) \text{ onde } g \text{ é contínua.}$$

$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{f}(at)+\tilde{f}(-at)\right)=0,$$

$$u(L,t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{f}(L+at)+\tilde{f}(L-at-2L)\right)=0.$$

2. Corda Elástica Solta em uma Extremidade (página 386)

2.1.

$$u(x,t) = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{80} \operatorname{sen} \frac{3\pi t}{40}$$

O período fundamental é $T = \frac{80}{3}$ segundos.

2.2. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \ X(L) = 0 & (4.39) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \ T'(0) = 0 & (4.40) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.
Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.
As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.39) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.39) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.40) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais

$$T_{2n+1}(t) = \cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.41}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{4.42}$$

para n=0,1,2,3,...

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{4.43}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$ de período L. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação ao ponto $(x, y) = (L, 0)$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ -f(2L-x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.44}$$

Assim, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.45}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.18) do problema (4.17) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos \frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \cos \frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} \right). \end{aligned}$$

Substituindo-se esta expressão na série (4.44) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at)+\hat{f}(x+at)\right), \end{aligned} \tag{4.46}$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$. Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a.

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.47) \\ T''(t) - \alpha^2\lambda T(t) = 0,\ T(0) = 0 & (4.48) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.
Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que (4.47) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.47) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.48) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.49}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{4.50}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \tag{4.51}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de cossenos de $g(x)$ de período L. Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0,2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0,L] \\ -g(2L-x) & \text{se } x \in [L,2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{a(2n+1)\pi}{2L}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.52}$$

Assim, se a função $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L}c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,dx, \quad \text{para } n = 0,1,2,3,\ldots \tag{4.53}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.50) do problema (4.49) na forma

$$\begin{aligned} u_{2n+1}(x,t) &= \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (4.52), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2L} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2L}\right).$$

em que $\hat{g}$ é a extensão de g que é par, simétrica em relação em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$.Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy. \tag{4.54}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

(c) A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(x-at) + \hat{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\hat{g}(y)dy$$

em que $\hat{f}$ é a extensão de f que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$ e $\hat{g}$ é a extensão de g que é par, simétrica em relação ao ponto $(x,y) = (L,0)$ e periódica de período $4L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

2.3. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \; X'(L) = 0 & (4.55) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \; T'(0) = 0 & (4.56) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.
Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que (4.55) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.55) tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = 0$ e $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (4.56) obtemos

$$T'' = 0 \text{ e } T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais

$$T_0(t) = 1\ T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.57}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_0(x,t) = 1,\ u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.58}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L}. \tag{4.59}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$ de período L.
Assim, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \tag{4.60}$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.61}$$

Para cada n, podemos reescrever a solução fundamental (4.18) do problema (4.17) na forma (verifique!)

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{n\pi(x-at)}{L} + \cos\frac{n\pi(x+at)}{L}\right). \end{aligned}$$

Substituindo-se esta expressão na série (4.44) obtemos que a solução do problema de valor inicial e de fronteira pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\frac{n\pi(x-at)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{n\pi(x+at)}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right), \end{aligned} \tag{4.62}$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é par e periódica de período $2L$. Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira. A solução representa duas ondas se propagando em sentidos opostos com velocidade igual a a refletindo-se nas extremidades.

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X(L) = 0, & (4.63) \\ T''(t) - \alpha^2\lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0 & (4.64) \end{cases}$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.
Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que (4.63) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.63) tem soluções fundamentais

$$X_0 = 1 \text{ e } X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = 0$ e $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação diferencial (4.64) obtemos

$$T'' = 0 \text{ e } T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_0 = t \text{ e } T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0; \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.65}$$

tem **soluções fundamentais**

$$u_0(x,t) = t \text{ e } u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}, \tag{4.66}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$
Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$u(x,t) = c_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = c_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}. \tag{4.67}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{an\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{4.68}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $g(x)$ de período $2L$.
Assim, se a função $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L g(x)\,dx, \tag{4.69}$$

$$\frac{an\pi}{L}c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.70}$$

Para cada $n > 0$, podemos reescrever a solução fundamental (4.66) do problema (4.65) na forma

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \cos\frac{n\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{an\pi t}{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sen}\,\frac{n\pi(x+at)}{L} - \text{sen}\,\frac{n\pi(x-at)}{L}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que a série de Fourier da integral de g é a série das integrais, integrando-se (4.68), obtemos

$$\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}(y)dy = 2ac_0t + a\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\text{sen}\,\frac{n\pi(x+at)}{L} - \text{sen}\,\frac{n\pi(x-at)}{L}\right).$$

em que $\tilde{g}$ é a extensão de g que é par e periódica de período $2L$. Logo temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}(y)dy. \tag{4.71}$$

A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

(c) A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy$$

em que $\tilde{f}$ é a extensão de f que é par, e periódica de período $2L$ e $\tilde{g}$ é a extensão de g que é par e periódica de período $2L$. A solução dada desta forma é chamada **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial e de fronteira.

3. Corda Elástica Infinita (página 392)

3.1. Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t$$

na solução $u(x,t)$ da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Ou seja, se $u(x,t) = v(\xi(x,t), \eta(x,t))$, então

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

Assim
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - 4\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$
Logo a equação diferencial é equivalente a equação
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$
ou equivalentemente
$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + v\right) = 0$$
Mas se $v(\xi, \eta)$ satisfaz esta equação então
$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + v = \tilde{\phi}(\eta).$$
Esta é uma equação linear de 1ª ordem que tem solução
$$v(\xi, \eta) = e^{-\eta} \int e^{\eta} \tilde{\phi}(\eta) d\eta + \psi(\xi) e^{-\eta} = \phi(\eta) + \psi(\xi) e^{-\eta}.$$
Voltando às variáveis x e t, temos que
$$u(x, t) = \phi(x - t) + \psi(x + t) e^{-(x-t)}. \tag{4.72}$$
Substituindo-se $t = 0$ na solução (4.72) e na sua derivada obtemos
$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) e^{-x} &= f(x) & (4.73) \\ -\phi'(x) + (\psi'(x) + \psi(x)) e^{-x} &= g(x). & (4.74) \end{aligned}$$

Derivando-se a equação (4.73) e somando-se a equação (4.74) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(x)e^{-x} &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}g(x), \\ \psi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x)e^{x} + \frac{1}{2}g(x)e^{x}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

Integrando-se de 0 a x a equação (4.75) obtemos

$$\psi(x) = \psi(0) + \frac{1}{2}\left(f(x)e^{x} - f(0) - \int_0^x f(y)e^{y}dy + \int_0^x e^{y}g(y)dy\right),$$

Substituindo-se na equação (4.73) obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) - \psi(x)e^{-x} \\ &= -e^{-x}\psi(0) + \frac{e^{-x}}{2}\left(f(x)e^{x} + f(0) + \int_0^x f(y)e^{y}dy - \int_0^x e^{y}g(y)dy\right). \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x-t) + \psi(x+t)e^{-(x-t)} \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)e^{2t}\right) + \frac{e^{-(x-t)}}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{y}(g(y) - f(y))dy. \end{aligned}$$

3.2. A solução deste problema é a soma da solução do problema em que $g(x) = 0$ com a solução do problema em que $f(x) = 0$. O primeiro problema tem solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right),$$

em que $\tilde{f}$ é uma extensão de f. Substituindo-se $x = 0$, obtemos que

$$\tilde{f}(-at) + \tilde{f}(at) = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$, para todo $x > 0$. Assim, $\tilde{f}$ deve ser uma função ímpar. O segundo problema tem como solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy$$

em que $\tilde{g}$ é uma extensão de g. Substituindo-se $x = 0$, obtemos que

$$\int_{-at}^{at} \tilde{g}(y)dy = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo $\tilde{g}(-x) = -\tilde{g}(x)$, para todo $x > 0$. Assim, $\tilde{g}$ deve ser uma função ímpar. A solução do problema inicial é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(y)dy,$$

em que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são extensões ímpares de f e g, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3.3.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+2t) + f(x-2t)\right) - \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} dy = \frac{1}{2}\left(f(x+2t) + f(x-2t)\right) - t$$

(a)

$$u(x,1) = \frac{1}{2}\left(f(x+2) + f(x-2)\right) - 1 = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -3 \\ -|x+2|, & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ -1, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -|x-2|, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ -1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(x,t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \left(f(x+2t) + f(x-2t)\right) - 1 = -1.$$

5

Equação de Laplace Bidimensional

5.1 Equação de Laplace num Retângulo

Pode-se mostrar que o potencial elétrico, $u(x,y)$, numa região em que há ausência de cargas elétricas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

chamada **equação de Laplace**. Também as soluções estacionárias da equação do calor em uma placa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

assim como as soluções estacionárias da equação de uma membrana elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

satisfazem a equação de Laplace.

O problema de encontrar a solução da equação de Laplace numa região sendo conhecidos os seus valores na fronteira da região é chamado **problema de Dirichlet**.

Vamos considerar, agora, o seguinte problema de Dirichlet em um retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas (verifique!).

5.1.1 Apenas $k(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

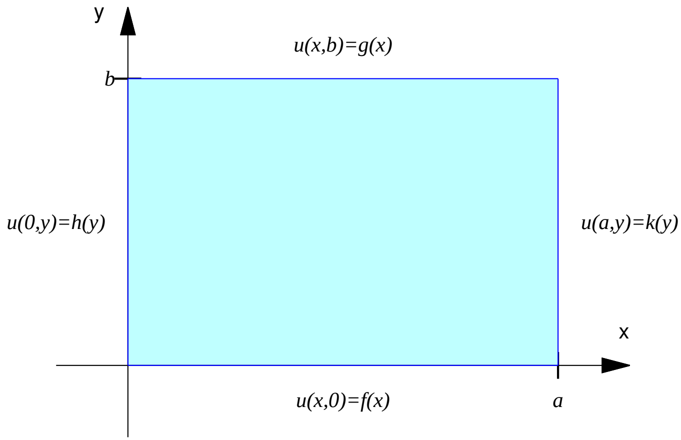


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0 & (5.1) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 & (5.2) \end{cases}$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(x,0) = X(x)Y(0)$ e $0 = u(x,b) = X(x)Y(b)$. A condição $X(0) = 0$, decorre do fato de que $0 = u(0,y) = X(0)Y(y)$.

A equação (5.2) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1,2,3,\ldots$$

e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ na equação (5.1) obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0,$$

que com a condição $X(0) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{c}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira $u(x,0) = u(x,b) = 0$, para $0 < x < a$ e $u(0,y) = 0$, para $0 < y < b$, tem **soluções fundamentais**

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}. \tag{5.3}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(a,y) = k(y)$, precisamos ter

$$k(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $k : [0,b] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada $k'(y)$ também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots \tag{5.4}$$

Vamos verificar que realmente (5.3) com os coeficientes dados por (5.4) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.3) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $y \in (0, b)$ tais que $k(y)$ é contínua. Vamos ver se (5.3) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$|c_n| \leq \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}} \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)|dy \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{n\pi a}{b}}} \leq \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1 - e^{-2\frac{\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) \right| \leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) \right| \leq 2M \frac{n^2\pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) \right| \leq 2M \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y) \right| \leq 2M \frac{n^2\pi^2}{b^2} \frac{e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}}}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

para $M = \frac{2}{b} \int_0^b |k(y)|dy$, $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < a$, $0 < y_1 \leq y \leq y_2 < b$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{b^2} e^{-\frac{n\pi(a-x_1)}{b}} < \infty.$$

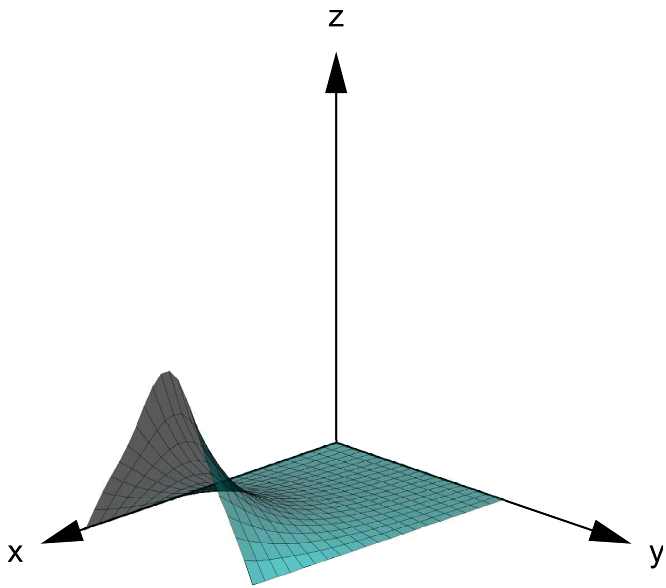


Figura 5.2 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.1 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exemplo 5.1. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja, usando a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} = \ &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dy \\ &= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 2b_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1})\right) \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}},\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh}\frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

5.1.2 Apenas $h(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(a) = 0 & (5.5) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0, \; Y(b) = 0 & (5.6) \end{cases}$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(x,0) = X(x)Y(0)$ e $0 = u(x,b) = X(x)Y(b)$. A condição $X(a) = 0$, decorre do fato de que $0 = u(a,y) = X(a)Y(y)$.

A equação (5.6) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

e a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ na primeira equação diferencial obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0.$$

Esta equação tem solução geral

$$X(x) = \hat{c}_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} + \hat{c}_2 e^{\frac{n\pi}{b}x}.$$

Mas podemos escrever a solução geral na forma

$$X(x) = c_1 e^{\frac{n\pi}{b}a} e^{-\frac{n\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}a} e^{\frac{n\pi}{b}x} = c_1 e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)} + c_2 e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)}.$$

que com a condição $X(a) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2 (e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{c}_2 \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a)).$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira $u(x,0) = u(x,b) = 0$, para $0 < x < a$ e $u(a,y) = 0$, para $0 < y < b$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a)).$$

Para satisfazer a condição inicial $u(0,y) = h(y)$, precisamos ter

$$h(y) = u(0,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $h : [0,b] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada h' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$-c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Podemos evitar o sinal negativo se escrevemos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(a-x)) \tag{5.7}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b h(y)\operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{b})dy,\ n = 1,2,3\ldots \tag{5.8}$$

Vamos verificar que realmente (5.7) com os coeficientes dados por (5.8) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.7) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $y \in (0,b)$ tais que $h(y)$ é contínua. Vamos ver se (5.7) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$|c_n| \le \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}}\frac{2}{b}\int_0^b |h(y)|dy \le \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1-e^{-2\frac{n\pi a}{b}}} \le \frac{2Me^{-\frac{n\pi a}{b}}}{1-e^{-2\frac{\pi a}{b}}},$$

$$\left|c_n\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \le 2M\frac{n\pi}{b}\frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1-e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left|c_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y)\right| \le 2M\frac{n^2\pi^2}{b^2}\frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1-e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left|c_n\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \le 2M\frac{n\pi}{b}\frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1-e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

$$\left|c_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y)\right| \le 2M\frac{n^2\pi^2}{b^2}\frac{e^{-\frac{n\pi x_1}{b}}}{1-e^{-\frac{2\pi a}{b}}},$$

para $M = \frac{2}{b}\int_0^b |h(y)|dy,\ 0 < x_1 \le x \le x_2 < a,\ 0 < y_1 \le y \le y_2 < b,\ n = 1,2,3,\ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{b}e^{-\frac{n\pi x_1}{b}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{b^2} e^{-\frac{n\pi x_1}{b}} < \infty.$$

Exemplo 5.2. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0, \ u(x,2) = 0, \ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y), \ u(3,y) = 0, \ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, que são os mesmos da função $k(y)$ do Exemplo 5.1 na página 427, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}}, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

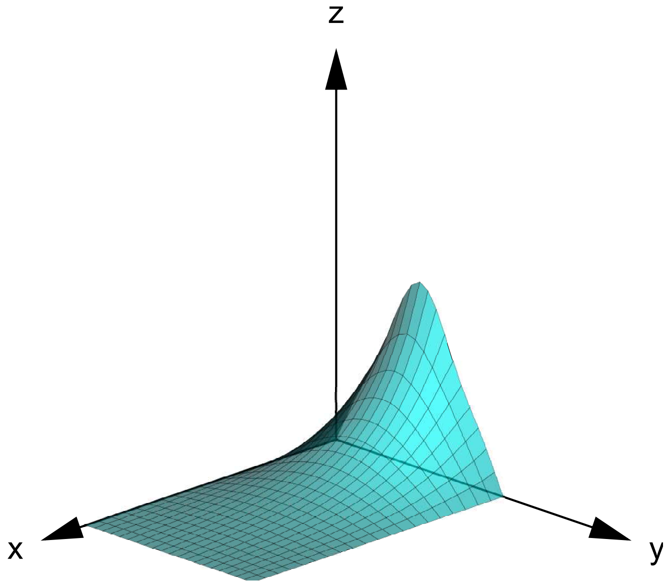


Figura 5.3 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh}\frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

5.1.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas, que denotamos por $u^{(f)}(x,y)$, $u^{(g)}(x,y)$, $u^{(h)}(x,y)$ e $u^{(k)}(x,y)$, respectivamente. Ou seja,

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y).$$

Exemplo 5.3. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

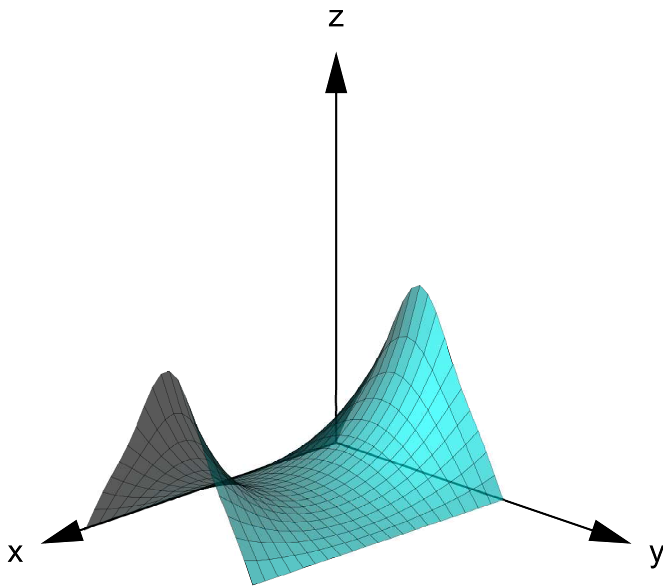


Figura 5.4 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.3 tomando apenas 3 termos não nulos da série

com

$$h(y) = k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left(\operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right)$$

em que $c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, que são os mesmos da função $k(y)$ do Exemplo 5.1 na página 427, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dy \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) n^2 \pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 \operatorname{senh} \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left(\operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \left(\operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \right) \end{aligned}$$

Exercícios (respostas na página 467)

1.1. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

1.2. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1/2 \\ 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < 3/2 \\ 2 - y, & \text{se } 3/2 < y \leq 2 \end{cases}$$

1.3. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

1.4. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

1.5. Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

1.6. Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

(c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(d) Explique por que este problema não tem solução única.

