TRANSFORMAÇÃO ENTRE AS FORMAS ESPAÇO DOS ESTADOS E FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

1. Motivação e necessidade

- Existem basicamente duas formas de representar a dinâmica de um sistema:
  ⇒ Espaço dos Estados (SS);
  ⇒ Função de Transferência (TF).

- O uso das duas formas de representar os sistemas dinâmicos é habitual.

- Ocorre a necessidade de passar a representação do sistema de uma forma para outra dependendo do que é fornecido e do que se deseja fazer.

2. Transformação de SS para TF

- Dado um sistema LIT na forma do espaço dos estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

- Pergunta-se, qual a Função de Transferência correspondente?

  Aplicando a Transformada de Laplace na equação da dinâmica dos estados,

$$\mathscr{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\} = \mathscr{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\} \tag{2}$$

  Assumindo condições iniciais iguais a zero (por definição a FT tem condições inciais iguais a zero), tem-se:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{3}$$

  Rearranjando,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{4}$$

  Isolando $\mathbf{X}(s)$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{5}$$

  Aplicando a Transformada de laplace da equação das saídas do sistema,

$$\mathscr{L}\{\mathbf{y}(t)\} = \mathscr{L}\{\mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)\} \tag{6}$$

ou

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \tag{7}$$

Substituindo a eq. (5) na eq. (7), tem-se:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) + \mathbf{DU}(s) \tag{8}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) \tag{9}$$

Lembrando que a FT é a relação entre a saída e a entrada do sistema, ou seja, $\mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s)$,

$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}} \tag{10}$$

- **Observações:**
  - $\mathbf{G}(s)$ é uma matriz de Funções de Transferência com dimensão pxm (p = número de saídas e m = número de entradas);
  - Cada elemento $G_{ij}(s)$ da matriz $\mathbf{G}(s)$ descreve a dinâmica da saída i em função da entrada j do sistema $\Rightarrow$ por exemplo, $G_{12}(s)$ descreve a relação dinâmica entre a saída 1 e a entrada 2 do sistema;
  - Se o sistema tiver somente uma entrada e uma saída $\Rightarrow$ $G(s)$ é um escalar.

- Existe um método simples para calcular a FT para sistemas de qualquer ordem que não exige cálculo de inversa de matriz, somente determinante de matrizes:

$$\boxed{G_{ij}(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B_j} \\ \mathbf{C_i} & \mathbf{D_{ij}} \end{bmatrix}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}} \tag{11}$$

onde $\mathbf{C_i}$ é a i-ésima linha da matriz $\mathbf{C}$ e $\mathbf{B_j}$ é a j-ésima coluna da matriz $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D_{ij}}$ é o elemento i,j da matriz **D**..

$\Rightarrow$ Nota-se que se o sistema for SISO $\Rightarrow$ **C** é uma matriz linha e **B** é uma matriz coluna.

- **Os denominadores de todos os elementos da matriz de FT, G(s), são iguais $\Rightarrow$ equação característica do sistema.**

3. Cálculo de determinante e de matriz inversa

Matriz inversa:

- O cálculo algébrico da inversa de uma matriz nem sempre é um processo simples de realizar

- O único caso onde o cálculo da matriz $(sI - A)^{-1}$ é simples é para sistemas de ordem 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{[(s-a_{11})(s-a_{22}) - a_{12}a_{21}]} \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Para sistemas de ordem maior do que dois uma opção é usar o método de Cramer $\Rightarrow$ muito trabalhoso.

Determinante de matriz:

Somente a título de recordar, o determinante de uma matriz de dimensão 2x2 é calculado pela seguinte fórmula:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{13}$$

O determinante de uma matriz de dimensão 3x3 é calculado pela regra de Sarrus:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} \tag{14}$$

O determinante de uma matriz de dimensão nxn é calculado pela soma dos cofatores da matriz:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(nxn)} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{15}$$

onde A_{ij} é o cofator dos elemento a_{ij}, dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{D_{ij}} \tag{16}$$

$\mathbf{D}_{ij}$ é o menor complementar relativo ao elemento a_{ij}, que se obtém da matriz original retirando-se a linha i e a coluna j $\Rightarrow$ por exemplo, para o elemento a_{12}, tem-se

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n-1)x(n-1)} \tag{17}$$

- Observa-se que qualquer linha ou coluna da matriz pode ser utilizada para o cálculo do determinante a partir de seus cofatores.

4. Exemplos

Exemplo 1: Sistema SISO de ordem 3:

Dado o sistema na forma de espaço dos estados com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \qquad \mathbf{D} = [0]$$

Nesse caso tem-se uma saída (p = 1) e uma entrada (m = 1) $\Rightarrow$ Sistema SISO $\Rightarrow$ uma única FT descreve a relação dinâmica entre entrada e saída do sistema.

