PÓLOS NA REPRESENTAÇÃO DO ESPAÇO DOS ESTADOS

1. Motivação e necessidade

- Pólos de um sistema fornecem o comportamento dinâmico do sistema $\Rightarrow$ tempo de resposta, frequencia natural, coeficiente de amortecimento etc.

- Como já conhecido $\Rightarrow$ os pólos de um sistema são as raízes do denominador da sua FT.

- Para calcular os pólos de um sistema descrito na forma do espaço dos estados é necessário primeiro obter a sua FT?
  - Não $\Rightarrow$ os pólos podem ser calculados diretamente da forma do espaço dos estados usando conceitos básicos de álgebra linear.

2. Pólos de um sistema na forma SS

- Lembrando que a FT é obtida da forma SS por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{1}$$

e que $\mathbf{G}(s)$ pode ser calculada por:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \tag{2}$$

Então os pólos de $\mathbf{G}(s)$ são obtidos a partir das raízes da equação característica do sistema, ou seja, fazendo-se:

$$\boxed{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0} \tag{3}$$

- Esse mesmo resultado pode ser obtido por meio do cálculo dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

- **Os pólos de um sistema na forma SS são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ dos estados.**

3. Autovalores e autovetores de uma matriz A

- O problema de autovalor e autovetor de uma matriz quadrada de dimensão *n* é definido da seguinte forma:

$$\boxed{[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{v_i} = 0 \text{, para } i = 1, \ldots, n.} \tag{4}$$

  onde λ_i são os autovalores da matriz e $\mathbf{v_i}$ são os autovetores da matriz.

- A eq. (4) possui duas soluções ⇒ uma trivial, onde $\mathbf{v_i} = 0$, e outra não trivial com $\mathbf{v_i} \neq 0$.

- Para se ter a solução não trivial ⇒ deve-se ter que o $\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$.

- Em resumo o cálculo de autovalores e autovalores é realizado da seguinte forma:
  - Cálculo dos autovalores ⇒ resolve-se $\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$;
  - Cálculo dos autovetores ⇒ para cada autovalor obtém-se o seu autovetor correspondente por meio da equação (4);
  - Os autovetores não são únicos, existem infinitas possibilidades.

- **Para servem os autovetores da matriz A?**
  - Os autovetores da matriz de transição dos estados fornecem informação importante sobre o comportamento dinâmico do sistema ⇒ representam, junto com os pólos, os modos dinâmicos do sistema.

4. Matriz de autovetores

- Os autovetores de uma matriz calculados anteriormente são chamados **autovetores da direita** e podem ser dispostos em uma matriz.

- Matriz dos autovetores da direita da matriz **A** do sistema:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \cdots & \mathbf{v_n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}_{(nxn)} \Rightarrow \text{os autovetores são dispostos em colunas.} \tag{5}$$

- Pode-se definir também os **autovetores da esquerda** de uma matriz ⇒ matriz dos autovetores da esquerda da matriz **A** do sistema:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{w_1} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{w_2} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{w_n} & \rightarrow \end{bmatrix}_{(nxn)} \Rightarrow \text{os autovetores da esquerda são as linhas da matriz} \tag{6}$$

- A matriz **A** pode ser escrita em função das matrizes dos seus autovetores da direita e da esquerda:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{W} \tag{7}$$

onde a matriz Λ é formada pelos autovalores da matriz **A**:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{8}$$

Exemplo 1:

- Calcule os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Os autovalores são obtidos fazendo-se:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda+3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+3)\lambda + 2 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

As raízes dessa equação são $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1; \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$

Os autovetores são obtidos resolvendo-se a eq. (4) para cada um dos autovalores.

$$\Rightarrow \text{Para } \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1+3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v_{11} + 2v_{21} = 0 \Rightarrow v_{11} = -v_{21}; \\ -v_{11} - v_{21} = 0 \Rightarrow v_{11} = -v_{21}. \end{cases}$$

- Observe que as duas equações resultantes para obter v_{11} e v_{21} são iguais $\Rightarrow$ no cálculo dos elementos dos autovetores tem-se sempre $(n-1)$ equações, assim, deve-se adotar um dos elementos do vetor e calcular os outros.

Adotando $v_{21} = 1 \Rightarrow v_{11} = -1 \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow \text{Para } \lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2+3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_{12} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow v_{12} = -2v_{22}; \\ -v_{12} - 2v_{22} = 0 \Rightarrow v_{12} = -2v_{22}. \end{cases}$$

$$\text{Adotando } v_{22} = 1 \Rightarrow v_{12} = -2 \Rightarrow \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Em geral se utiliza autovetores normalizados, ou seja $\Rightarrow |\mathbf{v_i}| = 1$.

Norma de um vetor $\Rightarrow$ $\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum v_j^2}}$

Assim no caso tem-se:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

- Calcule os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

Como essa matriz é triangular os seus autovalores são os elementos da diagonal, assim:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3; \\ \lambda_2 = 1; \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

Aplicando o mesmo procedimento anterior, tem-se:

$$\Rightarrow \text{Para } \lambda_1 = -3 \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} -3+3 & 2 & 0 \\ 0 & -3-1 & 1 \\ 0 & 0 & -3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v_{21} = 0 \Rightarrow v_{21} = 0; \\ -4v_{21} + v_{31} = 0 \Rightarrow v_{31} = 4v_{21} = 0; \\ -v_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Adotando } v_{11} = 1 \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \text{Para } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+3 & 2 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4v_{12} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow 2v_{12} = -v_{22}; \\ v_{32} = 0; \\ 3v_{32} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Adotando } v_{21} = 1 \Rightarrow \text{resulta em } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Exercícios

1) Calcule manualmente e depois verifique por meio do Matlab os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

- Principais comandos do Matlab a serem utilizados:
  - eig;
  - norm.