(e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

1.7. Encontre as equações diferenciais ordinárias e as condições de fronteira associadas às soluções fundamentais do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u - \dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0,y) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y); \quad 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0; \quad 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x); \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

5.2 Equação de Laplace numa Faixa Semi-infinita

Vamos resolver o problema de Dirichlet numa faixa semi-infinita, que corresponde, por exemplo, ao problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de uma faixa semi-infinita, cujas laterais são mantidas a temperaturas $T_1 = T_2 = 0$, sendo conhecida a temperatura em uma extremidade da faixa.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < a, \; u(x,y) \text{ é limitada para } y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(0,y) = 0, \; u(a,y) = 0, \; y > 0 \end{cases}$$

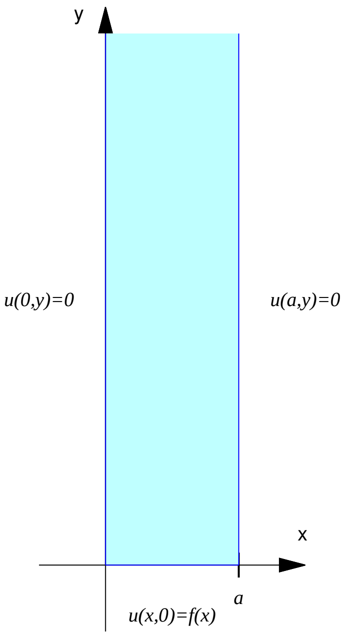


Figura 5.5 – Faixa semi-infinita onde é resolvido o problema de Dirichlet

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0, \; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(y) \text{ é limitada para } y > 0. \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(a) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,y) = X(0)Y(y)$ e $0 = u(a,y) = X(a)Y(y)$. A condição $Y(y)$, decorre do fato de que $u(x,y)$ é limitada na faixa.

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1,2,3,\ldots$ e neste caso as soluções fundamentais são

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}, \; n = 1,2,3,\ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição de $Y(y)$ ser limitada, para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira $u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0$, para $y > 0$, com a condição de $u(x,y)$ ser limitada tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Vamos supor que a solução seja a série

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}. \tag{5.9}$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}.$$

Assim se a função $f(x)$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots \tag{5.10}$$

Vamos verificar que realmente (5.9) com os coeficientes dados por (5.10) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.9) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $x \in (0, L)$ tais que $f(x)$ é contínua. Vamos ver se (5.9) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) \right| \leq M \frac{n\pi}{a} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y) \right| \leq M \frac{n^2\pi^2}{a^2} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) \right| \leq M \frac{n\pi}{a} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}}$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x,y) \right| \leq M \frac{n^2\pi^2}{a^2} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}}$$

para $M = \frac{2}{a} \int_0^a |f(x)| dx$, $0 \leq x \leq a$, $0 < y_1 \leq y \leq y_2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{a^2} e^{-\frac{n\pi y_1}{a}} < \infty.$$

Observamos que a temperatura estacionária em cada ponto da placa tende a zero quando y tende a $+\infty$, ou seja,

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\lim_{t\to\infty} u_n(x,y) \right) = 0, \quad \text{para } x \in [0,a],$$

que decorre da aplicação do Teorema 2.8 na página 200, usando o fato de que

$$|c_n u_n(x,y)| \leq M \left(e^{-\frac{\pi}{a} y_1} \right)^n$$

para $0 \leq x \leq a,\ 0 < y_1 \leq y \leq y_2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{\pi}{a} y_1}\right)^n < \infty.$$

Exemplo 5.4. Vamos considerar o problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de uma faixa semi-infinita, cujas laterais são mantidas a temperaturas $T_1 = T_2 = 0$, sendo conhecida a temperatura em uma extremidade da faixa. Ou seja, vamos resolver o problema de Dirichlet na faixa semi-infinita

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 2 \\ u(0,y) = 0,\ u(2,y) = 0,\ y > 0. \end{cases}$$

com

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} e^{-\frac{n\pi y}{2}}.$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, que são os mesmos da função $k(y)$ do Exemplo 5.1 na página 427, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\, dx \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}e^{-\frac{n\pi y}{2}} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2}e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{2}}. \end{aligned}$$

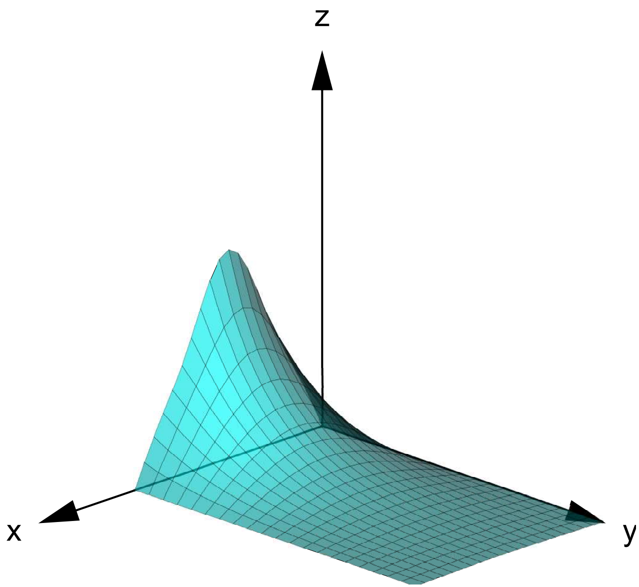


Figura 5.6 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.4 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exercícios (respostas na página 478)

2.1. Resolva o problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de uma faixa semi-infinita, que é isolada nas laterais, sendo conhecida a temperatura em uma extremidade da faixa. Ou seja, resolva o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < a, \; |u(x,y)| \leq M, \text{ para } y > 0, \; 0 < x < a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \; y > 0. \end{cases}$$

Se a temperatura em uma extremidade da faixa é constante, $f(x) = T_0$, para $0 < x < a$, qual é a temperatura estacionária em qualquer ponto da faixa, $u(x,y)$?

2.2. Resolva o problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de uma faixa semi-infinita, cuja lateral direita é mantida a temperatura zero e lateral esquerda é isolada, sendo conhecida a temperatura em uma extremidade da faixa. Ou seja, resolva o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; y > 0, \; 0 < x < a, \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < a, \; |u(x,y)| \leq M, \text{ para } y > 0, \; 0 < x < a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \; u(a,y) = 0, \; y > 0. \end{cases}$$

Se

$$f(x) = \begin{cases} a/2 - x, & \text{se } 0 \leq x < a/2, \\ 0, & \text{se } a/2 \leq x < a. \end{cases}$$

determine a temperatura estacionária em qualquer ponto da faixa $u(x,y)$.

5.3 Equação de Laplace em Regiões Circulares

Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas polares (r, θ), vamos resolver o problema de Dirichlet no círculo, que corresponde, por exemplo, ao problema de encontrar a temperatura estacionária de uma placa circular se são conhecidos os valores da temperatura na borda da placa.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; 0 < r < a \\ u(a, \theta) = f(\theta), \; 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

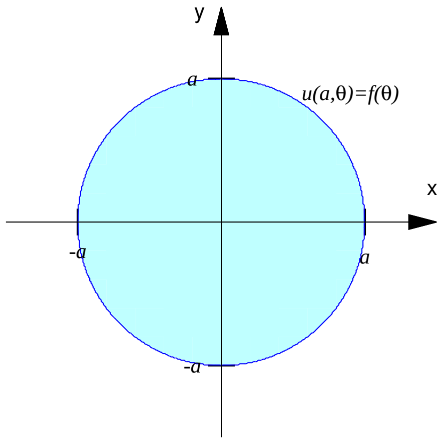


Figura 5.7 – Círculo onde é resolvido o problema de Dirichlet

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), & (5.11) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad R(r) \text{ limitada para } 0 < r < a. & (5.12) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.

Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

A condição $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, implica que o período fundamental de $\Theta(\theta)$ é da forma $\frac{2\pi}{n}$, para $n = 1, 2, \ldots$ ou zero. Assim, (5.11) tem solução não identicamente nula somente se $\sqrt{-\lambda} = n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ ou seja,

$$\lambda = -n^2, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira (5.11) tem soluções fundamentais

$$\begin{aligned} \Theta_n^{(1)}(\theta) &= \cos n\theta, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \Theta_n^{(2)}(\theta) &= \operatorname{sen} n\theta, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.12) obtemos

$$r^2 R''(t) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r, \text{ para } n = 0; \quad R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(r)$ tem que ser limitada para $0 < r < a$, então as soluções fundamentais são

$$R_0(r) = 1, \quad R_n(r) = r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial na região $r < a$ tem soluções fundamentais

$$u_0(r, \theta) = 1$$

$$u_n^{(1)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(1)}(\theta) = r^n \cos n\theta, \quad u_n^{(2)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(2)}(\theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n^{(1)}(r, \theta) + d_n u_n^{(2)}(r, \theta)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Para satisfazer a condição $u(a,\theta) = f(\theta)$, temos que impor a condição

$$f(\theta) = u(a,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Esta é a série de Fourier de $f(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta, \\ a^n c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \\ a^n d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{5.14}$$

para $n = 1,2,3\ldots$

Vamos verificar que realmente (5.13) com os coeficientes dados por (5.14) é a solução do problema de valor inicial. Claramente (5.13) satisfaz as condições de fronteira e a condição inicial é satisfeita para os valores de $\theta \in (0,2\pi)$ tais que $f(\theta)$ é contínua. Vamos ver se (5.13) satisfaz a equação de Laplace. Cada termo da série satisfaz a equação de Laplace. Basta provarmos que podemos passar as derivadas para dentro do sinal de somatório. Isto decorre da aplicação do Teorema 2.7 na página 198 usando o fato de que

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial r}(r,\theta) \right| \le 2Mn \left(\frac{r_2}{a}\right)^n$$

$$\left| c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,\theta) \right| \le 2Mn^2 \left(\frac{r_2}{a}\right)^n$$

$$\left| c_n \frac{\partial u_n}{\partial \theta}(r,\theta) \right| \le 2Mn \left(\frac{r_2}{a}\right)^n$$

$$\left|c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2}(r,\theta)\right| \leq 2Mn^2 \left(\frac{r_2}{a}\right)^n$$

para $M = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|d\theta,\ 0 < r_1 \leq r \leq r_2 < a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ n = 1,2,3,\ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2Mn \left(\frac{r_2}{a}\right)^n < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2Mn^2 \left(\frac{r_2}{a}\right)^n < \infty.$$

Exemplo 5.5. Vamos considerar o problema de encontrar a temperatura estacionária em cada ponto de um disco de raio 2 cm, se a temperatura na borda da placa é dada por $f(\theta) = \theta$, para $0 \leq \theta \leq \pi$ e $f(\theta) = 2\pi - \theta$, para $\pi < \theta \leq 2\pi$. Ou seja, vamos resolver o problema de Dirichlet no círculo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ 0 < r < a \\ u(a,\theta) = f(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

com

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 2\pi - \theta, & \text{se } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

A solução é então

$$u(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta),\ \text{para } 0 < r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

em que $a^n c_n$ e $a^n d_n$ são os coeficientes da série de Fourier de $f(\theta)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2} \\
a^n c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\,d\theta \\
&= 2\left(a_n(f_{0,1}^{(1)},\pi)\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big|_0^{n\pi} \\
&= \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi},\ n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$a^{2k}c_{2k} = 0$$

$$a^{2k+1}c_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}.$$

$$a^n d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta = 0$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n((-1)^n-1)}{a^n n^2}\cos n\theta \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(2n+1)}}{a^{(2n+1)}(2n+1)^2}\cos(2n+1)\theta.
\end{aligned}$$

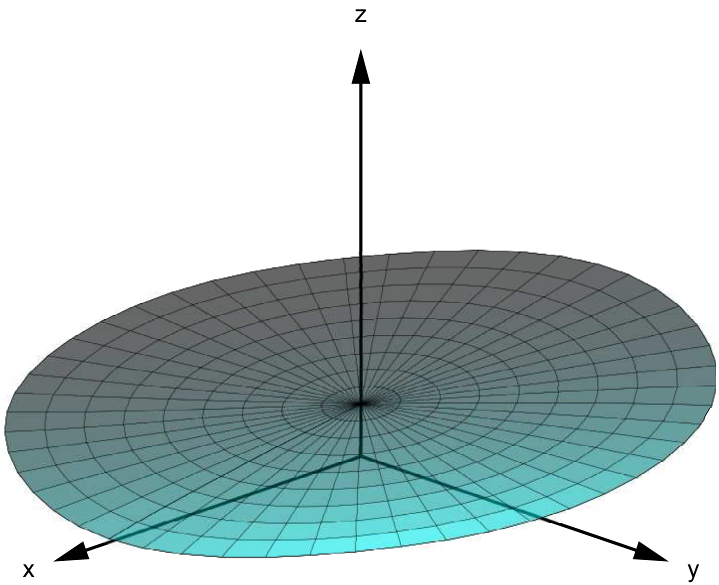


Figura 5.8 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.5 tomando apenas 3 termos não nulos da série

Exercícios (respostas na página 482)

3.1. Resolva o problema de Dirichlet no semicírculo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; 0 \leq r < a \\ u(a,\theta) = f(\theta), \; 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, \; 0 \leq r < a \end{cases}$$

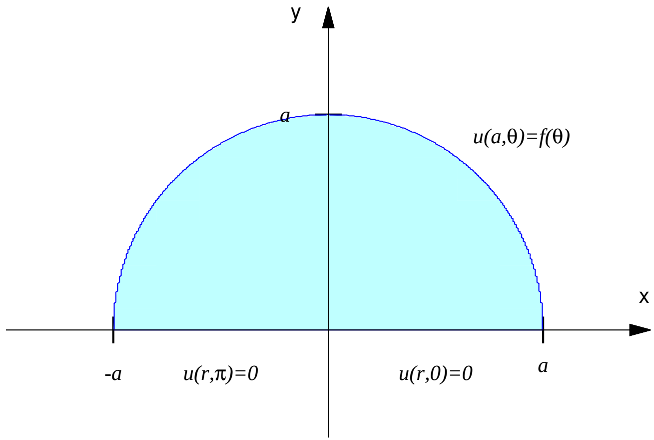


Figura 5.9 – Semicírculo onde é resolvido o problema de Dirichlet

3.2. Resolva o problema de valores de fronteira no semicírculo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; 0 \le r < a \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = g(\theta), \; 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, \; 0 \le r < a \end{cases}$$