Aplicando a eq. (13),

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & -1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}}$$

Para calcular o determinante do numerador pode-se usar os cofatores da 4ª coluna da matriz que só possui um elemento diferente de zero, assim:

$$\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & -1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = c_3 + c_1 s^2 + c_2 s$$

$$\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = (s+a_1)s^2 + a_3 + a_2 s$$

O que resulta na seguinte FT:

$$G(s) = \frac{c_1 s^2 + c_2 s + c_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

<u>Exemplo 2</u>: Sistema MIMO de ordem 3:

Dado o sistema na forma de espaço dos estados com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso tem-se duas saídas (p = 2) e duas entradas (m = 2) $\Rightarrow$ Sistema MIMO $\Rightarrow$ 2x2 = 4 FT descrevem as relações dinâmicas entre as entradas e as saídas do sistema.

Aplicando a eq. (13) para a saída 1 e entrada 1:

$$G_{11}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & -b_1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}} = \frac{(-b_1)(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b_1 c_1 s^2}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Aplicando a eq. (13) para a saída 1 e entrada 2:

$$G_{12}(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ -1 & s & 0 & -b_2 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}}=\frac{(-b_2)(-1)^{2+4}\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -1 & s \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{-b_2a_2c_1s-b_2a_3c_1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

Aplicando a eq. (13) para a saída 2 e entrada 1:

$$G_{21}(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & -b_1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}}=\frac{(-b_1)(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b_1c_2}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

Aplicando a eq. (13) para a saída 2 e entrada 2:

$$G_{22}(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ -1 & s & 0 & -b_2 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}}=\frac{(-b_2)(-1)^{2+4}\det\begin{bmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b_2c_2s+b_2c_2a_1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

A matriz de FT fica,

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{b_1c_1s^2}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} & \dfrac{-b_2a_2c_1s-b_2a_3c_1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} \\ \dfrac{b_1c_2}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} & \dfrac{b_2c_2s+b_2c_2a_1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} \end{bmatrix}$$

5. Transformação de TF para SS

- Existem muitas formas de realizar a transformação de um sistema representado por uma FT para a forma SS.

- Não existe uma única forma SS para representar uma FT:
  - O vetor de estados não é único para um sistema dinâmico $\Rightarrow$ existem inúmeras possibilidades de definir o vetor de estado para um mesmo sistema dinâmico;
  - Cada vetor de estado vai gerar uma forma diferente de SS para uma mesma FT.

- **Três casos diferentes:**
  - Numerador constante:

$$G(s) = \frac{k}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \text{ m = 0.} \tag{18}$$

  - Ordem do numerador < ordem do denominador:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \text{ com } m < n. \tag{19}$$

  - Ordem do numerador = ordem do denominador:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \text{ com } m = n. \tag{20}$$

<u>Caso 1</u>:

- Exemplo de sistema de 3ª ordem $\Rightarrow$ facilmente estendido para ordem n.

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Multiplicando em cruz,

$$Y(s)\left[s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right] = kU(s)$$

Calculando a inversa da Transformada de Laplace $\Rightarrow$ obtém-se a equação diferencial do sistema:

$$\dddot{y}(t) + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = ku(t)$$

Escolhendo o vetor de estados $\Rightarrow$ $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}\ddot{y}(t) & \dot{y}(t) & y(t)\end{bmatrix}^t$

As equações dinâmicas do sistema na forma SS fica:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\ddot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_1 & -a_0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}(t)\\ \dot{y}(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}(t)\\ \dot{y}(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(t)$$

- Essa forma de sistema é conhecida como **Forma Controlável**.

Caso 2:

- Exemplo de sistema de 3ª ordem.

$$G(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{Nun(s)}{Den(s)}$$ (m =2 e n = 3).

Escrevendo a relação entre a entrada e a saída $Y(s)/U(s)$ da seguinte forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{V(s)}\frac{V(s)}{U(s)}$$

pode-se definir,

$$\frac{Y(s)}{V(s)}=Num(s);$$

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{Den(s)}.$$

A relação $\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{Dens(s)}$ é transformada como no caso 1, ou seja:

$$\dddot{v}(t)+a_2\ddot{v}(t)+a_1\dot{v}(t)+a_0v(t)=u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\ddot{v}(t)\\ \ddot{v}(t)\\ \dot{v}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_1 & -a_0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{v}(t)\\ \dot{v}(t)\\ v(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)=\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t)$$

A relação $\frac{Y(s)}{V(s)}=Num(s)=b_2s^2+b_1s+b_0$ implica que:

$$y(t)=b_2\ddot{v}(t)+b_1\dot{v}(t)+b_0v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) \\ \dot{v}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = [0]$$

<u>Caso 3</u>:

- Exemplo de sistema de 3ª ordem.

