Mecânica Quântica I - 4302403

$2^{\underline{a}}$ lista

1) a) Mostre que a soma de dois operadores hermitianos é também hermitiano.
b) Suponha que $\hat{Q}$ seja hermitiano e que α seja um número. Mostre que $\alpha\hat{Q}$ é hermitiano se α for real.
c) Mostre que o produto dois operadores é hermitiano quando os dois operadores comutam.
d) Mostre que o operador posição e o operador hamiltoniano, para $V(x)$ real, são hermitianos.

2) O operador hermitiano conjugado, ou adjunto, de um operador $\hat{Q}$ é o operador $\hat{Q}^\dagger$, tal que

$$\langle f|\hat{Q}g\rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f|g\rangle$$

a) Calcule os adjuntos dos operadores x, i e d/dx.
b) Mostre que $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$.

3) Considere o operador $\hat{Q} = d^2/d\phi^2$, no qual ϕ é o ângulo azimutal das coordenadas polares, e que as funções , nesse espaço estão sujeitas à condição $f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$.
a) $\hat{Q}$ é hermitiano?
b) Encontre as autofunções e os autovalores de $\hat{Q}$.
c) O espectro é degenerado?

4) Suponha que f e g são duas autofunções de $\hat{Q}$ com o mesmo autovalor q.
a) Mostre que qualquer combinação linear de f e g é também autofunção de $\hat{Q}$ com o mesmo autovalor.
b) Verifique que $f(x) = \exp(x)$ e $g(x) = \exp(-x)$ são autofunções do operador d^2/dx^2 com o mesmo autovalor. Monte duas combinações lineares de f e g que sejam ortogonais no intervalo $(-1, 1)$.

5) a) Verifique que os autovalores do operador hermitiano $\hat{Q} = id/d\phi$ são reais. Determine os auto-valores impondo a periodicidade das auto-funções . Demonstre que as autofunções , para auto-valores distintos, são ortogonais.
b) Faça o mesmo com o operador do problema 3.

6) Considere um espaço vetorial tridimensional gerado por uma base ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$. Os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dados por:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle), \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(i|1\rangle + 2|3\rangle).$$

a) Monte os "bras" $\langle\alpha|$ e $\langle\beta|$ correspondentes.
b) Mostre que $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1$.
c) Calcule $\langle\alpha|\beta\rangle$ e $\langle\beta|\alpha\rangle$ e mostre que $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$
d) Calcule os nove elemento de matriz do operador $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ nos termos dessa base. Esse operador é hermitiano?

7) O Hamiltoniano para determinado sistema de dois níveis é:

$$\hat{H} = \epsilon(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

em que $|1\rangle,\ |2\rangle$ é a base ortonormal e ϵ é um número real com dimensão de energia. Qual é a matriz que representa $\hat{H}$ nessa base? Encontre os autovalores e autovetores de $\hat{H}$ nessa base.

8) (EUF 2018) Considere um sistema quântico cujo espaço de Hilbert é gerado por uma base ortonormal de três estados, $|1\rangle,\ |2\rangle$ e $|3\rangle$, que são todos auto-estados degenerados de um observável D com auto-valores iguais a δ. A atuação do hamiltoniano H do sistema nos estados da base é:

$$H|1\rangle = \omega|1\rangle + \omega|3\rangle,$$

$$H|2\rangle = \omega|2\rangle + \alpha|3\rangle,$$

$$H|3\rangle = \omega|1\rangle + \alpha|2\rangle + \omega|3\rangle,$$

onde ω e α são constantes reais com dimensão de energia.
a) Escreva a matriz que representa H na base acima.
b) O observável D pode ser medido simultaneamente com a energia?
c) Determine os auto-valores e auto-vetores de H.
d) Se no instante $t = 0$ o sistema se encontra no estado

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}|1\rangle - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}|2\rangle,$$

encontre o estado $|\psi(t)\rangle$ do sistema no instante $t > 0$.

9) (EUF 2017) Considere um sistema quântico cujo espaço de Hilbert é gerado por uma base ortonormal de três estados, $|1\rangle,\ |2\rangle$ e $|3\rangle$. Um estado genérico do sistema pode ser representado nessa base através de um vertor coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, onde $x,\ y$ e z são números complexos. A hamiltoniana do sistema pode ser representada nessa mesma base como:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & M_{23} \\ 0 & - & E_3 \end{pmatrix}.$$

a) Qual é o valor do único elemento da matriz H que está faltando? Qual é o valor da parte imaginária de E_3?
b) Um certo observável A atua sobre os estados da base da seguinte forma:

$$A|1\rangle = 2|1\rangle,$$

$$A|2\rangle = 2|2\rangle,$$

$$A|3\rangle = |3\rangle,$$

Escreva a matriz que representa A nessa base. Esse observável pode ser medido simultaneamente com a energia? Justifique.
c) Quais são os auto-valores de energia do sistema?
d) Suponha que $E_1 = 1,\ E_2 = E_3 = 3$ e $M_{23} = 1$, e que o sistema seja preparado no instante $t = 0$ no estado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Encontre o estado em $t > 0$.