3.3. Resolva o problema de Dirichlet no setor circular

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; 0 \le r < a \\ u(a,\theta) = f(\theta), \; 0 < \theta < \alpha \\ u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \; 0 \le r < a \end{cases}$$

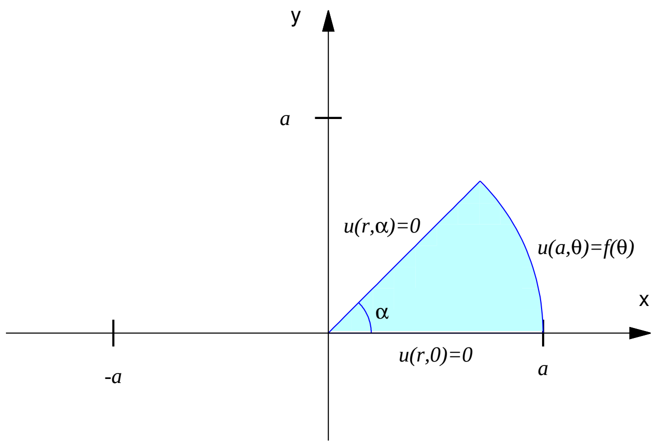


Figura 5.10 – Setor circular onde é resolvido o problema de Dirichlet

3.4. Resolva o problema de Dirichlet na coroa circular

(a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ a < r < b \\ u(a,\theta) = 0, \ u(b,\theta) = g(\theta), \ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ a < r < b \\ u(a,\theta) = f(\theta), \ u(b,\theta) = 0, \ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ a < r < b \\ u(a,\theta) = f(\theta), \ u(b,\theta) = g(\theta), \ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

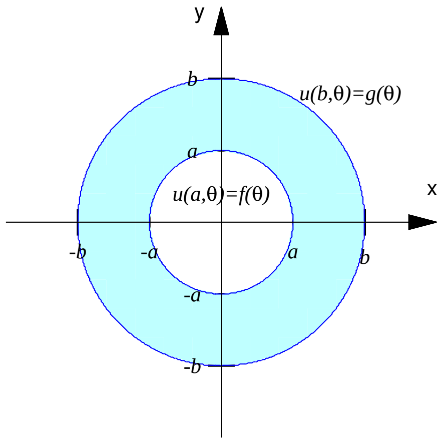


Figura 5.11 – Coroa circular onde é resolvido o problema de Dirichlet

3.5. Resolva o problema de Dirichlet na região exterior ao círculo, ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; r > a, \\ u(a,\theta) = f(\theta), \; 0 < \theta < 2\pi, \\ |u(r,\theta)| \leq M, \; \text{para } r > a, \; 0 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{r \to \infty} u(r,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$

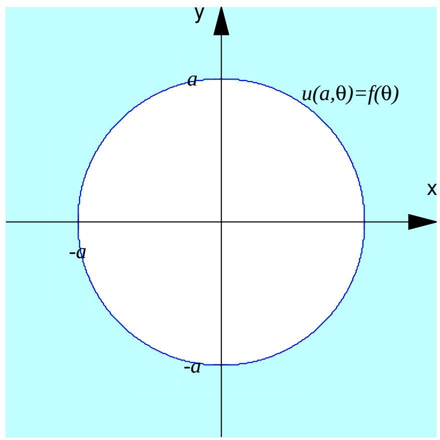


Figura 5.12 – Região exterior ao círculo onde é resolvido o problema de Dirichlet

3.6. Resolva o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \; 1 < r < a, \; 0 < \theta < \pi, \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, \; 1 < r < a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = g(\theta), \;\; 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

3.7. Considere o problema de encontrar a temperatura estacionária em um cilindro cujas superfícies superior e inferior são mantidas a temperatura zero e com valores na superfície lateral dependendo apenas da altura z. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas (r,θ,z) e supondo que a solução não dependa de θ, ou seja, que $u = u(r,z)$, o problema de Dirichlet para um cilindro de raio a e altura b pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \; r < a, \\ u(a,z) = f(z), \; 0 < z < b, \\ u(r,0) = 0, \; u(r,b) = 0, \; \text{para } 0 < r < a. \end{cases}$$

(a) Escreva a solução na forma $u(r,z) = R(r)Z(z)$ e mostre que $R(r)$ e $Z(z)$ satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \\ rR''(r) + R'(r) - \lambda r R(r) = 0. \end{cases}$$

(b) Encontre as condições de fronteira correspondentes, os valores de λ e as soluções de

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0$$

sujeita as condições de fronteira.

3.8. Considere o problema de encontrar a temperatura estacionária em uma bola de raio a com valores na sua superfície dependendo apenas do ângulo θ. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas esféricas

(r, θ, ϕ) e supondo que a solução não dependa do ângulo azimutal ϕ, ou seja, que $u = u(r, \theta)$, o problema de Dirichlet pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta\,\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0,\ r < a, \\ u(a, \theta) = f(\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ u(r, \theta) \text{ limitada para } 0 < r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Escreva a solução na forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ e mostre que $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \cot\theta\,\Theta'(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases}$$

5.4 Respostas dos Exercícios

1. Equação de Laplace no Retângulo (página 437)

1.1. A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 k(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}, \ n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2 \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

1.2. A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{2}(3-x))$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2}, \ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}},\ n = 1, 2, 3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}}{n^2\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2}$$

1.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(0) = 0$ tem solução

$$Y(y) = c_2(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,b) = g(x)$, temos que ter

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a} x).$$

Assim pelo Corolário 2.5 na página 184 se as funções $g(x), g'(x)$ são contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) dx, \ n = 1,2,3\ldots$$

1.4. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y(b) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição $Y(b) = 0$ tem solução

$$Y(y) = c_2(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{-\frac{n\pi}{a}(y-b)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{a} x).$$

Assim pelo Corolário 2.5 na página 184 se as funções $f(x), f'(x)$ são funções contínuas por partes, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \;\; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) dx, \;\; n = 1, 2, 3 \ldots$$

1.5.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x), \;\; u(x,b) = g(x), \;\; 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y), \;\; u(a,y) = k(y), \;\; 0 < y < b \end{cases}$$

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(g)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(h)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(k)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1,2,3\ldots$$

1.6. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos\frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$ com termo constante nulo. Assim pelo Corolário 2.4 na página 181 se as funções $k(y), k'(y)$ são contínuas por partes com média de $k(y)$ igual a zero, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos(\frac{n\pi y}{b})dy, \; n = 1, 2, 3\ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y)dy = 0$$

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(t)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos\frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y)=h(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $h(y)$ com termo constante nulo. Assim pelo Corolário 2.4 na página 181 se as funções $h(y), h'(y)$ são contínuas por partes com média de $h(y)$ igual a zero, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy,\ n=1,2,3\ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $h(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y)dy = 0$$

(c)

$$u(x,y) = c_0 + u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \frac{n\pi}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(g)} \frac{n\pi}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos(\frac{n\pi x}{a})dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(h)} \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\cos(\frac{n\pi y}{b})dy,\ n = 1,2,3\ldots$$

(d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(e) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

1.7. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y) - X'(x)Y(y)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)+X'(x)}{X(x)} = 1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x)+X'(x)-\lambda X(x) = 0, \; X(0) = X'(1) = 0 \\ Y''(y)+(\lambda-1)Y(y) = 0, \; Y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. Problema de Dirichlet numa Faixa Semi-infinita (página 448)

2.1. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x) = 0, \; X'(0) = 0; X'(a) = 0 \\ Y''(y)+\lambda Y(y) = 0, \; Y(y) \text{ é limitada para } y > 0. \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso as soluções fundamentais são

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{a},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição de $Y(y)$ ser limitada para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$, com a condição de $u(x, y)$ ser limitada, para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \cos\frac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi y}{a}},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Vamos supor que a solução seja a série

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a}.$$

Assim se a função $f(x)$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\ c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\ n = 1, 2, 3\ldots$$

Se $f(x) = T_0$, então $u(x, y) = T_0$ é a temperatura estacionária em qualquer ponto da faixa.

2.2. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; X'(0) = 0; X(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \; Y(y) \text{ é limitada para } y > 0. \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso as soluções fundamentais são

$$X_{2n+1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Assim a segunda equação diferencial com a condição de $Y(y)$ ser limitada para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$Y_{2n+1}(y) = e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{2a}}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira $u(0,y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0$, com a condição de $u(x,y)$ ser limitada, para $y > 0$, tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,y) = X_{2n+1}(x)Y_{2n+1}(y) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a} e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{2a}},\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

Vamos supor que a solução seja a série

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a} e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{2a}}.$$

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}.$$

Assim se a função $f(x)$ é contínua por partes com sua derivada também contínua por partes, então os coeficientes são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{4}{2a}\int_0^a f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}dx,\ n = 0,1,2,3\ldots$$

Lembrando que a integração deve ser feita no intervalo $[0,2a]$:

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= 4\left(\frac{a}{2}a_{2n+1}(f^{(0)}_{0,\frac{1}{4}}) - a_{2n+1}(f^{(1)}_{0,\frac{1}{4}})\right) \\
&= \frac{a}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{(2n+1)\pi}\operatorname{sen} s\Big|_0^{\frac{(2n+1)\pi}{4}} - 4\cdot\frac{2a}{(2n+1)^2\pi^2}(s\operatorname{sen} s + \cos s)\Big|_0^{\frac{(2n+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{8a}{(2n+1)^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$u(x,y) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a} e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{2a}}$$

3. Equação de Laplace em Regiões Circulares (página 457)

3.1. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com a condição de fronteira $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0, & (5.15) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad R(r) \text{ limitada para } 0 < r < a. & (5.16) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.

Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

As condições de fronteira $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$ implica que (5.15) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira tem soluções fundamentais

$$\Theta_n(\theta) \quad = \quad \operatorname{sen} n\theta, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.12) obtemos

$$r^2 R''(t) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(r)$ tem que ser limitada para $0 < r < a$, então as soluções fundamentais são

$$R_n(r) = r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais da forma

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n \operatorname{sen} n\theta. \tag{5.17}$$

Então para satisfazer a condição $u(a,\theta) = f(\theta)$, temos que impor a condição

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n c_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta é a série de Fourier de $f(\theta)$ de senos com período 2π. Assim, se a função $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$a^n c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \quad \text{para } n = 1,2,3\ldots$$

3.2.

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com a condição de fronteira $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0, & (5.18) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad R(r) \text{ limitada para } 0 < r < a. & (5.19) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.

Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

As condições de fronteira $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$ implica que (5.18) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira tem soluções fundamentais

$$\Theta_n(\theta) \quad = \quad \operatorname{sen} n\theta,\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.16) obtemos

$$r^2 R''(t) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n,\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(r)$ tem que ser limitada para $0 < r < a$, então as soluções fundamentais são

$$R_n(r) = r^n,\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais da forma

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n \operatorname{sen} n\theta. \tag{5.20}$$

Então para satisfazer a condição $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = g(\theta)$, temos que impor a condição

$$g(\theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} c_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$n a^{n-1} c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots$$

3.3. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com a condição de fronteira $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, & \Theta(0) = \Theta(\alpha) = 0, \quad (5.21) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, & R(r) \text{ limitada para } 0 < r < a. \quad (5.22) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.

Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

As condições de fronteira $\Theta(0) = \Theta(\alpha) = 0$ implica que (5.21) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira tem soluções fundamentais

$$\Theta(\theta) \quad = \quad \operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$ na equação diferencial (5.22) obtemos

$$r^2R''(t) + rR'(r) - \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 + c_2\ln r,\ \text{para } n = 0; \quad R(r) = c_1 r^{-\frac{n\pi}{\alpha}} + c_2 r^{\frac{n\pi}{\alpha}},\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(r)$ tem que ser limitada para $0 < r < a$, então as soluções fundamentais são

$$R_n(r) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais da forma

$$u_n(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha}.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha}. \tag{5.23}$$

Então para satisfazer a condição $u(a, \theta) = f(\theta)$, temos que impor a condição

$$f(\theta) = u(a, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n\pi}{\alpha}} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha}.$$

Esta é a série de Fourier de $f(\theta)$ de senos com período 2α. Assim, se a função $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$a^{\frac{n\pi}{\alpha}} c_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha} \, d\theta, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots$$

3.4. (a) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, & \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), \qquad (5.24) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, & R(a) = 0. \qquad (5.25) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.
Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.
A condição $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, implica que (5.24) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira (5.24) tem soluções fundamentais

$$\begin{aligned} \Theta_n^{(1)}(\theta) &= \cos n\theta,\ \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \Theta_n^{(2)}(\theta) &= \operatorname{sen} n\theta,\ \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.25) obtemos

$$r^2R''(t) + rR'(r) - n^2R(r) = 0,$$

que tem como solução geral

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r, \text{ para } n = 0; \quad R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(a) = 0$, as soluções fundamentais são

$$R_0(r) = \ln \frac{r}{a}, \quad R_n(r) = r^n - a^{2n}r^{-n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e a condição de que $u(a, \theta) = 0$ tem soluções fundamentais

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = \ln \frac{r}{a},$$
$$u_n^{(1)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(1)}(\theta) = (r^n - a^{2n}r^{-n}) \cos n\theta,$$
$$u_n^{(2)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(2)}(\theta) = (r^n - a^{2n}r^{-n}) \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$u(r, \theta) = c_0 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n^{(1)}(r, \theta) + d_n u_n^{(2)}(r, \theta)) \tag{5.26}$$
$$= c_0 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - a^{2n}r^{-n})(c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{5.27}$$

Então para satisfazer a condição $u(b, \theta) = g(\theta)$, temos que impor a condição

$$g(\theta) = u(b, \theta) = c_0 \ln \frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (b^n - a^{2n}b^{-n})(c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Esta é a série de Fourier de $g(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} (\ln \frac{b}{a})c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta, \\ (b^n - a^{2n}b^{-n})c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \\ (b^n - a^{2n}b^{-n})d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{5.28}$$

para $n = 1, 2, 3\ldots$

(b) Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, & \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), \quad (5.29) \\ r^2 R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, & R(b) = 0. \quad (5.30) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.
Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

A condição $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, implica que (5.29) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira (5.29) tem soluções fundamentais

$$\begin{aligned} \Theta_n^{(1)}(\theta) &= \cos n\theta, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \Theta_n^{(2)}(\theta) &= \operatorname{sen} n\theta, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.30) obtemos

$$r^2 R''(t) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que tem como solução geral

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r, \text{ para } n = 0; \quad R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(b) = 0$, as soluções fundamentais são

$$R_0(r) = \ln \frac{r}{b}, \quad R_n(r) = r^n - b^{2n} r^{-n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e a condição de que $u(b,\theta) = 0$ tem soluções fundamentais

$$u_0(r,\theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = \ln\frac{r}{b},$$

$$u_n^{(1)}(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n^{(1)}(\theta) = (r^n - b^{2n}r^{-n})\cos n\theta,$$

$$u_n^{(2)}(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n^{(2)}(\theta) = (r^n - b^{2n}r^{-n})\,\mathrm{sen}\, n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= c_0\ln\frac{r}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n u_n^{(1)}(r,\theta) + d_n u_n^{(2)}(r,\theta)) && (5.31)\\ &= c_0\ln\frac{r}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}(r^n - b^{2n}r^{-n})(c_n\cos n\theta + d_n\,\mathrm{sen}\, n\theta). && (5.32)\end{aligned}$$

Então para satisfazer a condição $u(a,\theta) = f(\theta)$, temos que impor a condição

$$f(\theta) = u(a,\theta) = c_0\ln\frac{a}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^{2n}a^{-n})(c_n\cos n\theta + d_n\,\mathrm{sen}\, n\theta).$$

Esta é a série de Fourier de $f(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} (\ln\frac{a}{b})c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta,\\ (a^n - b^{2n}a^{-n})c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, && (5.33)\\ (a^n - b^{2n}a^{-n})d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

para $n = 1,2,3\ldots$

(c) A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(\theta)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(r,\theta)$, com a solução do problema com apenas $g(\theta)$ não nula, $u^{(g)}(r,\theta)$, ou seja,

$$u(r,\theta) = u^{(f)}(r,\theta) + u^{(g)}(r,\theta).$$

Logo a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= c_0^{(f)} \ln \frac{r}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - b^{2n} r^{-n})(c_n^{(f)} \cos n\theta + d_n^{(f)} \operatorname{sen} n\theta) \\ &\quad + c_0^{(g)} \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - a^{2n} r^{-n})(c_n^{(g)} \cos n\theta + d_n^{(g)} \operatorname{sen} n\theta) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} (\ln \frac{a}{b}) c_0^{(f)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta, \\ (a^n - b^{2n} a^{-n}) c_n^{(f)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \\ (a^n - b^{2n} a^{-n}) d_n^{(f)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta. \\ (\ln \frac{b}{a}) c_0^{(g)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta, \\ (b^n - a^{2n} b^{-n}) c_n^{(g)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \\ (b^n - a^{2n} b^{-n}) d_n^{(g)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3 \ldots$

3.5. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de r por uma função de θ, ou seja,

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), & (5.34) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad R(r) \text{ limitada para } r > a. & (5.35) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.

Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2\cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

A condição $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, implica que (5.34) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, o problema de valor de fronteira (5.34) tem soluções fundamentais

$$\begin{aligned}\Theta_n^{(1)}(\theta) &= \cos n\theta, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \Theta_n^{(2)}(\theta) &= \operatorname{sen} n\theta, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.35) obtemos

$$r^2 R''(t) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r, \text{ para } n = 0; \quad R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(r)$ é limitada para $r > a$, as soluções fundamentais são

$$R_0(r) = 1, \quad R_n(r) = r^{-n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial na região $r > a$ tem soluções fundamentais

$$u_0(r, \theta) = 1$$

$$u_n^{(1)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(1)}(\theta) = r^{-n} \cos n\theta, \quad u_n^{(2)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(2)}(\theta) = r^{-n} \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$\begin{aligned}u(r, \theta) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n^{(1)}(r, \theta) + d_n u_n^{(2)}(r, \theta)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Para satisfazer a condição $u(a, \theta) = f(\theta)$, temos que impor a condição

$$f(\theta) = u(a, \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Esta é a série de Fourier de $f(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta, \\ a^{-n}c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \\ a^{-n}d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{5.37}$$

para $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\lim_{r\to\infty} u_n(r,\theta)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\left(\lim_{r\to\infty} u_n(r,\theta)\right) = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta, \quad \text{para } x \in [0, a],$$

que decorre da aplicação do Teorema 2.8 na página 200, usando o fato de que

$$|c_n u_n^{(1)}(r,\theta)| \le M\left(\frac{a}{r_1}\right)^n, \; |d_n u_n^{(2)}(r,\theta)| \le M\left(\frac{a}{r_1}\right)^n$$

para $M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta$, $a < r_1 \le r \le r_2,\; 0 \le \theta \le 2\pi,\; n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_1}\right)^n < \infty.$$

3.6.

$$u(r,z) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando-se e substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0, & (5.38) \\ r^2R''(t) + rR'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad R(1) = 0. & (5.39) \end{cases}$$

A equação $\Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\theta}$.
Se $\lambda = 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$.
Se $\lambda < 0$ **:** $\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\theta) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\theta)$.

A condição $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$, implica que (5.42) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda \leq 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -n^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

e além disso, o problema de valor de fronteira (5.42) tem soluções fundamentais

$$\Theta_n(\theta) \quad = \quad \operatorname{sen} n\theta, \; \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -n^2$ na equação diferencial (5.43) obtemos

$$r^2R''(t) + rR'(r) - n^2R(r) = 0,$$

que tem como solução

$$R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como $R(1) = 0$, as soluções fundamentais são

$$R_n(r) = r^n - r^{-n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial na região $1 < r < a$ e $0 < \theta < \pi$ tem soluções fundamentais

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = (r^n - r^{-n}) \operatorname{sen} n\theta.$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja a série

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (r^n - r^{-n}) \operatorname{sen} n\theta. \tag{5.40}$$

Para satisfazer a condição $\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = g(\theta)$, temos que impor a condição

$$g(\theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (a^{n-1} + a^{-n-1}) \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(\theta)$ com período 2π. Assim, se a função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$n c_n (a^{n-1} + a^{-n-1}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \tag{5.41}$$

para $n = 1, 2, 3 \ldots$

3.7.

$$u(r, z) = R(r) Z(z).$$

Derivando-se e substituindo-se na equação diferencial obtemos

$$R''(r)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)Z(z) + R(r)Z''(z) = 0,$$

dividindo-se por $R(r)Z(z)$:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{R''(r)}{R(r)} - \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de z, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{R''(r)}{R(r)} - \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com a condições de fronteira:

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad Z(0) = Z(b) = 0, & (5.42) \\ rR''(r) + R'(r) - \lambda r R(r) = 0, \quad R(r) \text{ limitada para } 0 < r < a. & (5.43) \end{cases}$$

A equação (5.42) com as condições de fronteira tem solução não nula somente se $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$ e tem soluções fundamentais

$$Z_n(z) = \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots$$

3.8.

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{2}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}(R(r)\Theta''(\theta) + \cot\theta R(r)\Theta'(\theta)) = 0,$$

multiplicando-se por $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$\frac{\Theta''(\theta)+\cot\theta\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - 2r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

O primeiro membro depende apenas de θ, enquanto o segundo depende apenas de r. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{\Theta''(\theta)+\cot\theta\,\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - 2r\frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\cot\theta\,\Theta'(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \\ r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0. \end{cases}$$

6

Transformada de Fourier

6.1 Definição e Propriedades

A **transformada de Fourier** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é definida por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$ tal que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por x. Enquanto a transformada de Fourier será representada pela letra correspondente com um chapéu e a sua variável por ω. Por exemplo, as transformadas de Fourier das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ serão representadas por $\hat{f}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$ e $\hat{h}(\omega)$, respectivamente.

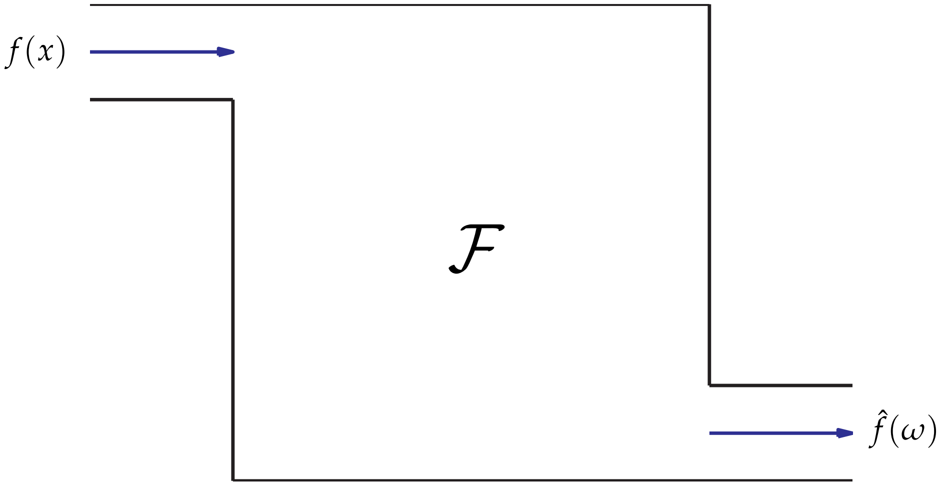


Figura 6.1 – Transformada de Fourier como uma "caixa"

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x) dx \right),$$

e $\hat{f}(\omega)$ é real se, e somente se, f é par. Neste caso também $\hat{f}$ é par.
Vários autores definem a transformada de Fourier de maneiras diferentes, mas que são casos particulares da fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ib\omega x} dx,$$

para diferentes valores das constantes a e b. Estamos usando aqui $(a, b) = (0, -1)$.

Algumas definições também bastante usadas são com $(a,b) = (0,-2\pi)$ e $(a,b) = (1,-1)$.

Seja a uma constante maior ou igual a zero. Definimos a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < a \\ 1, & \text{para } x \geq a \end{cases}$$

Observe que $u_a(x) = u_0(x-a)$ e $u_a(-x) = u_{-a}(x)$. Em muitos sistemas computacionais a função $u_0(x)$ é uma função pré-definida no sistema.

Seja I um subconjunto dos números reais. A função $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chamada de **função característica de** I é definida por

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 6.1. Seja a um número real positivo. Seja $\chi_{[0,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-i\omega x} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_0^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}, \text{ se } \omega \neq 0, \\ \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.2. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{-ax} u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-ax}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega x}e^{-ax}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}.\end{aligned}$$

Teorema 6.1 (Dilatação). *Seja a uma constante não nula. Se a transformada de Fourier da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é $\hat{f}(\omega)$, então a transformada de Fourier da função*

$$g(x) = f(ax)$$

é

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \quad \textit{para } \omega\in\mathbb{R}.$$

Em particular $\mathcal{F}(f(-x)) = \hat{f}(-\omega)$.

Demonstração. Se $a > 0$, então

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax)dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\frac{x'}{a}} f(x')dx' = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}).\end{aligned}$$

Se $a < 0$, então

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(ax)dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega\frac{x'}{a}} f(x')dx' = -\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}).\end{aligned}$$

■

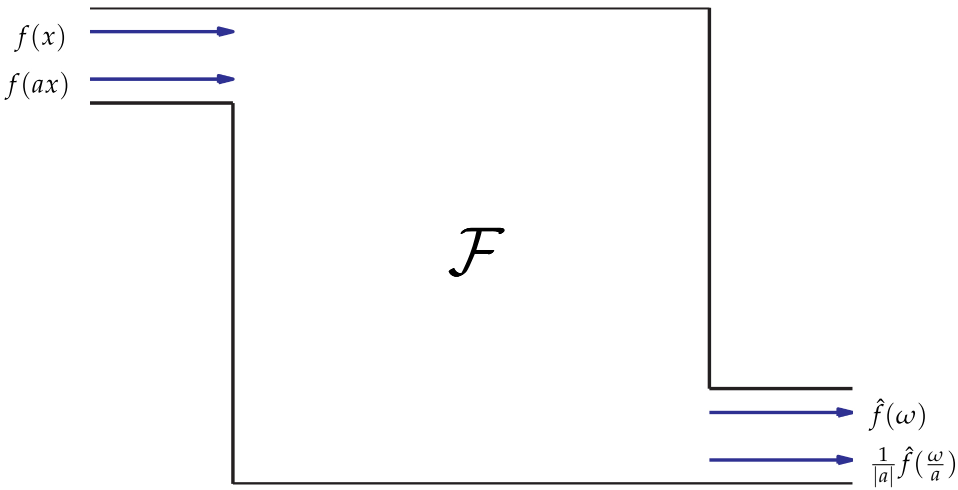


Figura 6.2 – Teorema da Dilatação

Exemplo 6.3. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{ax}u_0(-x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Como $f(x) = g(-x)$, em que $g(x) = e^{-ax}u_0(x)$, então pelo Exemplo 6.2 temos que

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g)(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega}$$

Exemplo 6.4. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \chi_{[-a,0]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\chi_{[-a,0]}(x) = \chi_{[0,a]}(-x)$, então pelo Exemplo 6.1 temos que

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(\chi_{[-a,0]})(\omega) = \mathcal{F}(\chi_{[0,a]})(-\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{e^{ia\omega} - 1}{i\omega}, & \text{se } \omega \neq 0, \\ \dfrac{a}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = 0. \end{cases}$$

Observe que além de se verificar que $\lim_{\omega \to \omega_0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega_0)$, para $\omega_0 \neq 0$, também temos que

$$\lim_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0).$$

Logo, $\hat{f}(\omega)$ é contínua. Pode-se mostrar que isto vale em geral, como enunciamos a seguir, sem apresentar uma demonstração.

Teorema 6.2 (Continuidade). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, então $\hat{f}(\omega)$ é contínua.*

Teorema 6.3 (Linearidade). *Se a transformada de Fourier de $f(x)$ é $\hat{f}(\omega)$, e a transformada de Fourier de $g(x)$ é $\hat{g}(\omega)$, então para quaisquer constantes α e β*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega), \quad \textit{para } \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(\alpha f(x) + \beta g(x))dx \\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g(x)dx \\
&= \alpha\mathcal{F}(f)(\omega) + \beta\mathcal{F}(g)(\omega)
\end{aligned}$$

■

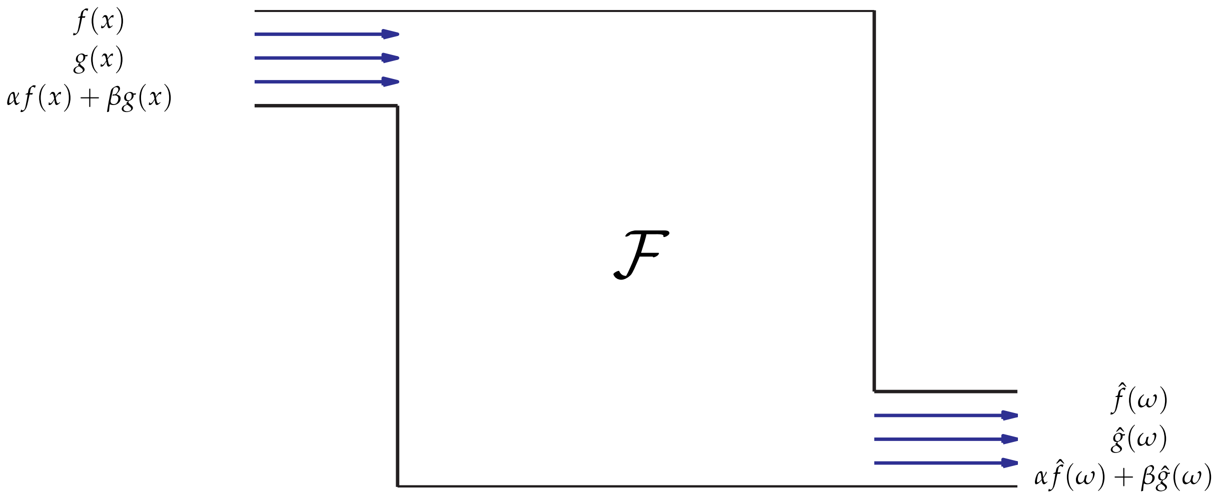


Figura 6.3 – Transformada de Fourier de uma combinação linear

Exemplo 6.5. Seja a um número real positivo. Seja $\chi_{[-a,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < x < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\chi_{[-a,a]}(x) = \chi_{[-a,0]}(x) + \chi_{[0,a]}(x)$, então pelos Exemplos 6.1 e 6.4 temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ia\omega}-1}{i\omega} + \frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ia\omega}-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}, \text{ se } \omega \neq 0 \\
\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Aqui usamos que

$$\begin{aligned}
e^{ia\omega} &= \cos a\omega + i \operatorname{sen} a\omega, \\
e^{-ia\omega} &= \cos a\omega - i \operatorname{sen} a\omega.
\end{aligned}$$

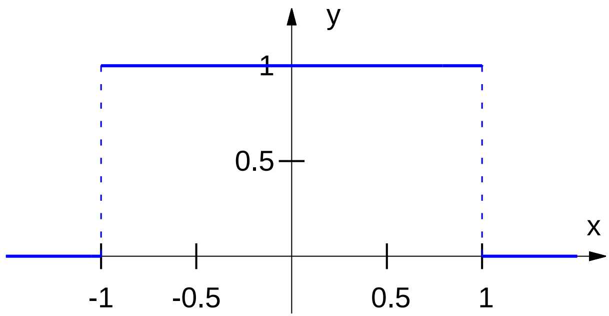


Figura 6.4 – Função do Exemplo 6.5 com $a = 1$

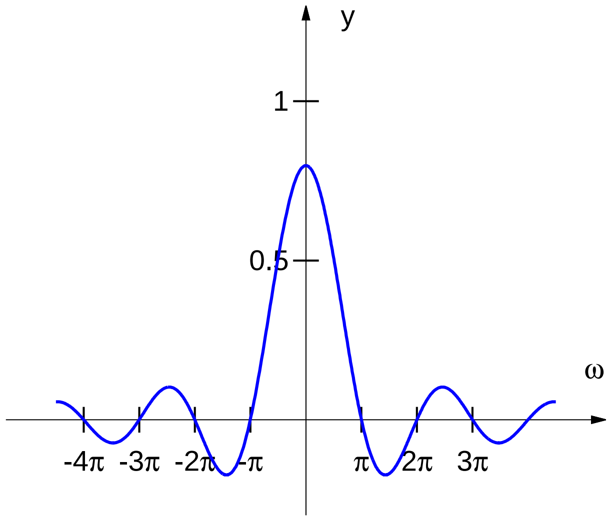


Figura 6.5 – Transformada de Fourier da função do Exemplo 6.5 com $a = 1$

Exemplo 6.6. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Como $f(x) = e^{ax}u_0(-x) + e^{-ax}u_0(x)$, então pelos Exemplos 6.2 e 6.3 temos que

