Mecânica Quântica I - 4302403

$1^{\underline{a}}$ lista

1) No instante $t = 0$ uma partícula é representada pela função de onda

$$\psi(x,0) = \begin{cases} Ax/a, & se \quad 0 \leq x \leq a \\ A(b-x)/(b-a), & se \quad a \leq x \leq b \\ 0 & outros \quad valores \end{cases},$$

onde A, a e b são constantes.
a) Usando a condição de normalização, expresse a constante A em termos de a e b.
  R: $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$
b) Faça um esboço de ψ para $t = 0$.
c) Qual é o valor de x onde é mais provável encontrar a partícula em $t = 0$?
  R: $x_{\max} = a$ (por quê?)
d) Qual é a probabilidade de se encontrar a partícula a esquerda de a? Confira seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$.
  R: $P(x \leq a) = \frac{a}{b}$
e) Qual é o valor esperado de x?
  R: $\langle x \rangle = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$

2) Considere a função de onda

$$\psi(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2/2},$$

onde A, λ e a são constantes.
a) Usando a condição de normalização, expresse a constante A em termos de a e λ.
  R: $A = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$
b) Faça um esboço de $|\psi|^2$.
c) Determine $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e σ.
  R: $\langle x \rangle = a$, $\langle x^2 \rangle = a^2 + \frac{1}{2\lambda}$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$

3) Considere a função de onda

$$\psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

onde A, λ e ω são constantes reais e positivas.
a) Normalize ψ.
  R: $A = \sqrt{\lambda}$
b) Calcule os valores médios $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.
  R: $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2}$
c) Determine o desvio padrão σ de x. Faça um gráfico de $|\psi|^2$ e marque os pontos $\langle x \rangle + \sigma$ e $\langle x \rangle - \sigma$ ilustrando o significado de σ como o espalhamento em x. Qual é a probabilidade de se encontrar a partícula fora do intervalo $[\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma]$?
  R: $\sigma = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$, $\mathrm{Prob}(x \notin [\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma]) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.243$

4) Uma partícula de massa m encontra-se no estado

$$\psi(x,t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]},$$

onde A e a são constantes reais e positivas.
a) Determine A para que $\psi(x,t)$ seja normalizada.

R: $A = (2am/\pi\hbar)^{1/4}$

b) Para que energia potencial ψ satisfaz a equação de Schrödinger?

R: $V(x) = 2m(ax)^2$

c) Calcule os valores médios $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$ e $\langle p^2\rangle$.

R: $\langle x\rangle = 0$, $\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{4am}$, $\langle p\rangle = 0$, $\langle p^2\rangle = am\hbar$

d) Determine σ_x e σ_p e compare com o que é previsto de acordo com o princípio de incerteza.

R: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}}$, $\sigma_p = \sqrt{am\hbar} \Rightarrow \sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$

5) Sabendo que:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -i\hbar \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx,$$

e usando a euqação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi,$$

mostre que:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle,$$

que é um caso especial do Teorema de Ehrenfest que diz: valores esperados de operadores quânticos obedecem às lei clássicas.

6) Uma partícula é representada em $t = 0$ pela função de onda:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & se \quad -a \le x \le a \\ 0 & outros \quad valores \end{cases},$$

onde A, a são constantes.
a) Determine a constante de normalização A.

R: $A = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{a^5}}$

b) Calcule os valores médios $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$ e $\langle p^2\rangle$ em $t = 0$.

R: $\langle x\rangle = 0$, $\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{7}$, $\langle p\rangle = 0$, $\langle p^2\rangle = \frac{5\hbar^2}{2a^2}$

c) Determine σ_x e σ_p e compare com o que é previsto de acordo com o princípio de incerteza.

R: $\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{7}}$, $\sigma_p = \frac{\hbar}{a}\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{10}{7}} > \frac{\hbar}{2}$