MAE0212 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Primeira Lista de Exercícios
Vanderlei da Costa Bueno

1. Uma Cia de Seguros deseja fixar o valor do prêmio com respeito a certo risco baseando-se no custo médio dos sinistros correspondentes. No ano passado a Seguradora tomou uma amostra aleaÂ´tória de tamanho 60 da população de tais sinistros e calculou a média e variância da amostra . Este ano pretende rever o valor do prêmio mas, desejando melhorar suas estimativas determinou que o desvio padrão amostral deva ser $\frac{1}{3}$ do desvio padrão amostral do ano passado. Qual deve ser o tamanho da amostra?

2. Defina o erro amotral da média como $e = \overline{X} - \mu$, onde $\overline{X}$ é a média da amostra e μ é a média da população do retorno dos investimentos de ações na BOVESPA. A variância dos retornos é conhecida e igual a $(0,06)^2$.

   a) Que proporção das amostras de tamanho 25 tem erro amostral absoluto maior do que $0,02$?

   b) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 0,95 dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a $0,01$?

3. Uma ONG esta interessada em verificar se a proporção de trabalhadores que usam o seguro previdenciário é superior a 0,5. rejeitaria esta hipótese se em uma amostra aleatória simples de 10 (75) trabalhadores, no máximo 4 (35) usaram o seguro. Qual a probabilidade de rejeitar tal hipótese sendo ela verdadeira?

4. Em uma apólice de seguros para carros a probabilidade da ocorrência de um sinistro é $0,05$. Em um conjunto de 20 de tais apólices escolhidas aleatóriamente, qual a probabilidade de que a proporção de sinistros seja inferior a $0,06$?

5. A população das idades (em dezenas de anos) de indivíduos sujeitos a certo risco é

$$\{3, 5, 5, 7, 9\}.$$

   Encontre as distribuições amostrais da média e da variância para uma amostra aleatória de tamanho 3 desta população.

6. Se o retorno de investimentos das ações em uma economia estável do país das maravilhas segue uma variável aleatória Normal com média $\mu = 0,12$ u.m. e desvio padrão $\sigma = 0,06$ u.m.,

   a) Qual a $P(0,11 < X < 0,13)$?

   b) Se $\overline{X}$ for a média de uma amostra de tamanho 10, calcule $P(0,11 < \overline{X} < 0,13)$.

   c) Represente em um único gráfico as funções densidades de probabilidade de X e de $\overline{X}$.

   d) Que tamanho deveria ter uma amostra para que $P(0,11 < \overline{X} < 0,13) = 0,95$.

7. Uma Seguradora verifica que os custos dos sinistros referentes a uma apólice de automóvel tem uma distribuição Normal com média $\mu = R\$1500,00$ e desvio padrão $\sigma = R\$500,00$.

   a) Qual deve ser o valor da franquia de tal apólice para que 0,8 dos acidentados nÃ£o usem o seguro?

   b) Se em um determinado mês houve 5 sinistros, qual a probabilidade do custo total superar $R\$8000,00$?

8. Sabe-se que $p = 0,3$ dos trabalhadores usam o sistema de saúde da previdência. Calcula-se a proporção $\widehat{p}$, de trabalhadores que usam o sistema de saúde da previdênciário em uma amostra aleatória simples de 8 trabalhadores.

   a) Construa a distribuição exata de $\widehat{p}$ (use a tabela da distribuição binomial).

   b) Construa a aproximação normal para a binomial.

   c) Você pensa que a segunda é uma boa aproximação da primeira?

   d) Já sabemos que para p fixado, a aproximação melhora quando aumentamos n. Agora, se fixamos n, qual o melhor valor de p?

9. O Governo faz uma campanha com o objetivo de aumentar o uso da previdência. Depois de certo período adotou a seguinte regra de decisão:

   a) Se em uma amostra de tamanho 19 ao menos 8 usarem a previdência o objetivo foi alcançado. Qual a probabilidade de tomar a decisão satisfatória quando o p continua a ser 0,3?

   b) Se em uma amostra de tamanho 100 ao menos 40 usarem a previdência o objetivo foi alcançado. Qual a probabilidade de tomar a decisão satisfatória quando o p continua a ser 0,3?

10. Uma Cia de Seguro Saúde estipula o prêmio de suas apólices baseada na idade da população de segurados. Qual seria a distribuição da variável aleatória idade? Em uma super simplificação imaginamos uma população com idades (em dezenas) $\{3, 4, 4, 5, 7\}$. Para ter uma idéia dos parâmetros da distribuição considermos uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 2$ desta população:

    a) Construa a distribuição amostral de $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. e compare com a distribuição amostral de S^2. Você notou alguma propriedade de S^2 que seja melhor do que $\widehat{\sigma}^2$?

    b) Seja V a média de elementos distintos de amostras de tamanho $n = 3$. Por exemplo, se a amostra observada for $(4, 4, 5)$, então $v = \frac{4+5}{2}$. Construa a distribuição amostral de V;

    c) Compare as distribuições amostrais de V e $\overline{X}$.