10) Um operador anti-hermitiano é igual a menos o seu hermitiano conjugado: $\hat{Q} = -\hat{Q}^\dagger$.
a) Demonstre que o valor esperado de um operador anti-hermitiano é imaginário.
b) Demonstre que o comutador de dois operadores hermitianos é anti-hermitiano. O que é o comutador de dois operadores anti-hermitianos?

11) Considere um espaço de dimensão dois, e sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$ dois operadores hermitianos nesse espaço. Se os autovalores e autovetores desses operadores são:

$$\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle, \ \ \hat{B}|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle, \ \ i = 1, 2.$$

Na base de $\hat{B}$ temos: $|\psi_1\rangle = (3|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle)/5$, $|\psi_2\rangle = (4|\phi_1\rangle - 3|\phi_2\rangle)/5$.
a) Se numa medida de $\hat{A}$ se obtem a_1, em que estado o sistema se encontra logo após a medida?
b) Se imediatamente após a medida de $\hat{A}$ se mede $\hat{B}$, quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?
c) Se imediatamente após a medida de $\hat{B}$ se mede novamente $\hat{A}$, qual a probabilidade de se medir a_1?

12) Mostre que se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ têm um conjunto completo de auto-funções comuns, entao $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$.

13) Mostre que

$$\sigma_x \sigma_H \geq \frac{\hbar}{2m}|\langle p\rangle|.$$

O que essa relação nos diz para estados estacionários?

14) Use a relação :

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{Q}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\rangle$$

nos seguintes casos especias: a) $\hat{Q} = 1$; b) $\hat{Q} = \hat{H}$; c) $\hat{Q} = \hat{x}$; d) $\hat{Q} = \hat{p}$; e) $\hat{Q} = \hat{x}\hat{p}$. Comente o resultado em cada caso tentando relacioná-lo com alguma lei de conservação . No caso do ítem d) o cálculo fornece:

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\langle\frac{\partial V}{\partial x}\rangle,$$

que é o **Teorema de Ehrenfest**.
No caso do ítem e) o cálculo fornece:

$$\frac{d}{dt}\langle xp\rangle = 2\langle T\rangle - \langle x\frac{\partial V}{\partial x}\rangle,$$

em que T é a energia cinética ($H = T + V$). Em um estado estacionário o lado esquerdo é zero (por quê?) e obtem-se

$$2\langle T\rangle = \langle x\frac{\partial V}{\partial x}\rangle,$$

que é conhecido como **Teorema do virial**. Mostre que no caso particular dos estados estacionários do oscilador harmônico tem-se $\langle T\rangle = \langle V\rangle$.

15) Teste o princípio de incerteza "energia-tempo para o observável x":

$$\sigma_H \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{d\langle x\rangle}{dt}\right|,$$

calculando σ_x, σ_H e $d\langle x\rangle/dt$ diretamente para a função de onda:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right),$$

onde $\psi_n(x)$ e E_n são as autofunções e autovalores do poço quadrado infinito para $n = 1$ e 2.

16) O Hamiltoniano e o operador $\hat{A}$, para um determinado sistema de três níveis, são representados pelas seguintes matrizes

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde ω e λ são números reais positivos.
a) Esses operados são compatíveis?
b) A é observável?
c) Quais são os autovalores e autovetores normalizados de H e A?
d) Se numa medida de H se obtem $E = \hbar\omega$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida?
e) Se imediatamente após a medida de H se mede A, quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?
f) Se numa medida de A se mede 2λ e se imediatamente após essa medida se mede novamente H, quais valores podem ser obtidos e quais as probabilidades?
g) Usando o estado

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcule σ_E e σ_A e verifique que o princípio de incerteza generalizado

$$\sigma_E\sigma_A \geq \frac{1}{2}|\langle [H, A]\rangle|$$

é válido.

17) O estado fundamental do poço quadrado infinito é uma autofunção do operador momento? Se sim, qual o seu momento? Se não, explique porque temos E_1 fixo sem ter p definido, já que para $V(x) = 0$ temos $E = p^2/2m$?

18) a) Calcule a função de onda no espaço dos momentos:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar}\psi(x)$$

para uma partícula no estado fundamental do oscilador harmônico. :

$$\Psi(x) == \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

b) Mostre que a probabilidade de encontrar a partícula com momentos fora do intervalo clássico: $|p| > \sqrt{m\omega\hbar}$, é:

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-z^2}dz.$$

19) Mostre que

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p) dp$$

onde $\phi(p)$ é a função de onda no espaço dos momentos. A interpretação do resultado acima é de que no espaço dos momentos o operador posição é dado por

$$\hat{X} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

20) Usando o resultado do exercício 16 a) para a função de onda no espaço dos momentos para o estado fundamental do oscilador harmônico

$$\phi(p) = \frac{1}{(m\pi\hbar\omega)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}}$$

calcule $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ usando o fato de que no espaço dos momentos

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi^*(p) p^n \phi(p).$$