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\omega^2 + a^2}.$$

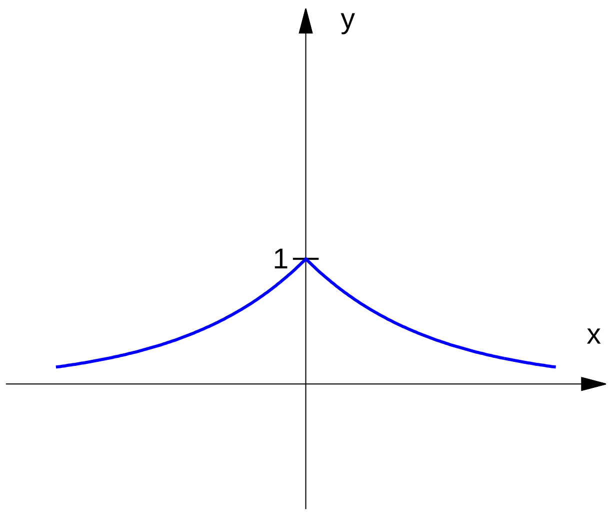


Figura 6.6 – Função do Exemplo 6.6 com $a = 1$

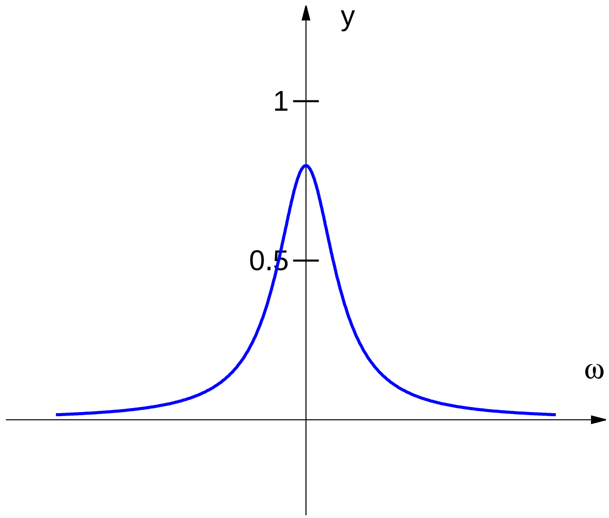


Figura 6.7 – Transformada de Fourier da função do Exemplo 6.6 com $a = 1$

Teorema 6.4 (Derivadas da Transformada de Fourier). *Seja $\hat{f}(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(x)$.*

a. *Se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega).$$

b. *Se também $\int_{-\infty}^{\infty} |x^2 f(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(x^2 f(x))(\omega) = -\frac{d^2\hat{f}}{d\omega^2}(\omega).$$

Demonstração. Pode ser demonstrado que sob as hipóteses acima a derivada pode ser calculada sob o sinal de integração.

a.

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}\left(e^{-i\omega x} f(x)\right) dx \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} x f(x) dx \\
&= -i\mathcal{F}(xf(x))(\omega).
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{f}}{d\omega^2}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{d\omega^2}\left(e^{-i\omega x} f(x)\right) dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} x^2 f(x) dx \\
&= -\mathcal{F}(x^2 f(x))(\omega).
\end{aligned}$$

■

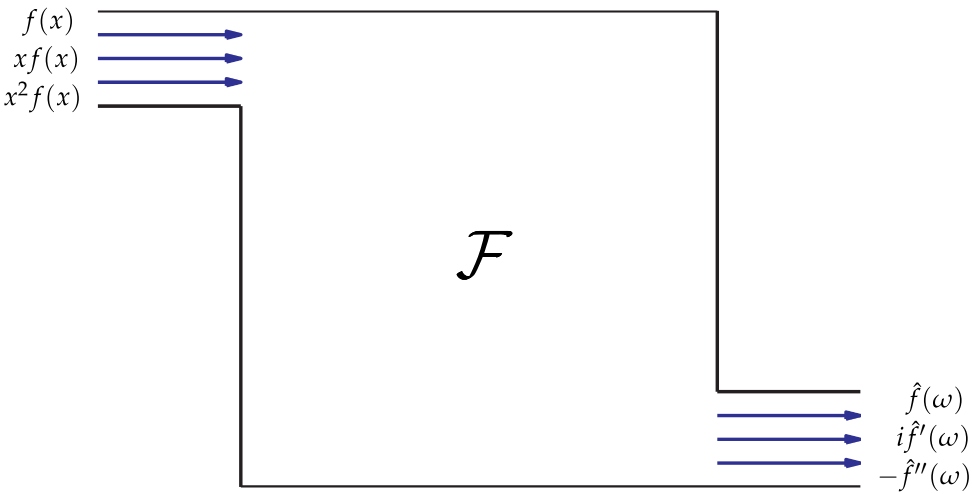


Figura 6.8 – Derivadas da Transformada de Fourier

Exemplo 6.7. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -a < x < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observamos que

$$f(x) = |x|\chi_{[-a,a]}(x) = -x\chi_{[-a,0]}(x) + x\chi_{[0,a]}(x).$$

Mas como $\chi_{[-a,0]}(x) = \chi_{[0,a]}(-x)$, então

$$f(x) = -x\chi_{[0,a]}(-x) + x\chi_{[0,a]}(x).$$

Para $g(x) = x\chi_{[0,a]}(x)$ aplicamos o Teorema sobre Derivadas da Transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\widehat{\chi_{[0,a]}}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} - i(1-e^{-i\,a\,\omega})}{(i\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}, \quad \text{para } \omega \neq 0.
\end{aligned}$$

Para $g(-x) = -x\chi_{[0,a]}(-x)$ aplicamos o Teorema da Dilatação:

$$\mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) = \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}, \quad \text{para } \omega \neq 0.$$

então temos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \hat{g}(-\omega) + \hat{g}(\omega) \\
&= \mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) + \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2} + \frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{a\,\omega\,\text{sen}\,(a\,\omega) + \cos\,(a\,\omega) - 1}{\omega^2}, \quad \text{para } \omega \neq 0 \\
\hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}|x|dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

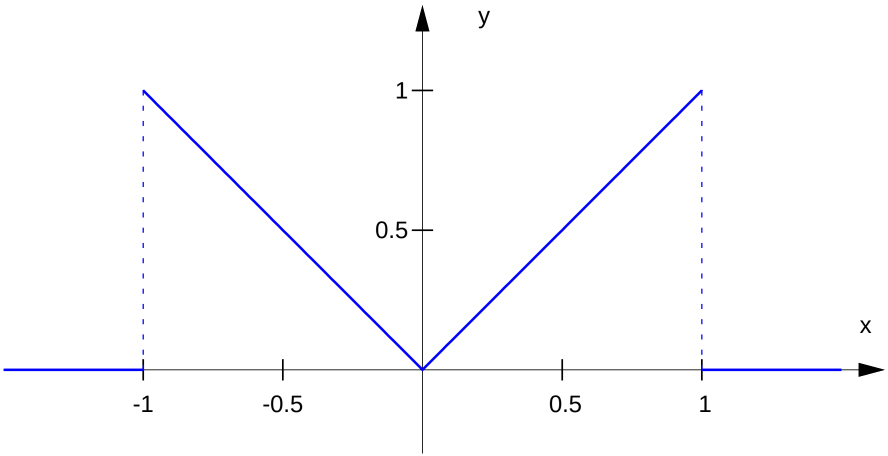


Figura 6.9 – Função do Exemplo 6.7 com $a = 1$

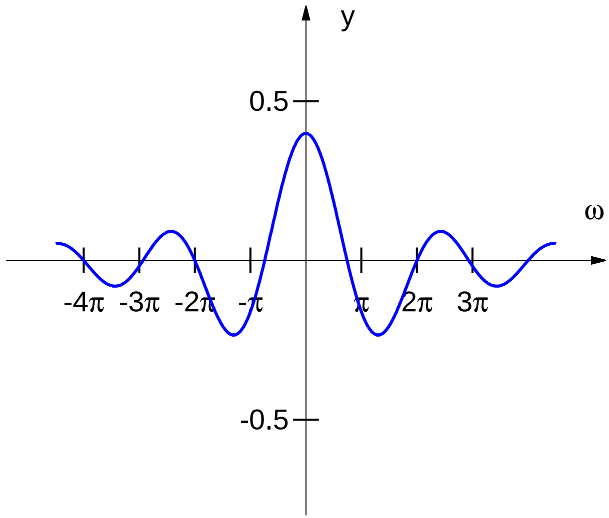


Figura 6.10 – Transformada de Fourier da função do Exemplo 6.7 com $a = 1$

Teorema 6.5 (Transformada de Fourier das Derivadas). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$.*

a. *Se $f'(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

b. *Se $f'(x)$ é contínua, $f''(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x\to\pm\infty} |f'(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2\hat{f}(\omega).$$

Demonstração. **a.** Vamos provar para o caso em que $f'(x)$ é contínua.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \\
&= i\omega\hat{f}(\omega),
\end{aligned}$$

pois $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\omega x} f(x) = 0$.

b. Vamos provar para o caso em que $f''(x)$ é contínua. Usando o item anterior:

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega)^2\hat{f}(\omega) = \omega^2\hat{f}(\omega).$$

■

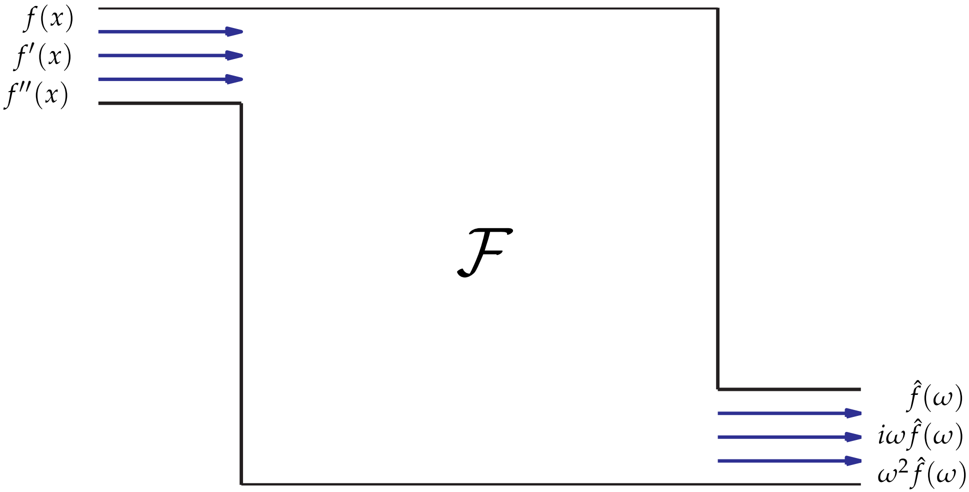


Figura 6.11 – Transformada de Fourier das Derivadas

Corolário 6.6 (Transformada de Fourier da Integral). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ é tal que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |g(x)| = 0$, então*

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}, \text{ para } \omega \neq 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.5 temos que

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(g')(\omega) = i\omega\hat{g}(\omega).$$

De onde segue o resultado. ■

Exemplo 6.8. Seja $f(x) = e^{-ax^2}$. Derivando obtemos

$$f'(x) = -2axf(x).$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a ambos os membros obtemos

$$i\omega\hat{f}(\omega) = -2ai\hat{f}'(\omega).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int \frac{\omega}{2a}d\omega} = e^{\frac{\omega^2}{4a}}$ obtemos

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{\frac{\omega^2}{4a}}\hat{f}(\omega)\right) = 0.$$

Integrando-se em relação a ω obtemos

$$e^{\frac{\omega^2}{4a}}\hat{f}(\omega) = c.$$

Logo,

$$\hat{f}(\omega) = ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Usando o fato de que $\hat{f}(0) = c$ obtemos que

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2}rdrd\theta\right)^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2a}\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}\Big|_0^{\infty}d\theta\right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Em particular

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Teorema 6.7 (Translação). *Seja a uma constante. Se a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\hat{f}(\omega)$, então*

a. $\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$, *para $\omega \in \mathbb{R}$. e*

b. $\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$.

Demonstração. **a.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x-a))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x-a)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x'+a)} f(x')dx' = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{iax} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-a)x} f(x)dx = \hat{f}(\omega - a). \end{aligned}$$

■

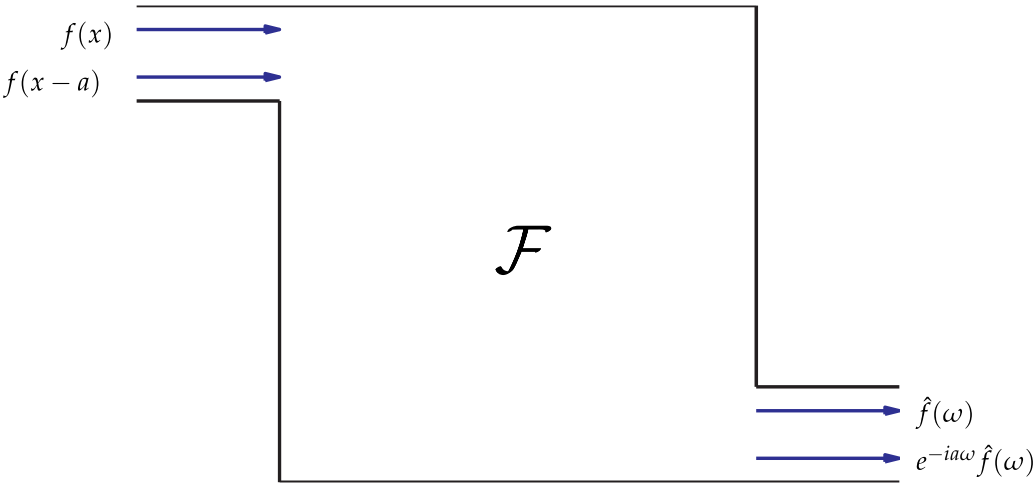


Figura 6.12 – Teorema da Translação (a)

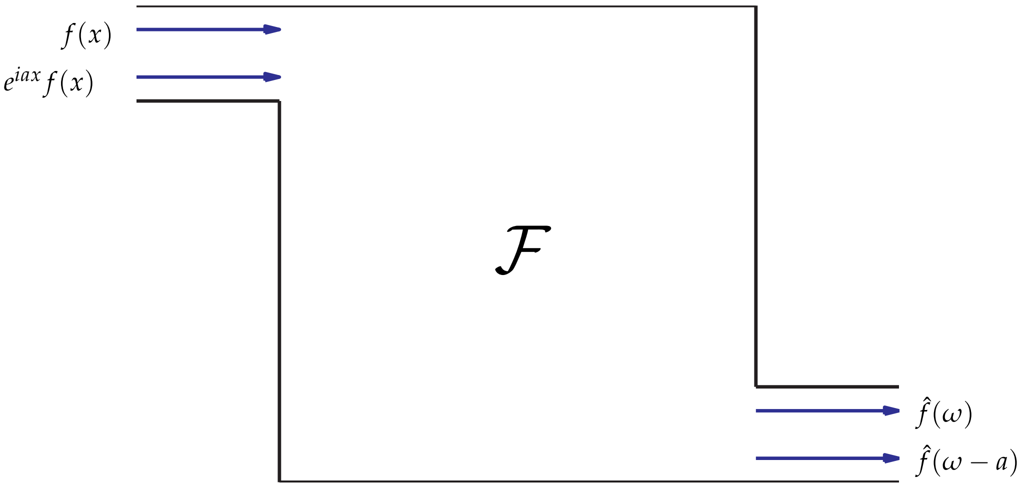


Figura 6.13 – Teorema da Translação (b)

Exemplo 6.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos ax & \text{se } -b < x < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} e^{ia\omega} &= \cos a\omega + i \operatorname{sen} a\omega, \\ e^{-ia\omega} &= \cos a\omega - i \operatorname{sen} a\omega, \end{aligned}$$

então

$$f(x) = (\cos ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \left(\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}\right)\chi_{[-b,b]}(x).$$

Pela linearidade da transformada de Fourier e pelo Teorema da Dilatação (Teorema 6.1 na página 505), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega) &= \mathcal{F}\left(\chi_{[0,b]}(-x) + \chi_{[0,b]}(x)\right)(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ib\omega} - 1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-ib\omega}}{i\omega}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(b\omega)}{\omega}, \text{ para } \omega \neq 0, \\ \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(0) &= \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

então, pelo Teorema da Translação (Teorema 6.7 (b) na página 522) e pela linearidade da transformada de Fourier, temos que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega - a) + \mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega + a)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\operatorname{sen} b(\omega - a)}{\omega - a} + \frac{\operatorname{sen} b(\omega + a)}{\omega + a}\right), \quad \text{para } \omega \neq \pm a \\ \hat{f}(-a) &= \hat{f}(a) = \lim_{\omega \to a} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(b + \frac{\operatorname{sen} 2ab}{2a}\right). \end{aligned}$$