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (m = 3 \text{ e } n = 3).$$

Fazendo,

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + D$$

ou

$$\frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + D = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Tirando mínimo múltiplo comum e eliminando,

$$\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 + D\left(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$D\left(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = b_3 s^3 + (b_2 - \beta_2) s^2 + (b_1 - \beta_1) s + b_0 - \beta_0$$

Igualando os termos de mesma potência em s, tem-se:

$$\begin{cases} D = b_3; \\ Da_2 = b_2 - \beta_2 \rightarrow \beta_2 = b_2 - Da_2; \\ Da_1 = b_1 - \beta_1 \rightarrow \beta_1 = b_1 - Da_1; \\ Da_0 = b_0 - \beta_0 \rightarrow \beta_0 = b_0 - Da_0. \end{cases}$$

A partir de $\dfrac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$ pode-se achar a forma SS como no caso 2 $\Rightarrow$ achando essa FT basta adicionar o termo de alimentação direta $\mathbf{Du}(t)$.

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [\beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0]$$

$$\mathbf{D} = [b_3]$$

6. Exemplos

Exemplo 1:

- Dado a FT $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+3}$ obtenha uma forma SS equivalente.

Tem-se $\dfrac{V(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^2+2s+3}$, que multiplicando em cruz resulta em,

$$V(s)\left[s^2 + 2s + 3\right] = U(s)$$

Calculando a transformada inversa obtém-se:

$$\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t) + 3v(t) = u(t)$$

que na forma SS fica,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Agora usando o numerador,

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = s - 1$$

o que implica em:

$$Y(s) = (s-1)V(s) \rightarrow y(t) = \dot{v}(t) - v(t)$$

ou

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo 2</u>:

- Dado a FT $G(s) = \dfrac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 2}$ obtenha uma forma SS equivalente.

Dividindo o numerador pelo denominador,

$$\begin{array}{l|l} s^2 - s + 1 & s^2 + s + 2 \\ \underline{s^2 + s + 2} & 1 \\ 0 - 2s - 1 & \end{array}$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{-2s - 1}{s^2 + s + 2} + 1$$

Como no exemplo 1, a partir de $\dfrac{-2s - 1}{s^2 + s + 2}$ pode-se achar a forma SS, resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Adicionando o termo de alimentação direta na equação de saída tem-se:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + u(t)$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

7. <u>Exercícios</u>

1) Converta o modelo do sistema abaixo da foma em SS para FT.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 1$$

2) Obtenha a matriz de funções de transferência do sistema abaixo dado na forma do espaço dos estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

3) Seja o sistema composto por massa-mola-amortecedor, cujo modelo, representado na forma do espaço dos estados, é dado pelas seguintes exepressões:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

A entrada desse sistema é a força f e a saída é a posição da massa x. Obtenha a função de transferência do sistema.

4) Seja o modelo de um motor elétrico de corrente contínua representada pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = K_T i(t) \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \dfrac{\omega(t)}{K_V} = V(t) \end{cases}$$

A entrada desse sistema é a tensão elétrica V, e as saídas são a posição θ, a velocidade ω e a corrente elétrica i. Obtenha a função de transferência do sistema.

5) Seja um sistema composto por duas massas e três molas lineares, cuja dinâmica é representada pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + k_2\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) + k_3 x_2(t) + k_2\left[x_2(t) - x_1(t)\right] = f_2(t) \end{cases}$$

As entradas desse sistema são as força f_1 e f_2, e as saída são as posições das duas massas x_1 e x_2. Obtenha a matriz de funções de transferência do sistema.

6) Dada a matriz de FT abaixo que representa a dinâmica de um sistema LIT.

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{3s}{s^3+2s^2+s+5}\\ \dfrac{s^2+2}{s^3+2s^2+s+5}\end{bmatrix}.$$

Pede-se:

a) Qual o número de entradas e de saídas do sistema?

b) Usando o Matlab obtenha o sistema na forma SS.

7) Seja a matriz de funções de transferência que representa a dinâmica de um sistema no domínio complexo:

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{4s+1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{-2}{(s+1)}\\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{8}{(s+3)}\end{bmatrix}$$

Pede-se:

a) Qual o número de entradas e de saídas?

b) Obtenha o sistema descrito na forma do espaço dos estados.

8) Usando o Matlab calcule a matriz de FT do sistema dado abaixo na forma SS.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}05 & 0 & 0\\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0{,}5 & 0 & -0{,}05 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -0{,}05\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

➢ Principais comandos do Matlab a serem utilizados:

- ss;

- ss2tf;
- tf2ss.