MAT-2454 – CÁLCULO II
AULA 04: CURVAS E SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^3$

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

- São funções:

$$\begin{aligned} \gamma\colon I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t \quad &\mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \end{aligned}$$

- Tudo é análogo ao caso de curvas planas: em particular continuidade e derivabilidade, só que "com uma coordenada a mais":

$$\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big).$$

- A reta tangente a uma curva no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

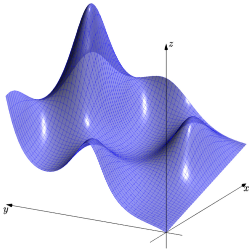
$$\begin{aligned} r : (x, y, z) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \lambda \in \mathbb{R} \\ (x_0, y_0, z_0) + \lambda\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big), \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verifique a reta tangente à curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ faz ângulo constante com o vetor $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Determine esse ângulo.

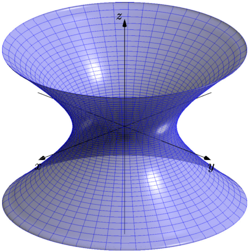
ESBOÇO DA IMAGEM DE UMA CURVA EM $\mathbb{R}^3$

- Estudar as imagens das funções coordenadas no domínio indicado;
- Determinar direções e sentidos das tangentes em alguns pontos;
- As projeções em alguns planos são muito úteis;
- Saber que a curva está contida em alguma *superfície*. Então...

- Uma definição formal fica para depois: a ideia é que perto de cada ponto ela é um plano, possivelmente "esticado ou retorcido".
- Principais exemplos: gráficos de funções em duas variáveis e *superfícies de nível (???)*.
- Nesse caso: $f^{-1}(c) = \left\{ (x, y, z) \in D_f : f(x, y, z) = c \right\}$.



(A) $\operatorname{Gr} f$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

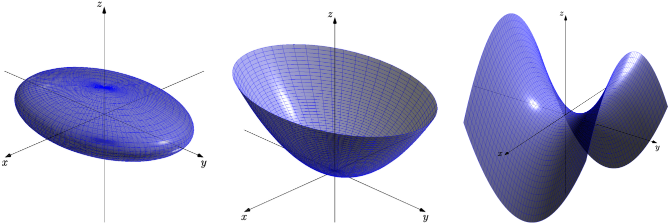


(B) $f^{-1}(1)$,
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

FIGURE: Duas superfícies

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

- São superfícies de nível de funções quadráticas em três variáveis reais. Escreva a forma geral, é a soma de 10 monômios em x e y.
- Descontando as degeneradas, são 9 tipos!



(A) Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

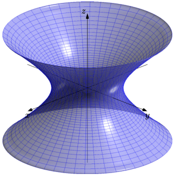
(B) Paraboloide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$

(C) Paraboloide Hiperbólico: $z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}.$

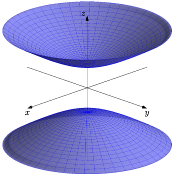
FIGURE: Algumas quádricas

- Use cortes por planos coordenados e o que você sabe de cônicas para entender essas superfícies. Veja as demais:

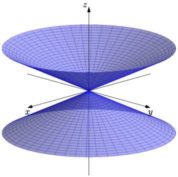
Superfícies Quádricas II



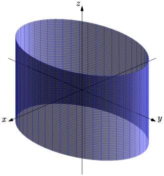
(A) Hiperboloide de 1 folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.



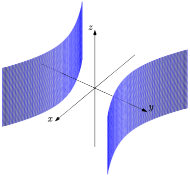
(B) Hiperboloide de 2 folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



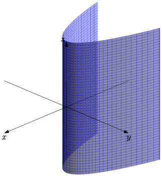
(C) Cone elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.



(D) Cilindro Elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



(E) Cilindro Hiperbólico: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.



(F) Cilindro Parabólico: $x^2 + 2ay = 0$.