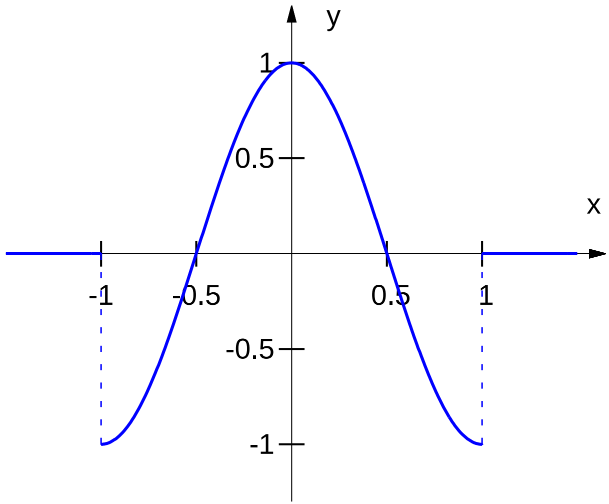


Figura 6.14 – Função do Exemplo 6.7 com $a = \pi$ e $b = 1$

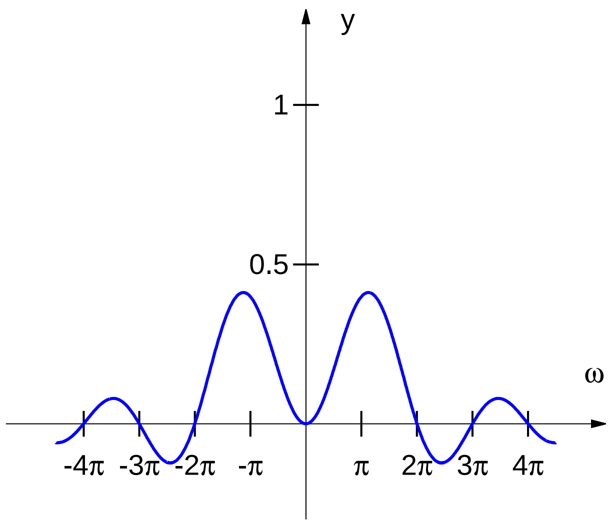


Figura 6.15 – Transformada de Fourier da função do Exemplo 6.9 com $a = \pi$ e $b = 1$

Exercícios (respostas na página 564)

1.1. Determine a transformada de Fourier das seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) $f(x) = xe^{-ax}u_0(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ para $a > 0$.

(b) $f(x) = (1 - |x|/a)\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{se } -a < x < a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) $f(x) = \text{sen}(ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \begin{cases} \text{sen}(ax), & \text{se } -b < x < b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(d) $f(x) = xe^{-x^2}$.

(e) $f(x) = x^2e^{-x^2}$.

(f) $f(x) = e^{-(a+ib)x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-(a+ib)x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

(g) $f(x) = e^{(a+ib)x}u_0(-x) = \begin{cases} e^{(a+ib)x}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

1.2. Seja $f(x) = e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\,\text{sen}(x^2)$.

(a) Mostre que $f(x)$ satisfaz a equação diferencial $f'(x) - i2xf(x) = 0$.

(b) Aplique a transformada de Fourier na equação diferencial do item anterior obtendo

$$\hat{f}'(\omega) - \frac{\omega}{2i}\hat{f}(\omega) = 0.$$

(c) Resolva a equação diferencial do item anterior e encontre que

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)e^{-i\frac{\omega^2}{4}}.$$

(d) Usando o fato de que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

mostre que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\omega^2}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

(e) Use o item anterior para mostrar que

$$\mathcal{F}\left(\cos(x^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

(f) Usando o item anterior encontre $\mathcal{F}\left(\cos(ax^2)\right)(\omega)$ e $\mathcal{F}\left(\operatorname{sen}(ax^2)\right)(\omega)$, para $a > 0$.

6.2 Inversão

Teorema 6.8. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema de Riemann-Lesbegue, temos que

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} e^{-i\omega x} f(x)dx = \lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} f(x) \cos \omega x dx + i \lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} f(x) \operatorname{sen} \omega x dx = 0.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $\int_{|x|>M} |f(x)|dx < \epsilon$. Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \lim_{\omega \to \pm\infty} |\hat{f}(\omega)| &= \lim_{\omega \to \pm\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx \right| \\ &\leq \lim_{\omega \to \pm\infty} \left| \int_{-M}^{M} e^{-i\omega x} f(x)dx \right| + \int_{|x|>M} |f(x)|dx \leq \epsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 6.9. *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, $g(0) = 0$ e $g'(0)$ existe, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = 0.$$

Demonstração. Seja

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ g'(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então $g(x) = xh(x)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx < \infty$. Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = i\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}'(\omega)d\omega = i\hat{h}(\omega)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

pelo Teorema 6.8. ■

Teorema 6.10. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega)d\omega,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ em que f é contínua.

Demonstração. Vamos demonstrar para o caso em que $f'(x)$ existe. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x') = f(x + x') - f(x)e^{-\frac{x'^2}{2}}.$$

Como $g(0) = 0$, pelo Lema 6.9 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega}\hat{f}(\omega)d\omega - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega}\hat{f}(\omega)d\omega - f(x)\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

■

Corolário 6.11. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, então*

$$\mathcal{F}(\hat{f})(\omega) = f(-\omega).$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.10 temos que

$$f(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega'\omega}\hat{f}(\omega')d\omega' = \mathcal{F}(\hat{f})(\omega)$$

■

Exemplo 6.10. Seja a um número real positivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

Como $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$, então

$$f(\omega) = \hat{g}(\omega), \quad \text{em que } g(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}.$$

Logo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(\hat{g})(\omega) = g(-\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a|\omega|}.$$

Corolário 6.12 (Injetividade). *Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ seccionalmente contínuas tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, se*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega), \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R},$$

então $f(x) = g(x)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Demonstração. Pela linearidade da transformada de Fourier, basta provarmos que se $\mathcal{F}(f)(\omega) = 0$, então $f(x) = 0$ nos pontos em que f é contínua. Mas isto é decorrência imediata do Teorema 6.10. ■

Exemplo 6.11. Vamos determinar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja transformada de Fourier é $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{a + ib + i\omega}$, para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + ib + i\omega} = \frac{1}{a + i(b + \omega)}$$

$$f(x) = e^{-ibx}\sqrt{2\pi}e^{-ax}u_0(x) = \sqrt{2\pi}e^{-(a+ib)x}u_0(x).$$

Exercícios (respostas na página 567)

2.1. Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cujas transformadas de Fourier são dadas

(a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)}$.

(b) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{i\omega}{1+\omega^2}$.

(d) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+\omega+1}$.

(e) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{a+ib-i\omega}$, para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

(f) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{4-\omega^2+2i\omega}$.

2.2. Calcule a transformada de Fourier das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

2.3. No Exemplo 6.5 na página 508 foi calculada a transformada de Fourier de

$$g(x) = \chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < x < a \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabendo-se que $\hat{g}(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}$, para $\omega \neq 0$, determine a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} ax}{x}.$$

2.4. No Exercício 1.1 na página 528 foi calculada a transformada de Fourier de

$$g(x) = (1 - |x|/a)\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{se } -a < x < a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabendo-se que $\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(a\,\omega)}{a\omega^2}$, para $\omega \neq 0$, calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1 - \cos ax}{x^2}.$$

6.3 Convolução

A convolução de duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x-y)dy = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x-y)dy \\ &= \int_0^1 \chi_{[-1,0]}(y-x)dy = \int_0^1 \chi_{[-1+x,x]}(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{se } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

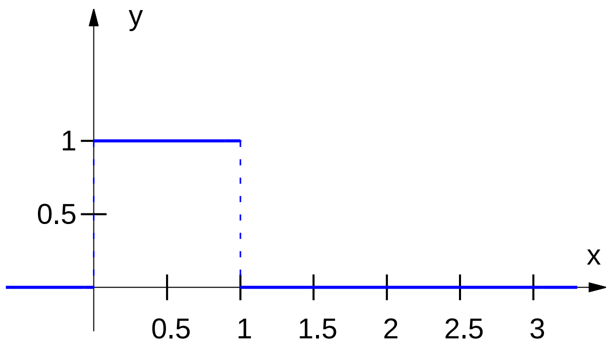


Figura 6.16 – Função $\chi_{[0,1]}$ do Exemplo 6.12

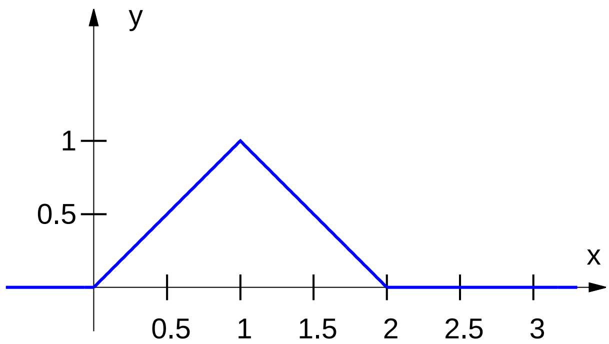


Figura 6.17 – Função $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ do Exemplo 6.12

Teorema 6.13 (Convolução). *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$. Então*

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega)$$

Demonstração. Pelas definições temos que

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right] dx.$$

Sob as hipóteses consideradas pode-se mostrar que podemos trocar a ordem de integração para obtermos

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g(x-y)dx \right] dy.$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $x - y = z$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(z+y)} g(z)dz \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} g(z)dz \right] dy \\
&= \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Como, pelo Exemplo 6.12, $f = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$, então

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,(\widehat{\chi_{[0,1]}}(\omega))^2 = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1-e^{-ia\omega})^2}{\omega^2}.$$

Teorema 6.14. *A convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $f * g = g * f$

(b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(d) $f * 0 = 0 * f = 0$

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{\infty}^{-\infty} f(x-y')g(y')(-dy') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y')g(y')dy' = (g*f)(x).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f*(g_1+g_2))(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g_1(x-y)+g_2(x-y))dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_1(x-y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_2(x-y)dy = \\ &= (f*g_1)(x)+(f*g_2)(x).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x-y)h(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(x-y-y')dy'\right] h(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(x-y-y')h(y)dydy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y')\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y-y')h(y)dy\right] dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y')(g*h)(x-y')dy' = (f*(g*h))(x).\end{aligned}$$

(d) $(f*0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)\cdot 0\, dy = 0 = (0*f)(x).$

■

Exercícios (respostas na página 570)

3.1. Calcule a convolução $f * g$ para $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

(a) $f(x) = e^{-x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$,

$g(x) = e^{-2x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$.

(b) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$,

$g(x) = e^{-x}u_0(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$.

3.2. Determine, usando convolução, as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cujas transformadas de Fourier são dadas

(a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)}$.

(b) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{(1 + i\omega)^2}$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{4 - \omega^2 + 2i\omega}$.

3.3. Resolva a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 4} dy = \frac{1}{x^2 + 9}$$

6.4 Aplicações às Equações Diferenciais Parciais

6.4.1 Equação do Calor em uma Barra Infinita

Vamos determinar a temperatura em função da posição e do tempo, $u(x,t)$ em uma barra infinita, sendo conhecida a distribuição de temperatura inicial, $f(x)$, ou seja, vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,t)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Então aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\alpha^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int \alpha^2\omega^2 dt} = e^{\alpha^2\omega^2 t}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\alpha^2\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t)\right) = 0.$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$e^{\alpha^2\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t) = c(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = c(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega, t) = e^{-\alpha^2 \omega^2 t}$. Então

$$k(x, t) = \frac{1}{\alpha \sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução (Teorema 6.13 na página 539) temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * k)(x, t) = \frac{1}{2\alpha \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} dy. \tag{6.1}$$

Pode-se provar que se f é seccionalmente contínua e limitada, então a expressão dada por (6.1) define uma função que satisfaz a equação do calor e

$$\lim_{t \to 0+} u(x, t) = f(x),$$

nos pontos em que f é contínua.

Exemplo 6.14. Vamos resolver, usando a transformada de Fourier, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{4}}, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int \omega^2 dt} = e^{\omega^2 t}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t)\right) = 0.$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$e^{\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t) = c(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = c(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Se $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$. Então $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2}e^{-\omega^2}$ e

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t} = \sqrt{2}e^{-\omega^2(1+t)}.$$

Logo a solução do problema de valor inicial é

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}}.$$

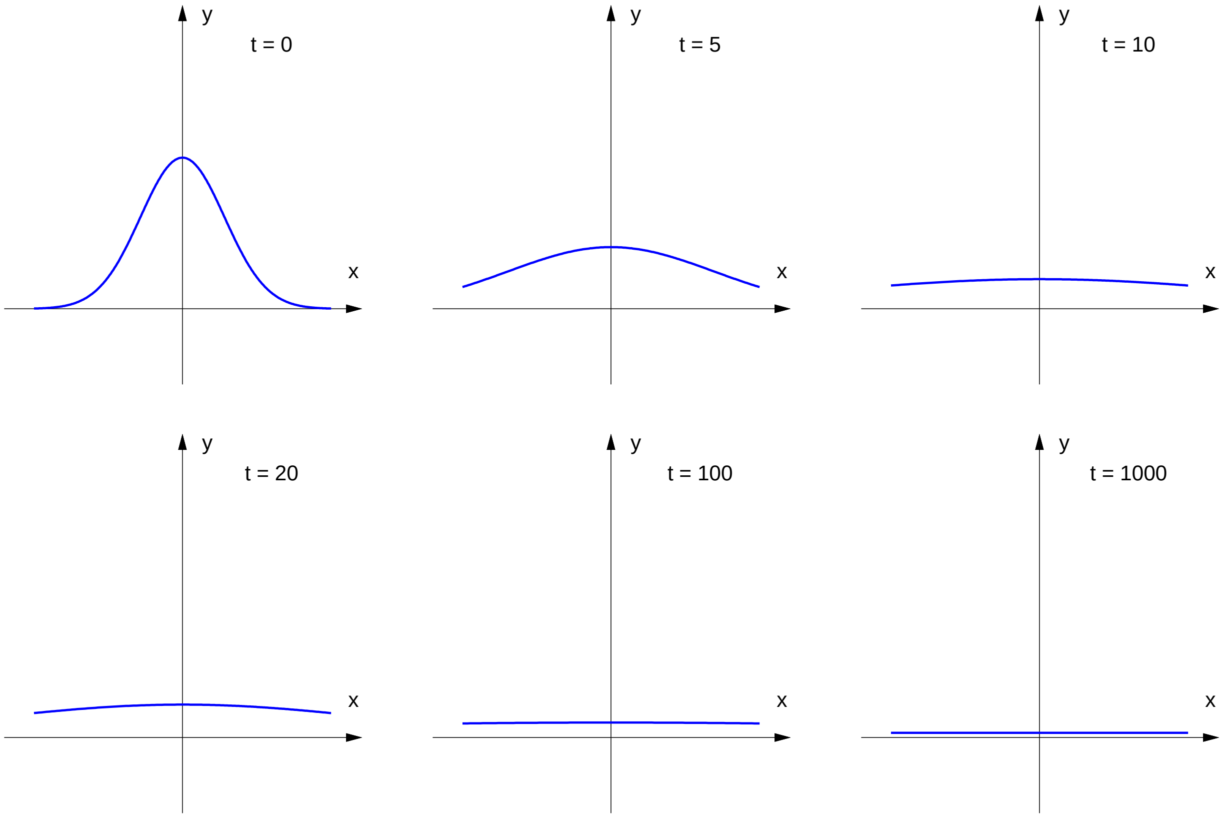


Figura 6.18 – Solução da equação do calor, $u(x,t)$, do Exemplo 6.14

6.4.2 Equação da Onda em uma Dimensão

Solução Geral da Equação da Onda em uma Dimensão

Vamos resolver a equação diferencial da onda em uma dimensão usando a transformada de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,t)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega, t) = -a^2\omega^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Para resolver esta equação diferencial temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + a^2\omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm a|\omega| i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial é

$$\hat{u}(\omega, t) = \begin{cases} c_1(\omega)e^{-ia\omega t} + c_2(\omega)e^{+ia\omega t}, & \text{se } \omega > 0, \\ c_1(0) + c_2(0)t, & \text{se } \omega = 0, \\ c_1(\omega)e^{+ia\omega t} + c_2(\omega)e^{-ia\omega t}, & \text{se } \omega < 0. \end{cases}$$

Definindo

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} c_1(\omega), & \text{se } \omega > 0, \\ c_2(\omega), & \text{se } \omega < 0, \end{cases} \qquad \hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} c_2(\omega), & \text{se } \omega > 0, \\ c_1(\omega), & \text{se } \omega < 0, \end{cases}$$

temos que

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{\phi}(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}(\omega)e^{+ia\omega t}. \tag{6.2}$$

e pelo Teorema da Translação (Teorema 6.7 na página 522) temos que

$$u(x,t) \quad = \quad \phi(x-at) + \psi(x+at).$$

Esta é a solução geral da equação da onda em uma dimensão que obtivemos na página 390.

Problema de Valor Inicial para a Equação da Onda em uma Dimensão

Vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Além do que já supomos anteriormente vamos supor também que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty.$$

Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais em relação a variável x obtemos

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,0) = \hat{g}(\omega).$$

Substituindo-se $t = 0$ em (6.2) obtemos

$$\hat{f}(\omega) = \hat{u}(\omega,0) = \hat{\phi}(\omega) + \hat{\psi}(\omega).$$

Derivando-se (6.2) em relação a t e substituindo-se $t = 0$ obtemos

$$\hat{g}(\omega) = ia\omega(-\hat{\phi}(\omega) + \hat{\psi}(\omega)).$$

Logo

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right),$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right).$$

Substituindo-se em (6.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\omega, t) &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right)e^{-ia\omega t} + \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{ia\omega}\right)e^{+ia\omega t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{f}(\omega)e^{-ia\omega t}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{\hat{g}(\omega)}{i\omega}e^{+ia\omega t} - \frac{\hat{g}(\omega)}{i\omega}e^{-ia\omega t}\right)
\end{aligned}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x - at) + f(x + at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy.$$

Esta é a **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial da corda infinita obtida na página 391.

6.4.3 Problema de Dirichlet no Semi-plano

Vamos considerar o problema de Dirichlet no semi-plano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; y > 0 \\ u(x,0) = f(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vamos supor que existam a transformada de Fourier da solução $u(x,y)$ em relação a variável x e de suas derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Além disso vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,y)| = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$. Então aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega,y) = 0.$$

Para resolver esta equação diferencial temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 - \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm|\omega|.$$

Logo a solução geral da equação diferencial é

$$\hat{u}(\omega,y) = \begin{cases} c_1(\omega)e^{-\omega y} + c_2(\omega)e^{+\omega y}, & \text{se } \omega > 0, \\ c_1(0) + c_2(0)y, & \text{se } \omega = 0, \\ c_1(\omega)e^{+\omega y} + c_2(\omega)e^{-\omega y}, & \text{se } \omega < 0. \end{cases}$$

Como, pelo Teorema 6.8 na página 530, $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} \hat{u}(\omega,y) = 0$, então $c_2(\omega) = 0$. Assim,

$$\hat{u}(\omega,y) = c_1(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = c_1(\omega)$$

obtemos que

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-|\omega|y}.$$

Seja $\hat{k}(\omega, y) = e^{-|\omega|y}$. Então

$$k(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

e pelo Teorema da Convolução (Teorema 6.13 na página 539) temos que

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * k)(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt. \tag{6.3}$$

Pode-se provar que se f é contínua e limitada, então a expressão dada por (6.3) define uma função que satisfaz a equação de Laplace e

$$\lim_{y \to 0+} u(x, y) = f(x).$$

Exercícios (respostas na página 573)

4.1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Qual a solução do PVI, se $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = 0$? Justifique.

4.2. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui γ é uma constante positiva.

4.3. Resolva o problema do calor em uma barra infinita com convecção (existe troca de calor da barra com o ambiente)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui k é uma constante.

4.4. Determine a temperatura como função da posição e do tempo de uma barra infinita com uma fonte externa de calor, ou seja, resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.5. Encontre a solução geral da equação diferencial a seguir usando a transformada de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aqui α é uma constante positiva.

4.6. Encontre a solução geral da equação diferencial a seguir usando a transformada de Fourier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

6.5 Tabela de Transformadas de Fourier

Transformadas de Fourier Elementares	
$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)$
$\chi_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega}$
$e^{-ax}u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-ax}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega}, \; a > 0$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$, para $a > 0$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a\lvert\omega\rvert}$
e^{-ax^2}, para $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$f(ax)$, para $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \hat{f}(\frac{\omega}{a})$
$xf(x)$	$i\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$\int_0^x f(y)dy$	$\frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}$
$f(x - a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$\hat{f}(x)$	$f(-\omega)$
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$	$\sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega)$

6.6 Relação com a Série de Fourier e a Transformada de Fourier Discreta

Usando fórmula de Euler podemos escrever a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua com derivada também seccionalmente contínua como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right) + \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-\frac{in\pi x}{L}} \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{\frac{in\pi x}{L}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},
\end{aligned}$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pois

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $f(x)=0$, para $|x|>L$. Então

$$\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx=\frac{2L}{\sqrt{2\pi}}c_n \quad \text{para } n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

em que c_n são os coeficientes da série de Fourier complexa da função $\tilde{f}:[-L,L]\to\mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(x)=f(x)$, para $x\in[-L,L]$.

Exemplo 6.15. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{se } -L<x<L\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

então como mostramos no Exemplo 6.7 na página 515:

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{L\omega\,\mathrm{sen}(L\omega)+\cos(L\omega)-1}{\omega^2}, & \text{se } \omega\neq 0\\ \frac{L^2}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega=0.\end{cases}$$

Seja $\tilde{f}:[-L,L]\to\mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(x)=f(x)$, para $x\in[-L,L]$.

$$c_n=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right)=\begin{cases}\frac{L((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}, & \text{se } n\neq 0\\ \frac{L}{2}, & \text{se } n=0.\end{cases}$$

Como $c_n=\dfrac{a_n+ib_n}{2}$, para $n=1,2,\ldots$ e $c_0=\dfrac{a_0}{2}$, então os coeficientes da série de Fourier real de $\tilde{f}$ são

$$a_0=L,\quad b_n=0,\quad a_n=\frac{2L((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}.$$

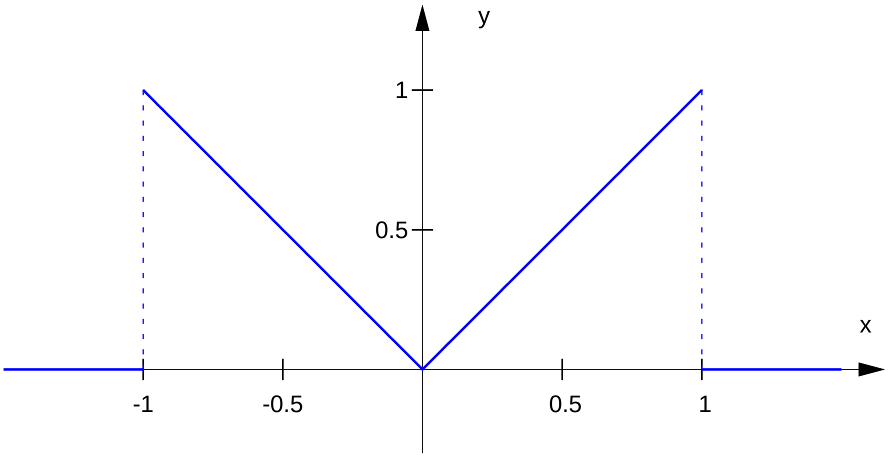


Figura 6.19 – Função do Exemplo 6.15 com $L = 1$

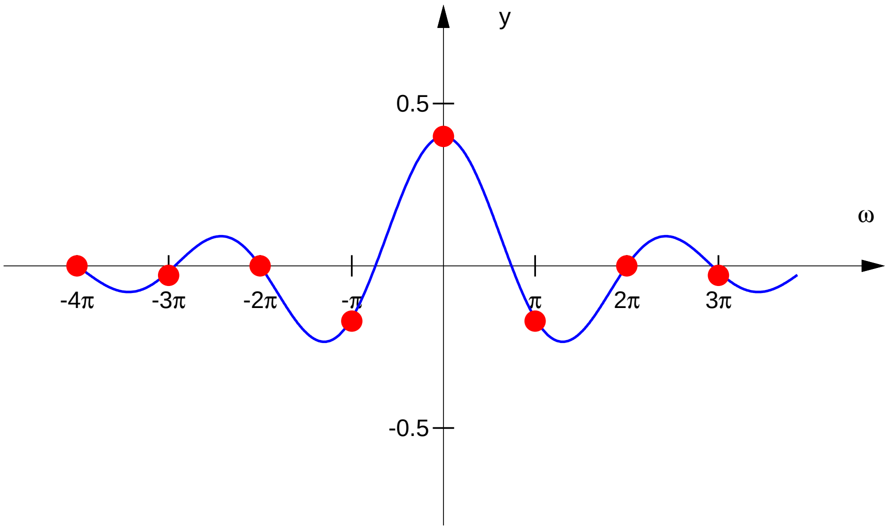


Figura 6.20 – Transformada de Fourier e os coeficientes da série de Fourier multiplicados por $2L/\sqrt{2\pi}$ da função do Exemplo 6.15 com $L = 1$

A **transformada de Fourier discreta (DFT)** de um vetor $Y \in \mathbb{C}^n$ é definida por

$$X = F_N Y,$$

em que

$$F_N = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{1}{N}} & e^{-i2\pi\frac{2}{N}} & \ldots & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}} \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{2}{N}} & e^{-i4\pi\frac{4}{N}} & \ldots & e^{-i2\pi\frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}} & e^{-i2\pi\frac{2(N-1)}{N}} & \ldots & e^{-i2\pi\frac{(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = 0$, para $|x| > L$. Então

$$\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\pi\frac{nx}{L}}dx, \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \ldots, \frac{N}{2}.$$

Podemos, agora, aproximar a integral por uma soma de Riemann dividindo o intervalo $[0, 2L]$ em N subintervalos de comprimento $2L/N$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\,\frac{2L}{N} = \\
&= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \\
&= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f\left(\frac{2kL}{N} - 2L\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}\right),
\end{aligned}$$

para $n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\hat{f}\left(\frac{(-N+n)\pi}{L}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} \frac{2L}{N} =$$

$$= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} =$$

$$= \frac{2L}{N\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f\left(\frac{2kL}{N}\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f\left(\frac{2kL}{N} - 2L\right) e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} \right),$$

para $n = \frac{N}{2}, \ldots, N-1$.
Assim, definindo

$$X = \left[f(0)\; f\left(\frac{2L}{N}\right)\; \ldots\; f\left(L - \frac{2L}{N}\right)\; f(-L)\; f\left(-L + \frac{2L}{N}\right)\; \ldots\; f\left(-\frac{2L}{N}\right) \right]^t,$$

então

$$Y = F_N X \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \left[\hat{f}(0)\; \hat{f}\left(\frac{\pi}{L}\right)\; \cdots\; \hat{f}\left((\frac{N}{2} - 1)\frac{\pi}{L}\right)\; \hat{f}\left(-\frac{N}{2}\frac{\pi}{L}\right)\; \ldots\; \hat{f}\left(-\frac{\pi}{L}\right) \right]^t.$$

Calcular a transformada de Fourier discreta multiplicando-se pela matriz F_n tem um custo computacional de N^2 produtos. Este produto pode ser calculado ao custo de $N \log N$ produtos usando um algoritmo chamado **Transformada de Fourier Rápida (FFT)**.

Exemplo 6.16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então como mostramos no Exemplo 6.7 na página 515:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega)+\cos(\omega)-1}{\omega^2}, & \text{se } \omega \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= [\; f(0) \quad f\left(\tfrac{1}{4}\right) \quad f\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad f\left(\tfrac{3}{4}\right) \quad f(-1) \quad f\left(-\tfrac{3}{4}\right) \quad f\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad f\left(-\tfrac{1}{4}\right) \;]^t \\ &= [\; 0 \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{4} \quad 1 \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \;]^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \mathrm{FFT}(X) &= [\; 0.5 \quad -0.21 \quad 0.0 \quad -0.037 \quad 0.0 \quad -0.037 \quad 0.0 \quad -0.21 \;]^t \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[\hat{f}(0) \; \hat{f}(\pi) \; \hat{f}(2\pi) \; \hat{f}(3\pi) \; \hat{f}(-4\pi) \; \hat{f}(-3\pi) \; \hat{f}(-2\pi) \; \hat{f}(-\pi) \right]^t. \end{aligned}$$

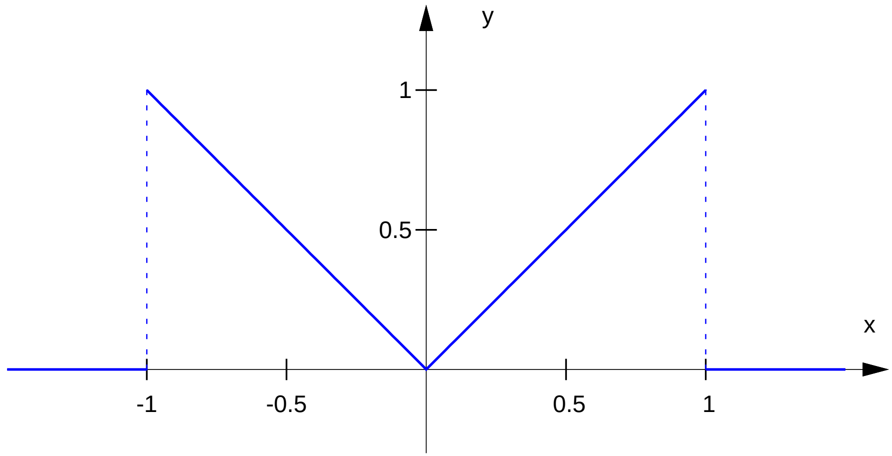


Figura 6.21 – Função do Exemplo 6.16

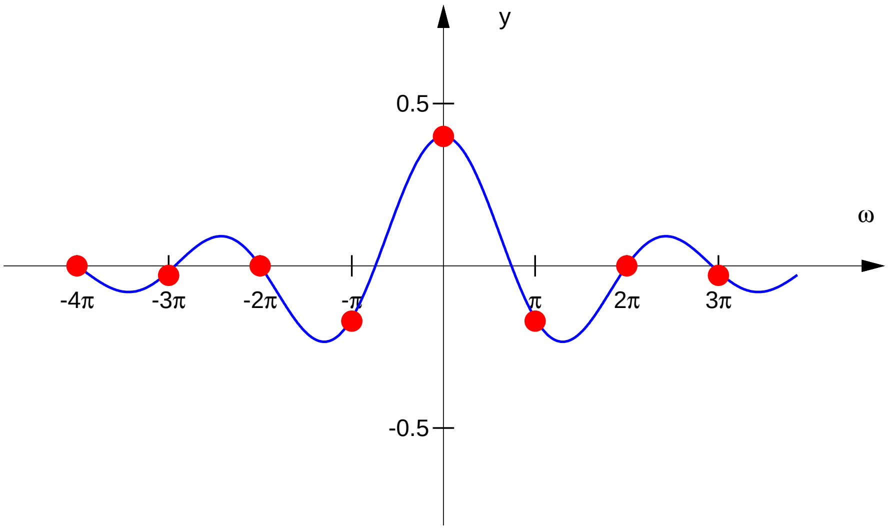


Figura 6.22 – Transformada de Fourier e a Transformada de Fourier Discreta multiplicada por $2/\sqrt{2\pi}$ da função do Exemplo 6.16

6.7 Respostas dos Exercícios

1. Definição e Propriedades (página 528)

1.1. (a) Seja $g(x) = e^{-ax}u_0(x)$. Então $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}$.

$$\mathcal{F}(xg(x))(\omega) = i\frac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{(a+i\omega)^2}.$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{|x|}{a}\chi_{[-a,a]}(x) = \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{1}{a}\left(-x\chi_{[-a,0]}(x) + x\chi_{[0,a]}(x)\right) \\ &= \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{1}{a}\left(-x\chi_{[0,a]}(-x) + x\chi_{[0,a]}(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x\chi_{[0,a]}(x))(\omega) &= i\frac{d\widehat{\chi_{[0,a]}}}{d\omega}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{-a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} - i(1-e^{-i\,a\,\omega})}{(i\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(-x\chi_{[0,a]}(-x))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega} - \frac{1}{a}\left(\frac{i\,a\,\omega e^{-i\,a\,\omega} + e^{-i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2} + \frac{-i\,a\,\omega e^{i\,a\,\omega} + e^{i\,a\,\omega} - 1}{\omega^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega} - \frac{1}{a}\frac{2\,a\,\omega\,\mathrm{sen}\,(a\,\omega) + 2\cos\,(a\,\omega) - 2}{\omega^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\,(a\,\omega)}{a\omega^2}. \end{aligned}$$