- O que significa uma curva contida num gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? (ou seja $\operatorname{Im} \gamma \subset \operatorname{Gr} f$)
- Se $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ é nada mais que $z(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ para todo t no domínio da curva

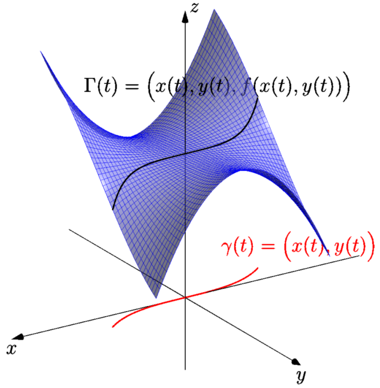


FIGURE: Um curva contida no gráfico de uma função.

Exemplo

Se $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ é uma função e $\Gamma(t) = \big((2-t, 3+t, z(t)\big)$ é uma curva tal que $\operatorname{Im}\Gamma \subset \operatorname{Gr} g$, determine $z(t)$.

- $z(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = (2-t-2)^2 + (3+t-3)^2 + 1 = 2t^2 + 1.$
- $\operatorname{Im}\Gamma$ é uma parábola contida no plano $y = 5 - x$.
- Verifique esse fato, utilizando as primeiras coordenadas de Γ.
- Esboce o gráfico de g (é uma translação de um conhecido) e também a imagem de Γ.

Curvas em Superfícies II

- E se a curva está contida numa superfície de nível?
- Se $S = F^{-1}(c)$ é uma superfície então a curva $\Gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ tem sua imagem em S se e só se

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = c, \text{ para todo } t \text{ no domínio de } \Gamma.$$

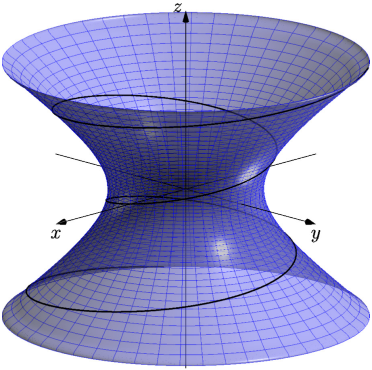


Figure: Um curva contida numa superfície de nível.

EXEMPLO

Verifique que $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, \pi]$, tem sua imagem contida numa esfera centrada na origem. Use este fato para esboçar a imagem da curva.

- Equação geral da esfera centrada na origem: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$.
- Aqui temos $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 2\cos^2 t + 2\sin^2 t = 2$. (uma esfera de raio $\sqrt{2}$)
- Verifique que $\operatorname{Im}\gamma$ está contida no plano $y = x$.
- Usando os fatos acima, esboce a imagem de γ.

- E uma curva dada pela interseção de duas superfícies de nível?
- Se $S_1 = F^{-1}(c_1)$ e $S_2 = G^{-1}(c_2)$ são as superfícies então a interseção não vazia pode ser parametrizada por $\Gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ tal que, para todo t no domínio de Γ,

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = c_1 \qquad \text{e} \qquad G\big(x(t), y(t), z(t)\big) = c_2,$$

ou seja, tipicamente um sistema não linear com um grau de liberdade.

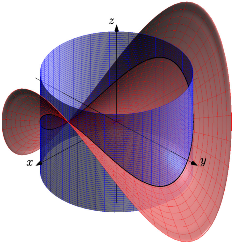


FIGURE: Um curva dada pela interseção de duas superfícies.

Exemplo

Parametrize a interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 - y^2$. Determine a equação da reta tangente à curva obtida no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.

- As superfícies são, respectivamente, o paraboloide hiperbólico e o cilindro circular reto.
- As coordenadas da curva devem satisfazer $x^2(t) + y^2(t) = 1$ e $z(y) = x^2(t) - y^2(t)$.
- Poderíamos usar $x, y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $z(x) = 2x^2 - 1$? Por que?
- Podemos escolher $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$, donde $z(t) = \cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$ e então $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$, dando $\gamma'(t) = (-sin(t), \cos(t), -2sin(2t))$.
- O ponto dado é atingido em $t\pi/4$. Assim a reta tangente pedida é

$$r : (x, y, z) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) + \lambda(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Você vai reconhecer as superfícies e a curva em algum lugar.

ATIVIDADES

- Ex. 1.15, itens b, c, d, e;
- Ex. 1.16, item b;
- Ex. 1.19;
- Ex. 1.20 c;
- Ex. 1.21 a;
- Ex. 1.22.

Referências

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 7.2 a 7.5; 8.2 e 8.3**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seções 13.1, 13.2, 12.5 e 12.6**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br