(c)

$$f(x) = \text{sen}(ax)\chi_{[-b,b]}(x) = \left(\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\right)\left(\chi_{[0,b]}(-x) + \chi_{[0,b]}(x)\right).$$

$$\mathcal{F}(\chi_{[-b,b]})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{ib\omega} - 1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-ib\omega}}{i\omega}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega}.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\text{sen}\, b(\omega - a)}{\omega - a} - \frac{\text{sen}\, b(\omega + a)}{\omega + a}\right)$$

(d) Seja $g(x) = e^{-x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2})(\omega) = i\frac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -i\omega\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{2}}$$

(e) Seja $g(x) = e^{-x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathcal{F}(x^2e^{-x^2})(\omega) = -\frac{d^2\hat{g}}{d\omega^2}(\omega) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{2}} - \omega^2\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{4\sqrt{2}}$$

(f) Seja $g(x) = e^{-ax}u_0(x)$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{a + i\omega}$. Então,

$$\mathcal{F}(e^{-(a+ib)x}u_0(x))(\omega) = \hat{g}(\omega + b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a + ib + i\omega}.$$

(g) Seja $g(x) = e^{-ax}u_0(x)$. Então $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}$. Seja $h(x) = e^{ax}u_0(-x)$. Então, $\hat{h}(\omega) = \hat{g}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\omega}$.

$$\mathcal{F}(e^{(a+ib)x}u_0(-x))(\omega) = \hat{h}(\omega - b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ib-i\omega}.$$

1.2. (a) $f'(x) - i2xf(x) = i2xe^{ix^2} - i2x(e^{ix^2}) = 0$

(b) Aplicando-se a transformada de Fourier na equação diferencial do item anterior obtemos

$$i\omega\hat{f}(\omega) - i2i\hat{f}'(\omega) = 0$$

ou

$$\hat{f}'(\omega) - \frac{\omega}{2i}\hat{f}(\omega) = 0.$$

(c) Multiplicando-se a equação diferencial do item anterior pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int \frac{-\omega}{2i}d\omega} = e^{-\frac{\omega^2}{4i}}$ obtemos

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{-\frac{\omega^2}{4i}}\hat{f}(\omega)\right) = 0.$$

Integrando-se em relação a ω obtemos

$$e^{-\frac{\omega^2}{4i}}\hat{f}(\omega) = c.$$

Logo,

$$\hat{f}(\omega) = ce^{\frac{\omega^2}{4i}}.$$

Usando o fato de que $\hat{f}(0) = c$ obtemos que

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)e^{-i\frac{\omega^2}{4}}.$$

(d) $\hat{f}(\omega) = \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\omega^2}{4}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega^2}{4}\right)\right) = \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega^2}{4}\right)\right] + i\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}\right)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega^2}{4}\right)\right] + \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\omega^2}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(\frac{\omega^2}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right].$

(e) $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left(\cos(x^2)\right)(\omega) + i\mathcal{F}\left(\mathrm{sen}(x^2)\right)(\omega)$.
Como $\cos(x^2)$ e $\mathrm{sen}(x^2)$ são funções pares as suas transformadas de Fourier são reais e são assim iguais a parte real e a parte imaginária de $\hat{f}(\omega)$, respectivamente:
$\mathcal{F}\left(\cos(x^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\mathcal{F}\left(\mathrm{sen}(x^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$.

(f) Trocando-se x por $\sqrt{a}x$ e usando o Teorema da Dilatação obtemos que

$$\mathcal{F}\left(\cos(ax^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sen}(ax^2)\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Inversão (página 534)

2.1. (a) Vamos decompor em frações parciais:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)} = \frac{A}{2+i\omega} + \frac{B}{3+i\omega}.$$

Multiplicando-se por $(2+i\omega)(3+i\omega)$ obtemos

$$1 = A(3+i\omega) + B(2+i\omega).$$

Substituindo-se $i\omega = -2$ e $i\omega = -3$ encontramos que $A = 1$ e $B = -1$. Logo

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega} - \frac{1}{3 + i\omega}.$$

Portanto

$$f(x) = \sqrt{2\pi}\left(e^{-2x} - e^{-3x}\right) u_0(x).$$

(b) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1 + i\omega}$. Então $\dfrac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -\dfrac{i}{(1 + i\omega)^2}$. Logo

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\frac{d\hat{g}}{d\omega})(x) = xg(x) = \sqrt{2\pi}xe^{-x}u_0(x).$$

(c) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1 + \omega^2}$. Então $g(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|x|}$.

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\omega\hat{g}(\omega))(x) = g'(x) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{x\, e^{-|x|}}{|x|},$$

pois $\dfrac{d|x|}{dx}(x) = \dfrac{|x|}{x}$, para $x \neq 0$.

(d) Completando-se o quadrado:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega + 1} = \frac{1}{(\omega + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Logo

$$f(x) = e^{-i\frac{x}{2}}\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\sqrt{3}|x|}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\sqrt{3}|x|+ix}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

(e)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+ib-i\omega} = \frac{1}{a-i(\omega-b)}.$$

$$h(x) = e^{ibx}\sqrt{2\pi}e^{ax}u_0(-x) = \sqrt{2\pi}e^{(a+ib)x}u_0(-x).$$

(f) O denominador pode ser visto como um polinômio do 2o. grau em $i\omega$, que pode ser fatorado como:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4-\omega^2+2i\omega} = \frac{1}{\left(i\,\omega+1-\sqrt{3}\,i\right)\,\left(i\,\omega+1+\sqrt{3}\,i\right)}.$$

Decompondo em frações parciais

$$\hat{f}(\omega) = \frac{A}{i\,\omega+1+\sqrt{3}\,i} + \frac{B}{i\,\omega+1-\sqrt{3}\,i}.$$

Multiplicando-se por $(i\,\omega+1+\sqrt{3}\,i)(i\,\omega+1-\sqrt{3}\,i)$:

$$1 = A(i\,\omega+1-\sqrt{3}\,i) + B(i\,\omega+1+\sqrt{3}\,i).$$

Substituindo-se $i\omega = -1-\sqrt{3}\,i$ e $i\omega = -1+\sqrt{3}\,i$ obtemos que $A = \frac{i}{2\sqrt{3}}$ e $B = -\frac{i}{2\sqrt{3}}$. Assim,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{i}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{i\,(\omega+\sqrt{3})+1} - \frac{1}{i\,(\omega-\sqrt{3})+1}\right)$$

e

$$f(x) = \frac{i\sqrt{6\pi}}{6}\left(e^{-(1+\sqrt{3}i)x} - e^{-(1-\sqrt{3}i)x}\right)u_0(x)$$

2.2. (a) Seja $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|\omega|}$. Como $\dfrac{d|\omega|}{d\omega}(\omega) = \dfrac{|\omega|}{\omega}$, para $\omega \neq 0$, então

$$\hat{f}(\omega) = i\frac{d\hat{g}}{d\omega}(\omega) = -i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{\omega\,e^{-|\omega|}}{|\omega|}.$$

(b) Seja $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Então $\hat{g}(\omega) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-|\omega|}$, $g'(x) = -\dfrac{2\,x}{(x^2+1)^2}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}g'(x)$ e

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{i\sqrt{2\pi}\omega}{4}e^{-|\omega|}$$

2.3. $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\chi_{[-a,a]}(x)$.

2.4. $\hat{f}(\omega) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(1-|x|/a)\chi_{[-a,a]}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(a-|x|)\chi_{[-a,a]}(x)$.

3. Convolução (página 542)

3.1. (a)

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_0^{\infty} e^{-y}e^{-2(x-y)}u_0(x-y)dy \\
&= \begin{cases} 0, \text{ se } x \le 0 \\ e^{-2x}\int_0^x e^y dy, \text{ se } x > 0 \end{cases} \\
&= e^{-2x}(e^x - 1)u_0(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-1}^{1} e^{-(x-y)}u_0(x-y)dy \\
&= \begin{cases} 0, \text{ se } x \le -1 \\ e^{-x}\int_{-1}^x e^y dy, \text{ se } -1 < x \le 1, \\ e^{-x}\int_{-1}^1 e^y dy, \text{ se } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1, \\ e^{-x}(e^x - e^{-1}), & \text{se } -1 \le x < 1 \\ e^{-x}(e - e^{-1}), & \text{se } x \ge 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

3.2. (a) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{2+i\omega}$ e $\hat{h}(\omega) = \dfrac{1}{3+i\omega}$.

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega).$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*h)(x),$$

em que $g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-2x}u_0(x)$ e $h(x) = \sqrt{2\pi}e^{-3x}u_0(x)$. Logo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)dy = \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2y}e^{-3(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}e^{-3x}u_0(x)\int_0^x e^y dy = \sqrt{2\pi}e^{-3x}(e^x-1)u_0(x) \\ &= \sqrt{2\pi}\left(e^{-2x}-e^{-3x}\right)u_0(x). \end{aligned}$$

(b) Seja $\hat{g}(\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}$. Então $g(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x}u_0(x)$. Assim

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)g(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-y}e^{-(x-y)}u_0(x-y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}xe^{-x}u_0(x). \end{aligned}$$

(c) O denominador pode ser visto como um polinômio do 2o. grau em $i\omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4-\omega^2+2i\omega} = \frac{1}{\left(i\,\omega-\sqrt{3}\,i+1\right)\left(i\,\omega+\sqrt{3}\,i+1\right)}.$$

Sejam
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{i\,(\omega - \sqrt{3}) + 1}, \quad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{i\,(\omega + \sqrt{3}) + 1}.$$
Então
$$g(x) = \sqrt{2\pi} e^{-(1-\sqrt{3}i)x} u_0(x), \quad h(x) = \sqrt{2\pi} e^{-(1+\sqrt{3}i)x} u_0(x).$$
Assim
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g * h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)dy \\
&= \sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(1-\sqrt{3}i)y} e^{-(1+\sqrt{3}i)(x-y)} u_0(x-y)dy \\
&= \sqrt{2\pi} e^{-(1+\sqrt{3}i)x} \int_0^{\infty} e^{2\sqrt{3}iy} u_0(x-y)dy \\
&= \frac{i\sqrt{6\pi}}{6} \left(e^{-(1+\sqrt{3}i)x} - e^{-(1-\sqrt{3}i)x} \right) u_0(x).
\end{aligned}$$

3.3. A equação pode ser escrita como
$$(f * k)(x) = \frac{1}{x^2 + 9},$$
em que $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$. Aplicando-se a transformada de Fourier na equação obtemos
$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{k}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{-3|\omega|}.$$
Resolvendo esta equação obtemos
$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-3|\omega|}}{6\hat{k}(\omega)} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} e^{-|\omega|}$$

Logo
$$f(x) = \frac{2}{3\pi}\frac{1}{x^2+1}.$$

4. Aplicações (página 552)

4.1. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + 2i\omega\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega).$$
Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int 2i\omega dt} = e^{2i\omega t}$ obtemos
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{2i\omega t}\hat{u}(\omega,t)\right) = \hat{g}(\omega)e^{2i\omega t}.$$
Integrando-se em relação a t obtemos
$$e^{2i\omega t}\hat{u}(\omega,t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega}e^{2i\omega t} + c(\omega).$$
Logo,
$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega} + c(\omega)e^{-2i\omega t}.$$
Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que
$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega} + c(\omega)$$
obtemos que
$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-2i\omega t} + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega}\left(1 - e^{-2i\omega t}\right).$$

Seja $\hat{k}(\omega, t) = \dfrac{1 - e^{-2i\omega t}}{2i\omega}$. Então

$$k(x,t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\chi_{[0,2t]}(x)$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-2t) + (k * g)(x,t) \\ &= f(x-2t) + \frac{1}{2}\int_0^{2t} g(x-y)dy \end{aligned}$$

Se $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 0$, então $u(x,t) = \cos(x-2t)$ é a solução do PVI apesar de não existir a transformada de Fourier de $f(x) = \cos x$, pois

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = -2\cos(x-2t) + 2\cos(x-2t) = 0.$$

Ou seja, $u(x,t) = \cos(x-2t)$ satisfaz a equação diferencial.

4.2. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) - \gamma\hat{u}(\omega,t).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int(\alpha^2\omega^2+\gamma)dt} = e^{(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}\hat{u}(\omega,t)\right) = 0.$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$e^{(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}\hat{u}(\omega,t) = c(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)=c(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega,t)=e^{-(\alpha^2\omega^2+\gamma)t}=e^{-\gamma t}e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t)=\frac{e^{-\gamma t}}{\alpha\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$u(x,t)=\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{2\pi}}(f*k)(x,t)=\frac{e^{-\gamma t}}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}}dy.$$

4.3. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\omega,t)=-\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)+i\omega k\hat{u}(\omega,t).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t)=e^{\int(\alpha^2\omega^2-i\omega k)dt}=e^{(\alpha^2\omega^2-i\omega k)t}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(\alpha^2\omega^2-i\omega k)t}\hat{u}(\omega,t)\right)=0.$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$e^{(\alpha^2\omega^2-i\omega k)t}\hat{u}(\omega,t)=c(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega,t)=c(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2-ik\omega)t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que $\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)=c(\omega)$ obtemos que

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)e^{-(\alpha^2\omega^2-ik\omega)t}.$$

Seja $\hat{k}(\omega, t) = e^{-(\alpha^2\omega^2 - ik\omega)t} = e^{ik\omega t}e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2t}} e^{-\frac{(x+kt)^2}{4\alpha^2 t}}$$

e pelo Teorema da Convolução temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * k)(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y+kt)^2}{4\alpha^2 t}} dy.$$

4.4. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\alpha^2\omega^2 \hat{u}(\omega, t) + \hat{g}(\omega).$$

Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int \alpha^2\omega^2 dt} = e^{\alpha^2\omega^2 t}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\alpha^2\omega^2 t}\hat{u}(\omega, t)\right) = \hat{g}(\omega)e^{\alpha^2\omega^2 t}.$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$e^{\alpha^2\omega^2 t}\hat{u}(\omega, t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} e^{\alpha^2\omega^2 t} + c(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} + c(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Vamos supor que exista $\hat{f}(\omega)$. Neste caso, usando o fato de que

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} + c(\omega)$$

obtemos que

$$c(\omega) = \hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}$$

e

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2} + \left(\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}\right) e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Sejam $\hat{h}(\omega) = -\frac{\hat{g}(\omega)}{\alpha^2\omega^2}$ e $\hat{k}(\omega,t) = e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Então

$$k(x,t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

e $h(x)$ é a solução de

$$\alpha^2 h''(x) = -g(x).$$

Pelo Teorema da Convolução temos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= h(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}((f+h)*k)(x,t) \\ &= h(x) + \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(y)+h(y)) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} dy. \end{aligned}$$

4.5. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega,t) = -a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) - 2\alpha\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) - \alpha^2\hat{u}(\omega,t).$$

Para resolver esta equação diferencial temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + 2\alpha r + a^2\omega^2 + \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\alpha \pm a\omega i.$$

Logo

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega,t) &= \hat{\phi}(\omega)e^{(-\alpha - ia\omega)t} + \hat{\psi}(\omega)e^{(-\alpha+ia\omega)t} \\ &= e^{-\alpha t}(\hat{\phi}(\omega)e^{-ia\omega t} + \hat{\psi}(\omega)e^{+ia\omega t}). \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Translação temos que

$$u(x,t) = e^{-\alpha t}(\phi(x-at)+\psi(x+at)).$$

4.6. Aplicando-se a transformada de Fourier em relação a variável x na equação diferencial obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t) + 2\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + i\omega\hat{u}(\omega,t)\right).$$

Para resolver esta equação diferencial temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 - 2r + \omega^2 - 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 \pm (1+\omega i) \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 + i\omega \text{ ou } r = -i\omega.$$

Logo

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega,t) &= \hat{\phi}(\omega)e^{-i\omega t} + \hat{\psi}(\omega)e^{(2+i\omega)t} \\ &= \hat{\phi}(\omega)e^{-i\omega t} + e^{2t}\hat{\psi}(\omega)e^{+i\omega t}. \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Translação temos que

$$u(x,t) = \phi(x-t) + \psi(x+t)e^{2t}.$$

Bibliografia

[1] William E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edição, 2002.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[3] E. C. de Oliveira e M. Tygel. *Métodos Matemáticos para Engenharia*. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[4] Valéria Iório. *EDP: Um Curso de Graduação*. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 2001.

[5] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller, e Fred W. Perkins. *Introdução à Análise Linear*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[6] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1985.

[7] Dennis G. Zill e Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3a. edição, 2001.

Índice Alfabético